N. Balabanian
T. Bickart

Teoria modernă a circuitelor

Prefață

Lucrarea a fost inițial concepută ca o ediție revăzută a lucrării Analiza rețelelor (circuitelor) liniare (Linear Network Analysis) a lui Sundaram Seshu și Norman Balabanian, în vara anului 1965. Totuși înainte ca activitatea de revizuire să înceapă cu adevărat, S. Seshu a murit într-un tragic accident de automobil. De atunci, ediția revăzută concepută inițial a suferit modificări atît de mari încît a căpătat caracterul unei noi cărți și o prezentăm ca atare. Noi (în special Norman Balabanian) dorim, cu toate acestea, să menționăm contribuțiile directe și indirecte la această carte, ale lui S. Seshu.

Materialul cu ajutorul căruia a fost scrisă această carte a fost folosit într-un curs introductiv (beginning graduate course) la Universitatea din Syracuse și la Berkeley — Universitatea din California. Nivelul lucrării permite însă folosirea unor părți din ea într-un curs pentru anii superiori (senior course).

În studiul sistemelor electrice este adesea necesar să ne ocupăm de structura internă și de compoziția sistemului. În aceste cazuri un instrument important pentru analiză este topologia. În alte cazuri, interesează numai caracteristicile externe. Atunci intră în joc considerațiile de „sistem". În această carte ne vom ocupa atît de compoziția internă cît și de caracteristicile de sistem.

Instrumentele matematice de primă importanță sînt analiza matriceală, grafurile liniare, funcțiile de variabilă complexă și transformata Laplace. Primele două sînt dezvoltate în interiorul textului, ultimele două fiind tratate în anexe. De asemenea, pentru a pune bazele folosirii funcției impuls-unitate în cap. 5, se tratează în anexe și funcțiile generalizate. Fiecare din anexe constituie o dezvoltare relativ detaliată și atentă a subiectului tratat.

În această carte am încercat să facem o dezvoltare îngrijită a bazelor teoriei circuitelor (rețelelor)). Se studiază răspunsurile în domeniul timp*

---

*) Menționăm că în traducerea cuvîntului „Network" s-au folosit în lucrare, ca fiind sinonime în sens larg, rețea sau circuit. Ținînd seama, însă, pe de o parte, că în anumite domenii ca electroenergetica, telecomunicațiile și în activitatea practică a electronistului, electrotehnicianului, automatistului ș.a. aceste cuvinte pot desemna sisteme, respectiv subsisteme (ex. rețea cu mai multe circuite, sau invers), iar pe de altă parte, că lucrarea îmbrățișează aspectele generale ale rețelelor sau circuitelor, am denumit cartea „Teoria modernă a circuitelor (rețelelor)". Aruncăm astfel o punte de trecere între aceste cuvinte, care nu e străină și de aprecierea că teoria rețelelor (circuitelor) se intersectează în preocupări cu laturi ale teoriei sistemelor, cum și cu ale altor domenii, cum sînt cele privind calculatoarele

și în frecvență, analiza și sinteza. Împreună cu componentele pasive reciproce se studiază și componentele active nereciproce (surse comandate, giratoare, convertoare de impedanță negativă). Deși cea mai mare parte a cărții se limitează la rețelele liniare invariante în timp, există totuși un capitol important care se ocupă de rețelele neliniare și variante în timp.

Analiza matriceală nu este tratată în totalitate într-un singur capitol; se introduc părți din ea acolo unde este necesar. Astfel, considerațiile introductive sînt discutate în cap. 1, dar funcțiile de matrice se introduc în cap. 4, în care se caută o soluție pentru ecuația vectorilor de stare. În mod analog, echivalența matricelor, forma canonică a unei matrice și formele pătratice se tratează în cap. 7, pregătind dezvoltarea proprietăților analitice ale funcțiilor de rețea.

Analiza rețelelor începe în cap. 2 cu o formulare precisă a relațiilor fundamentale ale lui Kirchhoff, obținute prin aplicarea teoriei grafurilor. Metodele clasice folosind ecuațiile pe ochiuri, la noduri, la perechi de noduri și cu variabile mixte sînt prezentate pe bază topologică.

În cap. 3 se tratează rețelele multiterminale caracterizate prin mărimile măsurate la borne și la perechi de borne (porți). Aici se introduc matricele de admitanță și impedanță nedefinite și se discută proprietățile lor. Capitolul se încheie cu o discuție a formulelor pentru calculul funcțiilor de rețea pornind de la concepte topologice.

În cap. 4 se introduc ecuațiile de stare ale rețelei. Metoda de scriere a ecuațiilor de stare pentru rețelele pasive și active, reciproce și nereciproce este astfel încît cere calcularea parametrilor de multiport numai pentru o rețea rezistivă (care poate fi activă și nereciprocă). Se tratează dezvoltat soluția în domeniul timp pentru ecuația vectorilor de stare.

Cap. 5 se ocupă de metodele integrale de găsire a soluției, ceea ce include integrala de convoluție și integralele de superpoziție. Se discută metodele numerice de evaluare a matricelor de tranziție și problema erorilor în soluțiile numerice.

Cap. 6 și 7 fac trecerea de la analiză la sinteză. Se studiază suficiența părții reale, modulului sau fazei ca părți date ale unei funcții de rețea și se dezvoltă metodele de determinare a funcției de rețea din oricare dintre părțile ei. Acest lucru implică folosirea unor metode algebrice și a relațiilor integrale date de formulele Bode. Se studiază, de asemenea, formulele integrale ce dau legătura dintre partea reală și imaginară ale unei funcții de rețea și răspunsul la impulsul sau la treapta unitate. Pentru rețelele pasive, funcțiile de energie dau baza stabilirii proprietăților analitice ale funcțiilor de rețea. Se introduc funcțiile real — pozitive și se obțin din ele proprietățile

---

și cibernetica, fapt care favorizează simultan generalizarea noțiunilor sau(și) accepțiuni diferite pentru ele. În text am folosit rețea sau circuit, după cum s-a apreciat mai uzual în terminologia curentă. Aparentul pleonasm ar putea fi(sau nu) înlăturat de necesitățile exprimării fiecărui cititor, iar precizarea va veni în timp, odată cu standardizarea terminologiei și cu verificarea ei în practică. Și pentru alte cuvinte-menționate în dicționarul român-englez de la sfîrșitul lucrării — sau folosit și termenii sinonimi. (N.R.).

funcţiilor de reactanţă şi cele ale funcţiilor de admitanţă şi impedanţă RC. Metodele de sinteză prezentate pentru aceste funcţii cît şi pentru altele, includ metoda Darlington şi metodele de sinteză pentru reţelele active RC.

Cap. 8 prezintă o tratare amănunţită a parametrilor de repartiţie şi descrierea reţelelor multiport cu ajutorul matricelor de repartiţie. Se discută normalizarea reală şi complexă, ultima incluzînd normalizarea la o singură frecvenţă şi normalizarea independentă de frecvenţă. Se studiază proprietăţile de reflexie şi transmisie ale reţelelor multiport active şi pasive, reciproce şi nereciproce, în funcţie de parametrii de repartiţie. Se discută aplicaţiile la proiectarea filtrelor şi amplificatoarelor de rezistenţă negativă.

Conceptele de reacţie şi stabilitate se studiază în cap. 9. Se introduce aici, ca instrument matematic, graful de fluenţă al semnalelor. Se prezintă criteriile Routh-Hurwitz, Lienard Chipart şi Nyquist.

Ultimul capitol este consacrat reţelelor variabile în timp şi neliniare. Se pune accentul pe proprietăţile generale ale ambelor tipuri de reţea, aşa cum rezultă din ecuaţiile de stare. Se discută probleme ale existenţei şi unicităţii soluţiilor şi metode de obţinerea lor. Se dă atenţie teoriei stabilităţii a lui Liapunov.

La sfîrşitul fiecărui capitol se prezintă o mare varietate de probleme. Numărul total este 460, unele din ele fiind simple aplicaţii ale relaţiilor obţinute în text. Totuşi, multe din ele cer o extensie considerabilă a materialului din text, sau demonstraţii ale unor afirmaţii ajutătoare care nu au putut fi incluse în text din lipsă de spaţiu. În anumite capitole a fost inclusă o clasă specială de probleme. Fiecare din acestea, notate cu un asterisc cere scrierea unui program pentru calculator. Deşi scrierea programelor pentru calculator nu a fost discutată în text şi s-a inclus numai o minimă prezentare a metodelor numerice, credem că cititorii acestei cărţi posedă un nivel de cunoştinţe suficient, care permite rezolvarea acestor probleme.

La sfîrşitul cărţii se dă o bibliografie, în scopul prezentării unei serii de autori cărora le datorăm unele din ideile noastre. În plus ea constituie o bază suplimentară de referinţă ce poate fi consultată pentru subiecte speciale.

Am beneficiat de observaţiile şi criticile multor colegi şi studenţi, care ne-au sugerat îmbunătăţiri, pentru care exprimăm mulţumirile noastre.

Syracuse New York

N. Balabanian
T. A. Bickart

Cuprins

1

1. Noţiuni fundamentale

1.1. INTRODUCERE

Teoria reţelelor electrice, ca şi multe ramuri ale ştiinţei, îşi propune să descrie fenomenele care apar într-un domeniu fizic cu ajutorul unui model matematic. Un astfel de model este desigur bazat pe observaţii asupra fenomenelor fizice, dar se utilizează şi alte modele matematice care, verificate în decursul timpului, sînt privite ca realităţi fizice prin ele însele. Aşa de exemplu, reprezentarea curentului electric ca un flux de electroni în conductoare, este aşa de sugestiv, încît se pierde din vedere faptul că această reprezentare este un model teoretic al unei părţi din lumea fizică.

Scopul unui model este să permită înţelegerea fenomenelor naturale; mai mult, ne aşteptăm să ajungem la consecinţe logice, care să ne permită să prevedem comportarea modelului în condiţiile pe care le stabilim. Dacă putem reproduce fizic condiţiile care sînt valabile pentru model, prevederile noastre pot fi verificate experimental; în cazul în care acestea se verifică, căpătăm încrederea că modelul este bun. Dacă există diferenţe între valorile prevăzute şi cele experimentale, care nu pot fi puse pe seama erorilor de măsurare, şi dacă sîntem siguri că analogia experimentală a modelului teoretic reproduce condiţiile modelului, trebuie să tragem concluzia că modelul nu este „adecvat" pentru înţelegerea fenomenului fizic corespunzător, şi trebuie revizuit [1].

---

[2]) Un exemplu de astfel de revizuire a apărut după celebra experienţă a lui Michelson-Morley, în care calculele bazate pe mecanica newtoniană nu au corespuns cu rezultatele experimentale. Modelul revizuit este mecanica relativistă.

În cazul teoriei reţelelor electrice, modelul a fost utilizat cu mare succes în predeterminarea rezultatelor experimentale. De fapt, modelul a devenit atît de real, încît pentru studenţi este dificil să deosebească modelul de fenomenul fizic.

Prima etapă în stabilirea unui model este să se facă observaţii detaliate asupra fenomenului fizic. Se efectuează experienţe în intenţia de a stabili relaţii generale între cantităţile măsurabile. Din aceste experienţe se trag concluzii generale în ceea ce priveşte comportarea cantităţilor implicate. Aceste concluzii sînt privite ca „legi'' şi deobicei sînt formulate avînd ca termeni variabilele modelului matematic.

Această problemă nu face obiectul acestei cărţi. Considerăm că modelul a fost bine definit. Vom introduce elementele modelului fără justificări sau verificări empirice. Procesul de abstractizare referitor la interconectarea adecvată a elementelor ipotetice ale modelului, necesar pentru a descrie în mod corespunzător fenomenul fizic dat, este deosebit de important, dar depăşeşte cadrul acestei cărţi.

Această carte se ocupă cu teoria *reţelelor (circuitelor) electrice liniare*. Printr-o *reţea (circuit)* electrică se înţelege o interconectare electrică de dispozitive (componente) electrice formînd o structură cu puncte accesibile la care pot fi măsurate semnalele.

Se presupune că dispozitivele electrice care alcătuiesc reţeaua sînt reprezentate prin *modele*, sau elemente ipotetice ale căror ecuaţii de curent-tensiune sînt ecuaţii liniare-algebrice, ecuaţii diferenţiale, cu diferenţe finite, ecuaţii diferenţiale ordinare sau ecuaţii diferenţiale parţiale.

În această carte ne vom ocupa numai de reţelele cu elemente concentrate; deci nu ne vom ocupa de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale sau de ecuaţii diferenţiale cu diferenţe finite.

Proprietăţile reţelelor pot fi clasificate după două criterii generale. În primul rînd sînt acele proprietăţi ale unei reţele care sînt consecinţele structurii ei — *proprietăţile topologice*. Aceste proprietăţi nu depind de tipurile elementelor care formează o ramură a reţelei, ci numai de modul în care sînt interconectate ramurile; de exemplu, se poate deduce că zerourile funcţiei de transfer ale unei reţele în scară (o structură topologică particulară) cad în semiplanul stîng, indiferent de tipul elementelor pasive care formează ramurile. În al doilea rînd, sînt proprietăţile reţelelor de a prelucra semnalul. Semnalele sînt aplicate în punctele accesibile ale reţelei. Aceste semnale sînt modificate sau prelucrate de reţea în anumite moduri. Aceste *proprietăţi de prelucrare a semnalului* depind de elementele conţinute de reţea şi deasemenea de structura topologică a reţelei. Astfel, dacă elementele reţelei sînt fără pierderi, semnalele sînt modificate în anumite moduri, indiferent de structura reţelei; alte limitări sînt impuse acestor proprietăţi de către structura reţelei. Proprietăţile reţelelor în scară fără pierderi, de exemplu, diferă de acelea ale reţelei în X fără pierderi. Ne vom ocupa de ambele tipuri de proprietăţi — topologice şi de prelucrarea semnalului — ale reţelelor.

1.2. ALGEBRA MATRICEALĂ ELEMENTARĂ

În analiza rețelelor electrice, ca în multe alte domenii ale științei și inginerești, apar sisteme de ecuații liniare, fie algebrice, fie diferențiale. Dacă sistemul conține mai multe ecuații distincte, chiar procesul de scriere și vizualizare a lor devine dificil. Notația matriceală este o metodă convenabilă de scriere a acestor ecuații. Mai mult, notația matriceală simplifică operațiile de efectuat asupra ecuațiilor și rezolvarea lor. Așa cum cititorul poate să privească un vector spațial cu trei componente ca o singură unitate, tot așa putem privi un sistem de ecuații ca o ecuație matriceală. În următorul paragraf, ne vom reaminti unele proprietăți elementare ale matricelor și algebra matriceală, fără a intra însă în detalii. În continuare, așa cum este necesar cînd apar topici adiționale, ne vom abate de la subiectul nostru pentru a defini aceste noi topici introduse.

O *matrice* este un *aranjament* rectangular în *coloane* și *linii*, fiecare cantitate fiind numită o *intrare* sau *element* al matricei. Elementele unei matrice pot fi numere reale sau complexe, funcții de frecvență, operatori de derivare, etc. Presupunem că intrările sînt alese dintr-un „domeniu" care ne permite să aplicăm o algebră similară cu algebra numerelor reale. Ca exemple de matrice cităm:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{s+2} & 2s \\ 2s & 3s^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

Întreaga matrice este închisă între paranteze drepte. Nu este necesar să scriem întreaga matrice cînd ne referim la ea. Este posibil și indicat să-i dăm un „nume" prin atribuirea unui singur simbol, ca în exemplele de mai sus **M**, **Z** sau **V**. Vom alege și vom fi consecvenți în folosirea literelor aldine, mari sau mici, pentru reprezentarea matricelor.

Ordinul unei matrice este o pereche ordonată de numere care reprezintă numărul de linii și numărul de coloane, după cum urmează: (m, n) sau $m \times n$. În exemplele de mai sus, ordinele sînt respectiv (3, 2), (2, 2) și (4, 1). Folosind cealaltă notație, ordinele matricelor sînt respectiv, 3×2, 2×2 și 4×1. Ultima este un tip special de matrice, numită matrice *coloană* (cu o singură coloană). Este posibil să avem o matrice de ordinul $1 \times n$; o astfel de matrice are o singură linie și se numește matrice *linie*. O matrice în care numărul de linii este egal cu numărul de coloane se numește matrice *patrată*. În exemplele de mai sus, matricea **Z** este patrată. Pentru cazurile speciale în care matricea este o matrice coloană, o matrice linie sau o matrice patrată, ordinul este determinat

de un singur număr, care este numărul de linii sau (şi) coloane; de exemplu, dacă **M** este o matrice patrată cu n linii şi n coloane, ordinul ei este n.

Pentru a ne referi la elementele unei matrice în termeni generali, folosim notaţia

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$$

Dacă ordinul (m, n) nu interesează, nu este necesar ca acesta să fie indicat în expresia de mai sus. Elementul tipic este a_{ij}. Matricea A completă are următoarea formă

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Operaţiuni de bază

Egalitate. Două matrice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ şi $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ sînt egale dacă au acelaşi ordin şi dacă elementele corespondente sînt identice; adică $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ dacă $a_{ij} = b_{ij}$ pentru orice i şi j.

Multiplicare printr-un scalar. Pentru a multiplica o matrice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ printr-un scalar (adică un număr ordinar) k, multiplicăm fiecare element al matricei prin acest scalar; adică $k\mathbf{A}$ este o matrice a cărui element tipic este ka_{ij}.

Adunarea matricelor. Adunarea este definită numai pentru matrice de acelaşi ordin. Pentru a aduna două matrice, adunăm elementele corespondente. Astfel, dacă considerăm $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ şi $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ atunci

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}] \tag{2}$$

Este clar că adunarea este comutativă şi asociativă; astfel

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \tag{3}$$

Înmulţirea matricelor. Dacă $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ şi $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n,p}$, atunci produsul între A şi B este definit astfel

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} = [c_{ij}]_{m,p}. \tag{4}$$

unde elementele produsului sînt date de

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj} \tag{5}$$

Rezultă că elementul (i, j) al produsului este obţinut prin multiplicarea elementelor liniei i ale primei matrice prin elementele corespondente din coloana j ale celei de a doua matrice, şi adunarea acestor produse. Aceasta înseamnă că multiplicarea este definită numai cînd numărul de coloane ale primei matrice este egal cu numărul de linii ale celei de a doua matrice. Observăm că matricea **C** de mai sus are acelaşi număr de linii cu prima matrice şi acelaşi număr de coloane cu al celei de a doua.

Exemplu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}) & (a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}) & (a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}) \end{bmatrix}.$$

Cînd este posibil de realizat produsul **AB** (adică, atunci cînd numărul de coloane al matricei **A** este egal cu numărul de linii al matricei **B**), spunem că produsul **AB** este *compatibil*. Este evident că produsul **AB** poate fi compatibil, în timp ce **BA** nu este. Rezultă că **AB** nu este, în general, egal cu **BA**. Mai mult, aceasta poate fi adevărat chiar dacă amîndouă produsele sînt compatibile.
Fie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Atunci

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

care arată că $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ în acest caz.

Se constată că înmulţirea matricelor nu este în general comutativă, deşi ea poate fi în unele cazuri. Deci, cînd ne referim la produsul a două matrice **A** şi **B**, trebuie să specificăm cum sînt înmulţite. În produsul **AB**, spunem că **A** *premultiplică* sau multiplică la stînga pe **B**, sau **B** *postmultiplică* sau multiplică la dreapta pe **A**.

Chiar dacă înmulțirea matricilor nu este comutativă, ea este *asociativă* și *distributivă*. Astfel, dacă produsele **AB** și **BC** sînt posibile, atunci

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \tag{6}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}.$$

Uneori este convenabil să scriem o matrice dată astfel încît *submatricele* să fie tratate ca unități. Astfel, fie $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{3.5}$. Se poate separa sau *partiționa* matricea după cum urmează

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc:ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hdashline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right]$$

unde

$$\mathbf{A}_{11} = [a_{11} \quad a_{12}] \qquad \mathbf{A}_{12} = [a_{13} \quad a_{14} \quad a_{15}]$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

sau

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc:c:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c:c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \hdashline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \end{array}\right]$$

unde

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{13} = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21} = [a_{31} \quad a_{32}], \quad \mathbf{A}_{22} = [a_{33}], \quad \mathbf{A}_{23} = [a_{34} \quad a_{35}].$$

Submatricele în care a fost partiţionată matricea **A** sînt arătate prin linii punctate. Fiecare submatrice poate fi tratată, în operaţiunile care urmează a fi efectuate asupra lui **A**, ca un element al matricei **A**; de exemplu, produsul a două matrice partiţionate este dat de

$$\mathbf{AB} = [\sum_j \mathbf{A}_{ij} \mathbf{B}_{jk}]. \tag{7}$$

Desigur, pentru ca această partiţionare să conducă la rezultatul corect, este necesar ca fiecare din produsele submatricelor, $\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11}$, etc., să fie compatibile. Matricele partiţionate în acest fel se numesc matrice *partiţionate compatibil.*

Aceasta este exemplificată în următorul produs de două matrice.

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hdashline 4 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{U} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{U} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \hdashline \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ \hdashline [4 \quad 3] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & [4 \quad 3] + [-1 \quad 3] \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 6 & -1 \\ 5 & 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Diferenţierea. Fie **A** de ordinul $n \times m$. Atunci, pentru orice punct în care $da_{ij}(x)/dx$ există pentru $i = 1, 2 \ldots n$ şi $j = 1, 2 \ldots m$, $d\mathbf{A}(x)/dx$ este definit astfel:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{A}(x) = \left[\frac{d}{dx}a_{ij}(x)\right]. \tag{8}$$

Rezultă că matricea $d\mathbf{A}(x)/dx$ este obţinută prin înlocuirea fiecărui element $a_{ij}(x)$ al matricei $\mathbf{A}(x)$, cu derivata sa $da_{ij}(x)/dx$. Este uşor acum (şi le considerăm ca un exerciţiu pentru dumneavoastră) să arătăm că

$$\frac{d}{dx}\{(\mathbf{A}(x) + \mathbf{B}(x)\} = \frac{d\mathbf{A}}{dx} + \frac{d\mathbf{B}}{dx} \tag{9}$$

$$\frac{d}{dx}\{(\mathbf{A}(x)\mathbf{B}(x)\} = \frac{d\mathbf{A}}{dx}\mathbf{B} + \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dx} \tag{10}$$

şi

$$\frac{d}{dx}\mathbf{A}(f(x)) = \frac{d\mathbf{A}}{df}\frac{df}{dx} = \frac{df}{dx}\frac{d\mathbf{A}}{df}. \tag{11}$$

Se vede că regulile uzuale pentru diferenţierea combinaţiilor de funcţii se aplică şi în cazul diferenţierii matricelor; o restricţie este aceea că ordinea de înmulţire a matricelor dată în (10) trebuie să fie respectată.

Integrarea. Fie ordinul lui **A**, $n \times m$. Atunci pentru orice interval pe care $\int_{x_1}^{x_2} a_{ij}(y)dy$ există pentru $i = 1, 2 \ldots n$ şi $j = 1, 2 \ldots m$, $\int_{x_1}^{x_2}\mathbf{A}(y)dy$ este definită astfel

$$\int_{x_1}^{x_2}\mathbf{A}(y)dy = \left[\int_{x_1}^{x_2} a_{ij}(y)dy\right]. \tag{12}$$

Rezultă că elementul (i, j) al integralei **A** este integrala elementului (i, j) al matricei **A**.

Urma este suma elementelor diagonalei principale ale unei matrice. Dacă matricea este **A**, vom nota urma cu *tr* **A** şi o vom defini astfel:

$$\text{tr}\,\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

unde n este ordinul lui **A**.

Transpunerea. Operaţiunea de interschimbare a liniilor şi coloanelor unei matrice se numeşte *transpunere*. Rezultatul acestei operaţiuni asupra unei matrice **A** se numeşte *transpusa lui* **A** şi se notează **A'**. Dacă $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m,n}$, atunci $\mathbf{A}' = [b_{ij}]_{n,m}$, unde $b_{ij} = a_{ji}$. Transpusa unei matrice coloană este o matrice linie şi invers. Dacă, aşa cum se întîmplă adesea în analiză, este necesar să găsim transpusa produsului de două matrice, este important de ştiut că

$$(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'; \tag{13}$$

adică, transpusa unui produs este egală cu produsul transpuselor, dar luate în ordine inversă. Acest rezultat poate fi stabilit cu uşurinţă prin scrierea elementului tipic al transpusei produsului şi arătînd că el este acelaşi cu elementul tipic al produsului transpuselor luate în sens invers.

Conjugata. Dacă fiecare din elementele unei matrice **A** este înlocuit cu complex conjugatul său, matricea rezultantă se numeşte *conjugata* lui **A** şi se notează cu $\overline{\mathbf{A}}$. Astfel, dacă $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,m}$, atunci $\overline{\mathbf{A}} = [b_{ij}]_{n,m}$, unde $b_{ij} = \bar{a}_{ij}$ şi $\bar{a}_{ij}$ reprezintă complex conjugatul lui a_{ij}.

Conjugata transpusă. Matricea care este conjugata transpusei lui **A** sau, ceea ce este echivalent, transpusa conjugatei lui **A**, se numeşte *conjugata transpusă* a matricei **A** şi se notează cu **A***; astfel:

$$\mathbf{A}^* = (\overline{\mathbf{A}'}) = (\overline{\mathbf{A}})'. \tag{14}$$

Tipuri de matrice

Există două matrice speciale care au proprietăţile scalarilor 0 şi 1. Matricea $\mathbf{0} = [0]$ care are toate elementele zero este numită matrice *zero* sau *nulă*. Ea este patrată şi poate fi de orice ordin. Similar, matricea *unitate* **U** este o matrice patrată de orice ordin care are elementele de pe diagonala principală toate egale cu 1, toate celelalte elemente fiind zero. Astfel

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sînt matrici unitate de ordinul 2, 3 şi respectiv 4. Se poate verifica uşor

că matricea unitate are proprietățile numărului 1; dîndu-se o matrice **A**,

$$\mathbf{UA} = \mathbf{AU} = \mathbf{A} \tag{15}$$

unde ordinul lui **U** este astfel ales încît produsele să fie compatibile.

Dacă o matrice patrată are aceeași structură cu a unei matrice unitate, în care elementele diagonalei principale sînt diferite de zero, ea este numită o matrice *diagonală*. O matrice diagonală are deci forma

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & & & & \\ & d_{22} & & \bigcirc & \\ & & d_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & \bigcirc & & & \\ & & & & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Toate elementele de deasupra și dedesubtul diagonalei principale sînt zero. O matrice diagonală este identică cu transpusa sa.

Dacă numai elementele de sub diagonala principală sau numai cele de deasupra diagonalei principale a unei matrice patrate sînt zero, ca de exemplu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & & \vdots \\ & \bigcirc & & & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ sau } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{12} & a_{22} & & \bigcirc & \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

matricea este numită o matrice triunghiulară. Pentru precizări suplimentare, putem numi pe **A** o matrice ***superior triunghiulară*** și **B** o matrice ***inferior triunghiulară***.

Matrice simetrice și antisimetrice. O matrice patrată este ***simetrică*** dacă ea este egală cu transpusa sa: $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$ sau $a_{ij} = a_{ji}$ pentru orice i și j. Dacă o matrice este egală cu negativa transpusei ei, ea se numește ***antisimetrică***: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}'$ sau $a_{ij} = -a_{ji}$. Pentru ca elementele diagonalei principale să îndeplinească această condiție este necesar ca acestea să fie zero. Rezultă că o matrice antisimetrică are elementele diagonalei egale cu zero.

O matrice patrată dată poate totdeauna fi scrisă ca suma unei matrice simetrice şi a uneia asimetrice. Astfel fie

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]$$

$$\mathbf{A}_s = [b_{ij}] \quad \text{unde } b_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} = b_{ji}$$

$$\mathbf{A}_{ss} = [c_{ij}] \quad \text{unde } c_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2} = -c_{ji}.$$

Atunci

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_{ss}, \text{ deoarece } a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}. \tag{16}$$

Matrice hermitică şi antihermitică. O matrice patrată este numită *hermitică* dacă ea este egală cu transpusa conjugatei sale; astfel $\mathbf{A}$ este matrice hermitică dacă $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ sau $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ pentru orice i şi j. Un alt caz special se obţine dacă o matrice este egală cu negativa transpusei conjugatei sale, şi este numită o matrice *antihermitică*. Astfel $\mathbf{A}$ este antihermitică dacă $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$ sau $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$ pentru orice i şi j. Observăm că o matrice hermitică care are numai elemente reale este simetrică, şi o matrice antihermitică care are numai elemente reale este antisimetrică.

Determinanţi

Oricărei matrice patrate $\mathbf{A}$ i se poate asocia un număr numit *determinantul* lui $\mathbf{A}$. Obişnuit determinantul lui $\mathbf{A}$ se notează prin simbolul det $\mathbf{A}$ sau $|\mathbf{A}|$; vom folosi uneori simbolul Δ pentru un determinant, atunci cînd nu este necesar să atragem atenţia asupra unei matrice particulare pentru care Δ este determinantul. Menţionăm că o matrice şi determinantul său sînt două lucruri complet diferite. Dacă două matrice au determinanţi egali, aceasta nu înseamnă că matricele sînt egale; ele pot fi chiar de ordine diferite.

Determinantul matricei $\mathbf{A}$ de ordin $n \times n$ este definit ca

$$\det \mathbf{A} = \sum \varepsilon\, a_{1\nu_1} a_{2\nu_2} \cdots a_{n\nu_n} \tag{17}$$

sau de relaţia echivalentă

$$\det \mathbf{A} = \sum \varepsilon\, a_{\nu_1 1} a_{\nu_2 2} \cdots a_{\nu_n n} \tag{18}$$

unde însumarea se face pentru toate $n!$ permutările în $\nu_1, \nu_2 \ldots, \nu_n$ a indicilor $1, 2 \ldots n$, şi ε este egal cu $+1$ sau -1 după cum permutarea $\nu_1, \nu_2 \ldots, \nu_n$ este pară sau impară. Ca o consecință a acestei definiții, determinantul unei matrice 1×1 este egal cu elementul său, şi determinantul unei matrice 2×2 este:

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Produsul $a_{11}a_{22}$ a fost multiplicat cu $\varepsilon = +1$ deoarece $\nu, \nu_2 = 1, 2$ este o permutare pară a lui $1, 2$; produsul $a_{12}a_{21}$ a fost multiplicat cu $\varepsilon = -1$ deoarece $\nu_1, \nu_2 = 2, 1$ este o permutare impară a lui $1, 2$. Evaluarea determinantului pentru un n mare este dificilă dacă aplicăm definiția de mai sus, şi nu este necesară totdeauna. Timpul necesar pentru evaluarea unui determinant poate fi redus prin aplicarea unor proprietăți ale determinanților. Vom prezenta în rezumat cîteva proprietăți importante ale determinanților:

1. Determinantul unei matrice şi al transpusei acesteia sînt egale; adică, $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}'$.

2. Dacă fiecare element al oricărei linii sau oricărei coloane a unui determinant, este multiplicat printr-un scalar k, determinantul este multiplicat prin k.

3. Interschimbarea a oricăror două linii sau coloane modifică semnul unui determinant.

4. Dacă două linii sau coloane sînt identice, atunci determinantul este zero.

5. Dacă fiecare element al unei linii sau al unei coloane este zero, atunci determinantul este zero.

6. Determinantul rămîne neschimbat dacă la fiecare element al oricărei linii sau coloane este adunat un multiplu scalar al elementului corespunzător al oricărei alte linii sau coloane.

Dezvoltarea cofactorilor. Fie $\mathbf{A}$ o matrice patrată de ordinul n. Dacă linia i şi coloana j ale matricei $\mathbf{A}$ sînt eliminate, determinantul matricei rămase, care are ordinul $n - 1$, se numeşte primul minor (sau mai simplu un minor) al lui $\mathbf{A}$ sau al det $\mathbf{A}$ şi se notează prin M_{ij}. *Cofactorul* corespunzător este definit astfel

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{19}$$

Se spune că Δ_{ij} este cofactorul elementului a_{ij}. Dacă $i = j$, minorul şi cofactorul se numesc *minor principal* şi *cofactor principal*. Un minor principal (cofactor) al lui $\mathbf{A}$ este acela a căror elemente diagonale sînt

deasemenea elemente diagonale pentru **A**[1]. Valoarea unui determinant poate fi obținută prin multiplicarea fiecărui element al unei linii sau coloane prin cofactorul corespunzător, și adunînd rezultatele. Astfel:

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + a_{i3}\Delta_{i3} + \ldots + a_{in}\Delta_{in} \qquad (20a)$$

$$= a_{1i}\Delta_{1i} + a_{2i}\Delta_{2i} + a_{3i}\Delta_{3i} + \ldots + a_{ni}\Delta_{ni}. \qquad (20b)$$

Aceste expresii sînt numite *dezvoltări în cofactorii* unei linii sau unei coloane și sînt obținute prin gruparea termenilor din (17) sau (18), astfel încît fiecare grup să corespundă unui element înmulțit cu factorul său.

Ce se va întîmpla dacă elementele unei linii sau coloane sînt multiplicate cu cofactorul corespunzător al unei alte linii sau coloane? Considerăm ca o problemă pentru dumneavoastră să arătați că rezultatul va fi zero; astfel,

$$a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{j2} + a_{i3}\Delta_{j3} + \ldots + a_{in}\Delta_{jn} = 0 \qquad (21a)$$

$$a_{1i}\Delta_{1j} + a_{2i}\Delta_{2j} + a_{3i}\Delta_{3j} + \ldots + a_{ni}\Delta_{nj} = 0. \qquad (21b)$$

Simbolul lui Kronecker este o funcție notată cu δ_{ij} și este definită astfel:

$$\delta_{ij} = 1 \text{ dacă } i = j$$

$$0 \text{ dacă } i \neq j$$

unde i și j sînt întregi. Folosind simbolul lui Kronecker, putem combina (20a) și (21a) și scrie

$$(\det \mathbf{A})\,\delta_{ij} = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}\Delta_{jk}. \qquad (22)$$

Similar, combinînd (20b) și (21b), obținem

$$(\det \mathbf{A})\,\delta_{ij} = \sum_{k=0}^{n} a_{ki}\Delta_{kj}. \qquad (23)$$

---

[1]) Această definiție nu limitează numărul de rînduri și coloane eliminate din Δ pentru obținerea minorului sau cofactorului. Dacă sînt eliminate o linie și o coloană, ne vom referi la acest cofactor numindu-l *primul* cofactor. În general, dacă sînt eliminate n rînduri și n coloane ne vom referi la cofactorul obținut ca la cofactorul al n-lea.

Determinant al unui produs de matrice. Fie **A** şi **B** matrice patrate de acelaşi ordin. Determinantul produsului **A** şi **B** este produsul determinanţilor; adică

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})\ (\det \mathbf{B}). \tag{24}$$

Derivata unui determinant. Dacă elementele matricei patrate **A** sînt funcţii de aceeaşi variabilă x, atunci $|\mathbf{A}|$ va fi o funcţie de x. Este util de ştiut că

$$\frac{d|\mathbf{A}|}{dx} = \sum_{i,j=1}^{n} \Delta_{ij} \frac{da_{ij}}{dx}. \tag{25}$$

Rezultatul este uşor verificat avînd în vedere că

$$\frac{d|\mathbf{A}|}{dx} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial|\mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} \frac{da_{ij}}{dx}$$

şi dezvoltarea în cofactori a lui $|\mathbf{A}|$ din (22) sau (23), din care rezultă că $\partial|\mathbf{A}|/\partial a_{ij} = \Delta_{ij}$.

Teorema Binet-Cauchy. Considerăm determinantul produsului **AB**, presupunînd că ordinele sînt (m, n) şi (n, m) cu $m < n$. Observăm că produsul este o matrice patrată de ordin m. Submatricea patrată cea mai mare a fiecărei dintre matricele **A** şi **B**, este de ordinul m. Fie determinantul fiecărei submatrice patrată de ordin maxim un *determinant major*, sau mai simplu un *major*. Atunci $|\mathbf{AB}|$ este dat de următoarea teoremă numită *teorema Binet-Cauchy*.

$$\det \mathbf{AB} = \sum_{\substack{\text{toţi}\\ \text{majorii}}} (\text{produse ale majorilor corespondenţi din } \mathbf{A} \text{ şi } \mathbf{B}) \tag{26}$$

Expresia „majori corespondenţi" trebuie înţeleasă astfel: numerotarea coloanelor folosite pentru formarea unui major **A** este aceiaşi cu a liniilor folosite pentru formarea majorului lui **B**.

Pentru a ilustra aceasta, să considerăm

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

În acest caz $m = 2$ şi $n = 3$. Prin înmulţire directă găsim

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determinantul acestei matrice este uşor de calculat cu (18). Să aplicăm acum teorema Binet-Cauchy. Observăm că există trei determinanţi de ordinul doi. Aplicînd (26), obţinem

$$\det \mathbf{AB} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (3)(3) + (-6)(-1) + (-3)(-1) = 18.$$

Acelaşi rezultat se obţine şi prin evaluarea directă a determinantului.

Inversa unei matrice

În cazul scalarilor, dacă $a \neq 0$, există un număr b astfel ca $ab = ba = 1$. În acelaşi fel, dîndu-se o matrice patrată **A**, căutăm o matrice **B** astfel ca :

$$\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{U}.$$

O astfel de matrice **B** poate să nu existe. Dar dacă această relaţie este satisfăcută, spunem că **B** este *inversa* lui **A** şi scriem $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Relaţia inversă este adevărată, astfel că dacă $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, atunci $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$.

Dîndu-se o matrice patrată **A**, formăm o altă matrice după cum urmează

$$\mathbf{B} = [b_{ij}] \text{ unde } b_{ij} = \frac{\Delta_{ji}}{\Delta}$$

unde $\Delta = \det \mathbf{A}$ şi Δ_{ji} este cofactorul lui a_{ji}. Prin dezvoltarea directă a lui **AB** şi **BA** şi aplicarea lui (22) şi (23), se poate arăta că **B** este inversa lui **A**. (Vă propunem să faceţi aceasta ca exerciţiu). În cuvinte, inversa lui **A** se obţine înlocuind fiecare element al lui **A** prin cofactorul său, luînd apoi transpusa pe care o împărţim la determinantul lui **A**.

Deoarece elementele inversei lui **A** au Δ la numitor, este clar că inversa nu va exista dacă $\det \mathbf{A} = 0$. O matrice al cărei determinant este egal cu zero se numeşte *singulară*. Dacă $\det \mathbf{A} \neq 0$, matricea este *nesingulară*.

Procesul de formare al inversei este clarificat de definirea unei alte matrice referitoare la **A**. Definim *adjuncta lui* **A**, scriind adj **A** astfel

$$\text{adj}\,\mathbf{A} = [\Delta_{ij}]' = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \dots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \Delta_{3n} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (27)$$

Se observă că elementele liniei i ale adj **A** sînt cofactori ai elementelor coloanei i a lui **A**. Inversa lui **A** se poate acum scrie:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\,\text{adj}\,\mathbf{A}. \qquad (28)$$

Dacă înmulţim ambele părţi ale lui (28) cu **A**, obţinem

$$A\,.\,[\text{adj}\,\mathbf{A}] = \mathbf{U}\det \mathbf{A}. \qquad (29)$$

Fiecare parte a acestei expresii este o matrice, partea din stînga fiind produsul a două matrice şi partea din dreapta fiind o matrice diagonală a căror elemente diagonale sînt egale fiecare cu det **A**. Luînd determinantul ambelor părţi, se obţine

$$(\det \mathbf{A})(\det \text{adj}\,\mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})^n$$

sau

$$\det \text{adj}\,\mathbf{A} = (\det \mathbf{A})^{n-1}. \qquad (30)$$

Adeseori este necesar să calculăm produsul a două matrice. Este de dorit, prin urmare, să evaluăm inversa şi adjuncta produsului a două matrice **A** şi **B**. Rezultatele sînt:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1} \qquad (31)$$

$$\text{adj}\,(\mathbf{AB}) = (\text{adj}\,\mathbf{B})(\text{adj}\,\mathbf{A}). \qquad (32)$$

Desigur, produsul **AB** trebuie să fie compatibil. Mai mult, atît **A** cît şi **B** trebuie să fie patrate şi nesingulare.

În cazul inversei (31), observăm că

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{U}.$$

Deci **AB** este inversa lui $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$, de unde rezultatul. Pentru adjuncta (32) putem forma produsele (**AB**)(adj **AB**) şi (**AB**)(adj **B**) (adj **A**) şi arăta prin folosirea repetată a relaţiei **M**(adj **M**) = **U**(det **M**) că ambele produse sînt egale cu **U**(det **AB**).

Condensare pivotală

Prin aplicarea repetată a dezvoltării în cofactori, evaluarea determinantului unui aranjament $n \times n$ de numere, poate fi redusă la evaluarea aranjamentelor 2×2. Este clar că numărul de operaţii matematice creşte excesiv cînd creşte n. O altă metodă de evaluare a determinantului, care necesită mult mai puţine operaţiuni aritmetice, este numită *condensare pivotală*. Vom dezvolta această metodă.

Fie o matrice $\mathbf{A}$ $n \times n$ partiţionată astfel

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \vdots & \mathbf{A}_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \mathbf{A}_{21} & \vdots & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \tag{33}$$

unde submatricea $\mathbf{A}_{11}$ este de ordinul $m \times m$ unde $1 \leqslant m < n$. Presupunem $\mathbf{A}_{11}$ nesingulară. În acest caz $\mathbf{A}_{11}$ există, şi **A** poate fi factorizată astfel

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \vdots & \mathbf{0} \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \vdots & \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \vdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \vdots & \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{U} \end{bmatrix} \tag{34}$$

Valabilitatea acestei factorizări este dovedită dacă efectuăm înmulţirea matricelor indicate şi observăm că rezultatul este (33).

Prin aplicarea repetată a dezvoltării cofactorilor, se poate arăta (problema 35) că determinantul unei matrice triunghiulare este egal cu produsul elementelor diagonalei principale. Deoarece

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} & \vdots & \mathbf{0} \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \vdots & \mathbf{U} \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \vdots & \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{U} \end{bmatrix}$$

sînt triunghiulare cu „elemente unitare" în diagonala principală, determinanții lor sînt egali cu unu. Rezultă că în (34) numai matricea din mijloc trebuie discutată. Această matrice poate fi factorizată astfel:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \end{bmatrix}; \tag{35}$$

Determinanții matricelor din dreapta sînt de fapt $\det \mathbf{A}_{11}$ și $\det (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})$, respectiv.

Deoarece determinantul unui produs de matrice este egal cu produsul determinanților, luînd determinanții ambelor părți ale lui (34) și folosind (35), se obține:

$$\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{A}_{11}) \{\det (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})\}. \tag{36}$$

Dacă $\mathbf{A}_{11}$ este scalarul $a_{11} \neq 0$ (adică ordinul lui $\mathbf{A}_{11}$ este 1×1), atunci ultima ecuație se reduce la

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \det \left(\mathbf{A}_{22} - \frac{1}{a_{11}} \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\right) = a_{11} \det \frac{a_{11}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}}{a_{11}}.$$

În concordanță cu proprietățile unui determinant, multiplicarea fiecărei linii a unei matrice cu o constantă $1/a_{11}$, are ca efect multiplicarea cu $1/a_{11}^m$, unde m este ordinul matricei. Pentru matricea din partea dreaptă a cărui determinant este găsit, ordinul este $n - 1$, cu unu mai mic ca ordinul lui $\mathbf{A}$. Deci

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \det (a_{11}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}). \tag{37}$$

Aceasta este relația matematică asociată condensării pivotale. Condiția ca elementul pivotal a_{11} să fie diferit de zero poate fi totdeauna realizată, cu excepția cazului în care toate elementele primei linii sau coloane sînt zero, caz în care $\det \mathbf{A} = 0$. Făcînd abstracție de acest ultim caz, totdeauna putem plasa un element diferit de zero în poziția (1, 1) prin interschimbarea unei alte linii cu linia 1 sau a unei alte coloane cu coloana 1. Această interschimbare va necesita o schimbare de semn în concordanță cu proprietatea (3) a determinanților. Aplicarea repetată

a relației (37) reduce evaluarea det **A** la evaluarea determinantului unor aranjamente de dimensiuni 2×2.

Exemplul dat mai jos ilustrează metoda condensării pivotale.

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (-1) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ (s-au interschimbat coloanele 1 și 3)

$$= -\frac{1}{1^{4-2}} \det \left\{ 1 \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 2] \right\}$$

$$= -\det \left\{ \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= -\det \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3^{3-2}} \det \left\{ 3 \times \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} [-1 \quad -2] \right\}$$

$$= -\frac{1}{3} \det \left\{ \begin{bmatrix} 12 & -15 \\ 6 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= -\frac{1}{3} \det \begin{bmatrix} 11 & -17 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$$

$$= -1.$$

Multe din etapele incluse aici pot fi eliminate de cineva pentru care folosirea condensării pivotale pentru evaluarea unui determinant, a devenit o metodă curentă de calcul.

Ecuații liniare

Notația matricealǎ și conceptul de matrice au fost introduse în dorința de a ușura analiza seturilor de ecuații algebrice liniare. Deoarece în analiza rețelelor se folosesc astfel de ecuații și este necesară rezolvarea

lor, ne vom îndrepta acum atenția asupra lor. Considerăm următorul set de ecuații algebrice liniare.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n &= y_m. \end{aligned}$$

Un astfel de sistem de ecuații poate fi scris folosind notația matriceală astfel:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{39}$$

Aceasta poate fi verificată prin realizarea înmulțirii în stînga. De fapt, definiția unui produs de matrice, care putea fi privită ca restrictivă atunci cînd a fost introdusă, a fost dată astfel pentru a permite scrierea unui set de ecuații liniare în formă matriceală.

Expresia poate fi simplificată mai mult prin folosirea simbolurilor matricelor **A**, **x**, **y**, ceea ce conduce la

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{40}$$

Această ecuație matriceală poate reprezenta orice set de orice număr de ecuații liniare, avînd orice număr de variabile. Importanța folosirii matricelor este evidentă. Problema care se pune acum, este rezolvarea acestei ecuații matriceale, sau a setului corespondent de ecuații scalare, prin găsirea unui set de valori pentru x, care satisface simultan aceste ecuații. Dacă există o soluție, spunem că ecuațiile sînt *compatibile*.

Fiecare coloană (sau linie) a unei matrice este identificată prin elementele sale. Ea poate fi privită ca un *vector*, în care elementele joacă rolul componentelor vectorului. Deși vectorii cu mai mult de trei dimensiuni nu pot fi vizualizați geometric, totuși terminologia de vectori spațiali este utilă în prezentul context și poate fi extinsă la un spațiu cu n dimensiuni. Astfel, în (40) x, y, și fiecare coloană și fiecare linie ale lui **A** sînt vectori. Dacă vectorul corespunde unei coloane de elemente, atunci el poate fi numit *vector coloană*. *Vectorul linie* este numele complet al unui vector care este o linie de elemente. Vom folosi denumirile complete

numai dacă altfel confuzia este posibilă. De cele mai multe ori cînd folosim simplu cuvîntul „vector", el trebuie interpretat ca „vector coloană".

Acum, dîndu-se un set de vectori, problema care apare este dacă există anumite relații între vectori sau dacă sînt independenți. În spațiul cu două dimensiuni, știm că oricare doi vectori sînt independenți unul față de altul, afară de cazul cînd sînt coliniari. Mai mult, orice alt vector din plan poate fi obținut ca o combinație liniară a acestora, astfel că trei vectori nu pot fi independenți în spațiul cu două dimensiuni.

În cazul mai general, spunem că un set de m vectori, caracterizat prin $\mathbf{x}_i$ ($i = 1$ la m), este *dependent liniar* dacă putem găsi un set de constante k_i astfel ca

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \mathbf{x}_i = 0 \quad (k_i \text{ nu sînt toate zero}) \tag{41}$$

Dacă nu există o astfel de relație, vectorii sînt *independenți liniar*. Este clar că dacă vectorii sînt dependenți, atunci unul sau mai mulți vectori pot fi exprimați ca o *combinație liniară* a celor rămași cu ajutorul relației (41).

Pentru rezolvarea ecuațiilor liniare este indicat să folosim notația dependenței liniare. Să împărțim matricea $\mathbf{A}$ după coloane și să examinăm produsul

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n.$$

Exprimată în acest fel, se vede că $\mathbf{A}\mathbf{x}$ este o combinație liniară a vectorilor lui $\mathbf{A}$. De fapt, există un vector $\mathbf{x}$ care ne va da orice combinație dorită a acestor vectori coloană. Este evident deci că dacă ecuația $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ are o soluție, $\mathbf{y}$ trebuie să fie o combinație liniară a vectorilor coloanelor lui $\mathbf{A}$. O formulare echivalentă a acestor condiții este următoarea : Numărul maxim de vectori liniar-independenți din două seturi $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ și $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, $\mathbf{y}$ trebuie să fie același dacă sistemul de ecuații $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ admite soluție.

Putem stabili o formulare mai compactă a acestei condiții de existență a soluției, sau de compatibilitate a lui $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Definim rangul unei matrice ca ordinul celei mai mari matrice pătrate nesingulare care poate fi obținută prin îndepărtarea de linii și coloane din matricea ori-

ginală. Dacă rangul unei matrice pătrate este egal cu ordinul acesteia, matricea este nesingulară, astfel că determinantul său este diferit de zero. De fapt, se poate stabili ca o teoremă că *determinantul unei matrice este zero dacă şi numai dacă liniile şi coloanele matricei sînt liniar dependente.* (Demonstraţi-o!). Astfel liniile şi coloanele unei matrice nesingulare trebuie să fie liniar-independente. Rezultă că rangul unei matrice egalează numărul maxim de linii şi coloane liniar-independente.

Considerăm acum două matrice **A** şi **Ay**, unde cea de a doua matrice este obţinută din **A** la care se adaugă un vector coloană **y**. Am stabilit că numărul maxim de vectori coloană liniar-independenţi trebuie să fie acelaşi pentru aceste două matrice, pentru a asigura compatibilitatea, astfel că deducem că rangul celor două matrice trebuie să fie acelaşi; astfel, sistemul de ecuaţii $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ este compatibil dacă şi numai dacă

$$\text{rang}\,\mathbf{A} = \text{rang}\,[\mathbf{A}\ \mathbf{y}]. \tag{42}$$

Aceasta este numită *relaţie de consistenţă.*

Exemplu

Presupunem că A este următoarea matrice de ordinul 3×4;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -7 & -5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Prin calcul direct, se obţine că fiecare din cele patru matrice pătrate de ordinul 3 obţinute prin îndepărtarea unei coloane din A este singulară — are determinantul zero. Totuşi matricea 2×2

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

obţinută prin îndepărtarea liniei a treia şi a coloanelor trei şi patru este nesingulară. Astfel rangul lui A este 2. Aceasta ne spune de asemenea că vectorii coloanelor 1 şi 2

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ şi } \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

sînt liniar independenţi. Vectorii coloanelor 3 şi 4

$$a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ şi } a_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

sînt combinaţii liniare de a_1 şi a_2; în particular,

$$\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 \quad \text{şi} \quad \mathbf{a}_4 = 3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2.$$

Dacă $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ are o soluţie, atunci $\mathbf{y}$ trebuie să fie o combinaţie liniară a lui $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$. Presupunem $\mathbf{y} = \alpha\,\mathbf{a}_1 + \beta\,\mathbf{a}_2$. Atunci trebuie să rezolvăm

$$\alpha\,\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4$$

sau, deoarece

$$\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 \quad \text{şi} \quad \mathbf{a}_4 = 3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$$

atunci

$$(\alpha - 3x_3 - 3x_4)\mathbf{a}_1 + (\beta + 2x_1 + x_2)\mathbf{a}_2 = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$$

Astfel pentru orice $\mathbf{x}_3$ şi $\mathbf{x}_4$, $\mathbf{x}$ este o soluţie a lui $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, dacă $x_1 = \alpha - 3x_3 - 3x_4$ şi $x_2 = \beta + 2x_1 + x_2$. Faptul că soluţia nu este unică este o consecinţă a faptului că rangul lui $\mathbf{A}$ este mai mic ca numărul de coloane ale lui $\mathbf{A}$. Aceasta este de asemenea adevărat pentru soluţia generală a lui $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Soluţia generală pentru $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Presupunem condiţia de compatibilitate satisfăcută şi că rang $\mathbf{A} = r$. În acest caz, ecuaţia $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ poate fi totdeauna partiţionată astfel:

$$\begin{array}{c} r \text{ linii} \\ \\ m-r \text{ linii} \end{array}
\overset{\begin{array}{cc} r & n-r \\ \text{coloane} & \text{coloane} \end{array}}{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ & \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}}
\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} \tag{43}$$

Se determină în primul rînd rangul r prin găsirea submatricei de cel mai mare ordin al cărei determinant este diferit de zero. Se rearanjează apoi ecuaţiile, astfel încît primele r linii şi coloane să aibă determinantul diferit de zero, adică $\mathbf{A}_{11}$ este nesingular. Ecuaţiile pot fi scrise acum astfel:

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1 \tag{44a}$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2. \tag{44b}$$

44b) poate fi privită ca o relaţie suplimentară în care fiecare ecuaţie a ei este o combinaţie liniară a ecuaţiilor din (44a). Puteţi arăta acum că acesta este un efect al presupunerii că este satisfăcută condiţia de compatibilitate. În (44a) transferăm al doilea termen în dreapta şi multi-

plicăm ecuația cu $\mathbf{A}_{11}^{-1}$, care există deoarece $\mathbf{A}_{11}$ este nesingular. Rezultatul va fi

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_{11}^{-1}(\mathbf{y}_1 - \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2) \tag{45}$$

care este de fapt soluția. Vectorul $\mathbf{x}_1$ conține r elemente ale vectorului original $\mathbf{x}$; ele sînt exprimate aici în funcție de elementele lui $\mathbf{y}_1$ și a celor $m - r$ elemente rămase din $\mathbf{x}$.

Observăm că soluția (45) nu este unică dacă $n > r$. De fapt există $q = n - r$ variabile, elementele $\mathbf{x}_2$, care pot fi alese arbitrar. Acest număr q este numit *grad de degenerare* al matricei $\mathbf{A}$.

Pentru cazul special al ecuațiilor omogene, și anume cazul în care $\mathbf{y} = 0$, se va observa din (45) că există o soluție netrivială numai dacă gradul de degenerare este diferit de zero. Pentru un caz mai special cînd $m = n$ (adică, cînd $\mathbf{A}$ este o matrice pătrată), gradul de degenerare este diferit de zero și există o soluție netrivială numai dacă $\mathbf{A}$ este singular.

Pentru ilustrare, considerăm următorul sistem de ecuații :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Observăm că primele patru linii și coloanele 2, 4, 6 și 8 ale lui $\mathbf{A}$ formează o matrice unitate (care este nesingulară) și astfel rang $\mathbf{A} \geqslant 4$. Observăm de asemenea că linia 5 este egală cu negativa sumei primelor 4 linii. Astfel că liniile lui $\mathbf{A}$ nu sînt liniar-independente și rang $\mathbf{A} < 5$. Deoarece $4 \leqslant$ rang $\mathbf{A} < 5$, se determină că rang $\mathbf{A} = 4$. În mod asemănător se găsește că rang $[\mathbf{A}\ \mathbf{y}] = 4$. Rezultă că condiția de compatibilitate este satisfăcută. Putem acum rearanja coloanele și face următoarea partiționare în submatrice a matricelor.

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hdashline -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_8 \\ \cdots \\ x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \cdots \\ -10 \end{bmatrix}$$

Matricea a fost *partiționată* în forma (43) cu $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{U}$, o matrice unitate. Ultimul rînd al matricei este eliminat, și ceea ce a rămas este scris acum astfel:

$$\mathbf{U}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

Deoarece inversa lui **U** este tot **U**, soluția este obținută direct. În formă scalară, aceasta este

$$x_2 = 1 + x_1 - x_3$$

$$x_4 = 2 + x_3 - x_5$$

$$x_6 = 3 - x_5 - x_7$$

$$x_8 = 4 + x_7$$

Pentru fiecare set de valori pentru x_1, x_3, x_5 și x_7 va exista un set de valori pentru x_2, x_4, x_6 și x_8. Într-o problemă fizică, formarea setului de variabile poate să nu fie arbitrară; ele trebuiesc deseori alese să satisfacă unele condiții ale problemei.

Ecuație caracteristică

O ecuație algebrică care apare deseori în analiza rețelelor este

$$\lambda \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{46}$$

unde **A** este o matrice pătrată de ordinul n. Problema, cunoscută ca problema *valorii proprii*, este să se găsească scalarii λ și vectorii **x** care satisfac această ecuație. O valoare a lui λ, pentru care există o soluție netrivială a lui **x**, este numită o *valoare proprie*, sau *valoare caracteristică* a lui **A**. Vectorul **x** corespunzător este numit un *vector propriu* sau un *vector caracteristic* al lui **A**.

Să scriem (46) astfel:

$$(\lambda \mathbf{U} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{47}$$

Aceasta este o ecuaţie omogenă despre care ştim că are o soluţie netrivială numai dacă $\lambda\mathbf{U} - \mathbf{A}$ este singulară sau altfel spus

$$\det(\lambda\mathbf{U} - \mathbf{A}) = 0 \tag{48}$$

Determinantul din partea stîngă este un polinom de gradul n în λ şi este cunoscut ca *polinomul caracteristic* al lui **A**. Ecuaţia în sine este cunoscută ca *ecuaţie caracteristică* asociată lui **A**. Pentru fiecare valoare a lui λ care satisface ecuaţia caracteristică, se poate găsi o soluţie netrivială a lui (47) cu metodele din subparagraful precedent.

Pentru a ilustra această idee, considerăm matricea 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Polinomul caracteristic este

$$\det \begin{bmatrix} \lambda-5 & -1 \\ 2 & \lambda-2 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 4).$$

Soluţiile ecuaţiei caracteristice $(\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0$ sînt valorile 3 şi 4, care sînt deci valori proprii ale lui **A**. Pentru a obţine vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 3$, rezolvăm (47) folosind matricea dată **A** şi $\lambda = 3$. Astfel

$$\left\{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rezultatul este

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \end{bmatrix},$$

pentru orice valoare a lui x_1. Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 4$ este obţinut în mod similar.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

din care

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}$$

pentru orice valoare a lui x_1.

Similitudine

Spunem că două matrice pătrate **A** și **B** de același ordin sînt *similare* dacă există o matrice nesingulară S astfel ca

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{B} \tag{49}$$

Matricea **B** este numită *transformata de similaritate* a lui **A** prin S, iar **A** este transformata de similaritate a lui **B** prin S^{-1}.

Motivul pentru care similaritatea matricelor este un concept important, este faptul că matrice similare au determinanți egali, aceleași polinoame caracteristice, și deci aceleași valori proprii. Acestea sînt ușor de verificat. Astfel, prin aplicarea regulilor cunoscute pentru determinanți la un produs de matrice pătrate, determinanții sînt egali, deoarece

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}| = |\mathbf{S}^{-1}|\,|\mathbf{A}|\,|\mathbf{S}| = |\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}|\,|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|$$

Polinoamele caracteristice sînt egale deoarece

$$\begin{aligned} |\lambda\mathbf{U} - \mathbf{B}| &= |\lambda\mathbf{U} - \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}| = |\mathbf{S}^{-1}(\lambda\mathbf{U} - \mathbf{A})\mathbf{S}| \\ &= |\mathbf{S}^{-1}|\,|\lambda\mathbf{U} - \mathbf{A}|\,|\mathbf{S}| = |\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}|\,|\lambda\mathbf{U} - \mathbf{A}| \\ &= |\lambda\mathbf{U} - \mathbf{A}|. \end{aligned}$$

Dacă valorile proprii ale unei matrice sînt zerourile polinomului său caracteristic, și dacă **A** și **B** au aceleași polinoame caracteristice, valorile lor proprii trebuie să fie egale.

O relație de similaritate specială este similaritatea lui **A** la o matrice diagonală.

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & \bigcirc & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & \bigcirc & & & \lambda_{n-1} & \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Dacă **A** și **Λ** sînt similare, atunci elementele diagonalei lui **Λ** sînt valori proprii pentru **A**. Aceasta rezultă din faptul că **A** și **Λ** au aceleași valori

proprii, şi, aşa cum se poate uşor arăta, valorile proprii ale lui $\mathbf{\Lambda}$ sînt elementele diagonalei ei.

În continuare vom arăta că $\mathbf{A}$ *este similara unei matrice diagonale* $\mathbf{\Lambda}$, *dacă şi numai dacă* $\mathbf{A}$ *are n vectori proprii liniar-independenți.* Să presupunem pentru început că $\mathbf{A}$ este similar cu $\mathbf{\Lambda}$. Aceasta înseamnă că $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ sau, ceeace este echivalent cu:

$$\mathbf{S}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}\mathbf{S} \tag{50}$$

Partiționăm acum S după coloane; adică, $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \ldots, \mathbf{S}_n]$, unde $\mathbf{S}_i$ sînt vectori coloană ai lui S. Egalînd coloana j a lui $\mathbf{AS}$ cu coloana j a lui $\mathbf{S\Lambda}$, în concordanță cu (50), obținem

$$\lambda_j \mathbf{S}_j = \mathbf{A}\mathbf{S}_j \tag{51}$$

Din compararea cu (46), vedem că $\mathbf{S}_j$ este vectorul propriu corespunzător lui λ_j. Dacă $\mathbf{A}$ este similar cu Λ, S este nesingular, şi vectorii săi coloană (vectori proprii ai lui $\mathbf{A}$) sînt liniar-independenți. Aceasta stabileşte necesitatea.

Să presupunem acum că $\mathbf{A}$ are n vectori proprii liniar-independenți. În conformitate cu (50), matricea S satisface relația $\mathbf{S\Lambda} = \mathbf{AS}$. Deoarece n vectori proprii ai lui $\mathbf{A}$ (vectori coloană ai lui S) sînt liniar independenți, S este nesingular, şi $\mathbf{S\Lambda} = \mathbf{AS}$ implică $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$. Rezultă că $\mathbf{\Lambda}$ este similar cu $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{A}$ este similar cu $\mathbf{\Lambda}$.

Am arătat deci că dacă matricea pătrată S, care are vectorii proprii ai lui $\mathbf{A}$ ca vectori coloană pentru ea, este nesingulară, atunci $\mathbf{A}$ este similara matricei diagonale $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$.

Exemplu

Ca exemplu, se consideră matricea dată mai sus

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Am găsit că valorile proprii ale acesteia sînt $\lambda_1 = 3$ şi $\lambda_2 = 4$, şi că, pentru s_{11} şi s_{12} arbitrare şi diferite de zero,

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} s_{11} \\ -2s_{11} \end{bmatrix} \text{ şi } \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} s_{12} \\ -s_{12} \end{bmatrix}$$

sînt vectorii proprii corespunzători. Fie $s_{11} = s_{12} = 1$; atunci

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

şi deci

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se obţine

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \Lambda$$

Procedura de a găsi o matrice S astfel ca să fie similară cu Λ necesită construirea unei matrice ajutătoare care să aibă vectorii proprii ai lui **A** ca coloane. Dacă această matrice este nesingulară, atunci ea este S şi deci S există. Deseori este necesar să ştim că S există, fără însă a o determina. Această problemă este rezolvată de următoarea teoremă: n vectori proprii ai lui **A** sînt distincţi şi, deci, S există, dacă:

1. *Valorile proprii ale lui* **A** *sînt distincte.*
2. **A** *este simetrică sau hermitică* [1]).

Inegalitatea lui Sylvester

Considerăm produsul matriceal **PQ**, unde **P** este o matrice de ordinul $m \times n$ şi rang r_P şi unde **Q** este o matrice de ordin $n \times k$ şi rang r_Q. Fie r_{PQ} notaţia rangului matricei produsului. Inegalitatea Sylvester este o relaţie între r_P, r_Q şi r_{PQ} şi anume

$$r_P + r_Q - n \leqslant r_{PQ} \leqslant \min\{r_P,\ r_Q\}. \tag{52}$$

Menţionăm că n este numărul de coloane ale primei matrice din produs sau numărul de linii din a doua.

Ca un caz special, presupunem că **P** şi **Q** sînt matrice pătrate nesingulare de ordin n. Atunci $r_P = r_Q = n$, şi din inegalitatea lui Sylvester, $n \leqslant r_{PQ} \leqslant n$ sau $r_{PQ} = n$. Acest lucru era cunoscut deoarece $|\mathbf{PQ}| = |\mathbf{P}|\ |\mathbf{Q}| \neq 0$, dacă $|\mathbf{P}| \neq 0$ şi $|\mathbf{Q}| \neq 0$. Ca un alt caz special, presupunem $\mathbf{PQ} = 0$. În acest caz $r_{PQ} = 0$ şi din inegalitatea Sylvester se obţine $r_P + r_Q \leqslant n$.

---

[1]) Demonstraţia poate fi găsită în R. Bellman. „*Introduction to Matrix Analysis*" McGraw-Hill Book Co, Inc., New York, 1960, Chs. 3 and 4.

O demonstraţie a inegalităţii lui Sylvester necesită o înţelegere a unor concepte de bază asociate cu spaţii vectoriale finite dimensional. Topica este în afara scopului acestui text şi nu ne propunem a da demonstraţia. Pentru o astfel de demonstraţie se poate consulta F. R. Ganthmacher „*The Theory of Matrices*", Vol. I, Chelsea Publishing Co, New York, 1959.

Norma unui vector

Una din proprietățile unui spațiu vectorial este lungimea sa. Lungimea unui vector nu are o interpretare geometrică. Cu toate acestea, lungimea unui vector este un concept util, pe care îl vom discuta acum.

Definim *norma* unui n-vector $\mathbf{x}$ ca un număr nenegativ $\|\mathbf{x}\|$ care are următoarele proprietăți:

1. $\|\mathbf{x}\| = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = 0$.
2. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|$, unde α este un număr real sau complex.
3. $\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\| \leqslant \|\mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_2\|$, unde $\mathbf{x}_1$ și $\mathbf{x}_2$ sînt doi n-vectori.

Un vector poate fi caracterizat de norme diferite care să satisfacă aceste proprietăți.

Cea mai familiară normă este norma Euclidiană definită de

$$\|\mathbf{x}\|_2 = (\mathbf{x}^*\mathbf{x})^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{53}$$

Aceasta este rădăcina pătrată a sumei pătratelor componentelor vectorului. Norma Euclidiană este utilă cînd se face referire la lungimea unui vector; totuși, există alte norme cu care se lucrează mult mai ușor în calculele numerice. O astfel de normă este

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|; \tag{54}$$

care este suma amplitudinilor componentelor vectorului. Ea poate fi numită norma *sumei amplitudinilor*. O altă normă este:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|; \tag{55}$$

care este, amplitudinea componentei care are cea mai mare amplitudine. Este ușor de arătat că $\|\mathbf{x}\|_2$ $\|\mathbf{x}\|_1$ și $\|\mathbf{x}\|_\infty$ satisfac fiecare proprietățile unei norme.

Faptul că fiecare din aceste norme este o măsură a lungimii vectorului se poate dovedi cu ajutorul unor observații. Dacă oricare din aceste norme este diferită de zero, celelalte două sînt diferite de zero. Dacă una din acestea are limita zero, aceeași limită vor avea și celelalte.

O matrice este adesea privită ca o *transformare*. Dacă $\mathbf{A}$ este o matrice de ordinul $m \times n$ și $\mathbf{x}$ un n-vector, atunci considerăm pe $\mathbf{A}$ ca o matrice care transformă pe $\mathbf{x}$ în m-vectorul $\mathbf{Ax}$. Mai tîrziu va fi necesar să stabilim limitele normei vectorului $\mathbf{Ax}$; pentru a face aceasta, introducem noțiunea de normă a unei matrice.

Spunem că matricea **A** este mărginită dacă există o constantă reală, pozitivă K astfel ca

$$\|\mathbf{Ax}\| \leqslant K\|\mathbf{x}\| \tag{56}$$

pentru orice **x**. Cea mai mare limită inferioară a tuturor acestor K este numită norma lui **A** şi se notează cu $\|\mathbf{A}\|$. Este uşor de arătat că norma matricei are proprietăţile obişnuite ale unei norme; astfel:

1. $\|\mathbf{A}\| = 0$ dacă şi numai dacă $\mathbf{A} = \mathbf{0}$;
2. $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{A}\|$, unde α este un număr real sau complex; şi
3. $\|\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2\| \leqslant \|\mathbf{A}_1\| + \|\mathbf{A}_2\|$.

Este uşor de dedus că $\|\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\| \leqslant \|\mathbf{A}_1\|\,\|\mathbf{A}_2\|$.

Din definiţia celei mai mari limite inferioare, este clar că,

$$\|\mathbf{Ax}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{x}\|. \tag{57}$$

Este posibil să arătăm că există un vector pentru care (57) devine egalitate. Nu vom proceda în felul acesta în general, şi vom considera cazurile normei sumei amplitudinilor din (54), normei amplitudinii maxime din (55) şi normei euclidiene din (53).

Astfel, folosind norma sumei amplitudinilor din (54), obţinem

$$\|\mathbf{Ax}\|_1 = \sum_{i=1}^{m}\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\,|x_j|$$

$$\leqslant \left\{\max_j \sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right\}\sum_{j=1}^{n}|x_j| \leqslant \left\{\max_j \sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right\}\|\mathbf{x}\|_1. \tag{58}$$

Prima şi ultima etapă decurg din definiţia normei sumei amplitudinilor. A doua etapă este un rezultat al inegalităţii pentru numerele complexe. Presupunem că cea mai mare valoare a sumei amplitudinilor lui a_{ij} se obţine pentru coloana k; astfel, presupunem $\max_j \sum_{i=1}^{m}|a_{ij}| = \sum_{i=1}^{m}|a_{ik}|$. Atunci (58) este satisfăcută ca egalitate cînd $x_j = 0$ pentru $j \neq k$ şi $x_k = 1$. Rezultă

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|. \tag{59}$$

Prin urmare, norma sumei amplitudinilor unei matrice **A** este norma sumei vectorului coloană al lui **A** care are cea mai mare normă a sumei amplitudinilor.

În continuare vom folosi norma amplitudinii maxime din (55). Atunci

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty = \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_j|$$

$$\leqslant \left\{ \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\} \max_j |x_j| \leqslant \left\{ \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\} \|x_i\|_\infty. \tag{60}$$

Etapele prezentate aici sînt aceleași ca la norma precedentă, cu excepția faptului că se folosește norma amplitudinii maxime. Din nou presupunem că suma amplitudinilor lui a_{ij} este maximă pentru linia k; adică, presupunem $\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$. În acest caz (60) este satisfăcută ca egalitate cînd $x_j = \operatorname{sgn}(a_{kj})$. Funcția sgn y este egală cu $+1$ cînd y este pozitiv și -1 cînd y este negativ). Rezultă

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{61}$$

Norma amplitudinii maxime a unei matrice **A** este deci norma sumei amplitudinilor a acelui vector linie al lui **A** care are cea mai mare normă a sumei amplitudinilor.

În final, pentru norma euclidiană, deși nu demonstrăm aici, se poate arăta [1]) că

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 = (\mathbf{x}^*\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{x})^{1/2} \leqslant |\lambda_m|^{1/2} (\mathbf{x}^*\mathbf{x})^{1/2} = |\lambda_m|^{1/2}\|\mathbf{x}\| \tag{62}$$

unde λ_m este valoarea proprie a lui $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ care are amplitudinea cea mai mare. Se poate de asemenea arăta că există un vector $\mathbf{x}$ astfel încît (62) să fie o egalitate. Deci

$$\|\mathbf{A}\|_2 = |\lambda_m|^{1/2}. \tag{63}$$

Exemplu

Să presupunem $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, sau

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Din (59) norma sumei amplitudinilor lui **A** este

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max\{6, 5\} = 6.$$

[1]) Modalitatea de rezolvare a acesteia se poate găsi în cap. 7.

Din (61) norma amplitudinii maxime a lui **A** este

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\{2, 2, 7\} = 7.$$

Pentru norma euclidiană, găsim mai întîi

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 11 \\ 11 & 17 \end{bmatrix}$$

Ecuaţia caracteristică a lui $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ este

$$|\lambda\mathbf{U} - \mathbf{A}^*\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} \lambda-14 & -11 \\ -11 & \lambda-17 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 31\lambda + 117 = (\lambda - 26,64)(\lambda - 4,36).$$

Deci $\lambda_m = 26.64$ şi

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{26,64} = 5,18.$$

Cunoaştem, de asemenea, din substituirea normelor matricelor de mai sus în (57), că

$$(|y_1| + |y_2| + |y_3|) \leqslant 6(|x_1| + |x_2|)$$

$$\max(|y_1|, \ |y_2|, \ |y_3|) \leqslant 7 \max(|x_1|, \ |x_2|)$$

şi

$$(|y_1|^2 + |y_2|^2 + |y_3|^2)^{1/2} \leqslant 5,18(|x_1|^2 + |x_2|^2)^{1/2}$$

În acest paragraf, am făcut o scurtă prezentare a unor subiecte din teoria vastă a matricelor, fără a face demonstraţii. Unele demonstraţii sînt sugerate în probleme.

1.3. NOTAŢII ŞI SENSURI CONVENŢIONALE

Semnalele sau variabilele în termenii cărora este descrisă reţeaua electrică sînt tensiuni şi curenţi. Acestea sînt funcţii de timp (t) şi vor fi reprezentate consecvent prin simboluri litere mici $v(t)$ şi $i(t)$. Uneori dependenţa funcţiei de timp nu va fi arătată explicit, şi anume atunci cînd nu există posibilitatea de confuzie; astfel, v şi i vor fi folosiţi în loc de $v(t)$ şi $i(t)$.

Transformata Laplace a unei funcţii de timp va fi reprezentată prin litere mari corespunzătoare literelor mici care reprezintă funcţia de timp. Astfel, $I(s)$ este transformata Laplace a lui $i(t)$, unde s este variabila frecvenţa complexă, $s = \sigma + j\omega$. Uneori, dependenţa funcţională de s nu va fi arătată explicit, şi $I(s)$ va fi scris simplu I.

În teoria rețelelor s-au găsit legi fundamentale care exprimă relații între tensiunile și curenții unei rețele. Înainte de a formula aceste legi este necesar să stabilim un sistem de corelare a sensurilor cu mărimile asociate lui i și v. Aceasta este făcută prin stabilirea unei referințe pentru fiecare tensiune și curent. Funcțiile $i(t)$ și $v(t)$ sînt funcții reale de timp care pot lua valori negative sau pozitive în cursul timpului. Sistemul de referință adoptat în această carte este arătat în fig. 1.1.

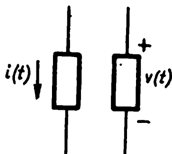


Fig. 1.1. Referințe de curent și tensiune.

O săgeată indică sensul de referință pentru curentul dintr-o latură. Aceasta nu înseamnă că totdeauna curentul parcurge latura în sensul săgeții. Ea trebuie interpretată astfel: ori de cîte ori sensul curentului coincide cu sensul săgeții, $i(t)$ va fi pozitiv. Similar, semnele plus și minus la capetele unei laturi sînt referințele de tensiune pentru latură. Ori de cîte ori polaritatea tensiunii coincide cu sensul indicat de referință, $v(t)$ va fi pozitiv. Simbolul pentru referința de tensiune poate fi simplificat, deoarece indicarea numai a semnului plus va implica de asemenea semnul minus. Ori de cîte ori nu este posibilă o confuzie, semnul minus poate fi omis din referință.

Pentru o latură dată, sensul ales ca referință de curent și polaritatea aleasă ca referință de tensiune sînt arbitrare. Oricare din cele

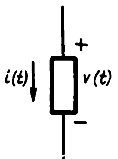


Fig. 1.2. Referințe standard.

două posibilități poate fi aleasă ca referință de curent și oricare din cele două posibilități poate fi aleasă ca referință de tensiune. Mai mult, referința de curent este independentă de referința pentru tensiune. Totuși, adeseori este convenabil să alegem aceste două referințe așa cum este arătat în fig. 1.2. Astfel, cu săgeata curentului de referință trasată de-a lungul laturii, dacă plusul tensiunii de referință este la nodul în care intră curentul de referință, rezultatul este numit *referința standard*. Dacă

ne propunem folosirea referinței standard, atunci este necesar să arătăm numai una din referințe; cealaltă va fi implicată. Trebuie să precizăm că alegerea referinței standard nu este o necesitate, ci numai o convenție.

1.4. CLASIFICAREA REȚELELOR (CIRCUITELOR)

Este posibil să ajungem la o clasificare a rețelelor pe una din două căi. O posibilitate este să specificăm felul elementelor din care este compusă rețeaua și, pe baza proprietăților lor, să ajungem la unele generalizări cu privire la rețea privită ca un întreg. Astfel, dacă valorile tuturor elementelor unei rețele sînt constante și nu se modifică în timp, rețeaua privită ca un întreg poate fi clasificată ca o rețea *invariantă în timp*.

O altă cale este de a ne îndrepta atenția asupra punctelor de acces ale rețelei și să clasificăm rețeaua după proprietățile generale ale răspunsurilor lor la excitațiile aplicate în aceste puncte. În acest capitol vom examina a doua cale.

Liniaritate

Fie excitația aplicată la o rețea, care nu are energie înmagazinată inițial, notată cu $e(t)$ și răspunsul rețelei $w(t)$. O rețea liniară este aceea în care răspunsul este proporțional cu excitația și principiul superpoziției este aplicabil. Mai precis, dacă răspunsul la o excitație $e_1(t)$ este $w_1(t)$ și răspunsul la o excitație $e_2(t)$, este $w_2(t)$, atunci rețeaua este liniară dacă răspunsul la excitația $k_1e_1(t) + k_2e_2(t)$ este $k_1w_1(t) + k_2w_2(t)$.

Această definiție scalară poate fi extinsă la forma matriceală pentru excitație și răspunsuri multiple. Vectorii excitație și răspuns $\mathbf{e}(t)$ și $\mathbf{w}(t)$ sînt definiți ca vectori coloană.

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} e_a(t) \\ e_b(t) \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ și } \quad \mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} w_a(t) \\ w_b(t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

unde e_a, e_b etc. sînt excitații la bornele a, b etc.; și w_a, w_b etc. sînt răspunsurile corespunzătoare. O rețea este liniară dacă vectorul excitație $k_1\mathbf{e}_1(t) + k_2\mathbf{e}_2(t)$ conduce la un vector răspuns $k_1\mathbf{w}_1(t) + k_2\mathbf{w}_2(t)$, unde $\mathbf{w}_i$ este vectorul răspuns la vectorul excitație $\mathbf{e}_i$.

Invarianţa în timp

O reţea care va produce acelaşi răspuns la o excitaţie dată, indiferent de momentul la care este aplicată, este ***invariantă în timp***. Astfel, dacă răspunsul la o excitaţie $e(t)$ este $w(t)$, atunci răspunsul unei reţele invariante în timp la o excitaţie $e(t + t_1)$ va fi $w(t + t_1)$. Această definiţie implică restricţia ca valorile elementelor reţelei să rămînă constante în timp.

Pasivitate

Unele reţele au proprietatea fie de a absorbi, fie de a înmagazina energie. Ele pot restitui energia înmagazinată unei reţele externe, dar niciodată nu vor putea furniza o cantitate de energie mai mare decît cea înmagazinată. Astfel de reţele sînt numite ***pasive***. Fie $E(t)$ energia eliberată unei reţele care are o pereche de terminale conectate la o sursă externă (pînă la momentul t). Tensiunea şi curentul la terminale, cu referinţe standard, sînt $v(t)$ şi $i(t)$. Puterea furnizată reţelei va fi $p(t) = v(t)i(t)$. Definim ***reţeaua pasivă***, reţeaua pentru care

$$E(t) = \int_{-\infty}^{t} v(x)i(x)\mathrm{d}x \geqslant 0 \tag{64}$$

sau

$$E(t) = \int_{t_0}^{t} v(x)i(x)\mathrm{d}x + E(t_0) \geqslant 0$$

Această inegalitate trebuie să fie adevărată pentru orice tensiune şi curentul rezultant, pentru orice t.

Orice reţea care nu satisface această condiţie este numită o ***reţea activă***; adică, $\int_{-\infty}^{t} v(x)i(x)\mathrm{d}x < 0$ pentru un timp t.

Dacă reţeaua are mai mult de o pereche de terminale prin care poate fi alimentată cu energie din exterior, să considerăm matricele tensiunilor şi curenţilor terminali a fi

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n(t) \end{bmatrix} \text{ şi } \mathbf{i}(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_n(t) \end{bmatrix}$$

cu referinţe standard. Puterea instantanee furnizată reţelei din exterior va fi atunci

$$p(t) = \sum_{j=1}^{n} v_j(t)i_j(t) = \mathbf{v}'(t)\mathbf{i}(t). \tag{65}$$

Reţeaua va fi pasivă dacă, pentru orice t,

$$E(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{v}'(x)\mathbf{i}(x)\mathrm{d}x \geqslant 0 \tag{66}$$

Reciprocitate

Unele reţele au proprietatea ca răspunsul produs într-un punct al reţelei de o excitaţie dintr-un alt punct, să fie invariant dacă poziţiile excitaţiei şi răspunsului sînt interschimbate (excitaţia şi răspunsul fiind interpretate corect). Se presupune că reţeaua din fig. 1.3*a* nu are energie înmagazinată iniţial; excitaţia este tensiunea $v_1(t)$ şi răspunsul este curentul $i_2(t)$ în scurtcircuit. În fig. 1.3*b*, excitaţia este aplicată la poarta 2 (iniţial în scurt circuit), şi răspunsul este curentul în scurt circuit la poarta 1 unde iniţial se aplicase excitaţia. Referinţele celor doi curenţi sînt aceleaşi relativ la acele ale tensiunilor. O reţea *reciprocă* este una în care, pentru orice pereche de puncte de excitaţie şi răspuns, aici notate cu 1 şi 2, $i_1 = i_2$ dacă $v_2 = v_1$. Dacă reţeaua nu satisface această condiţie, ea este *nereciprocă*.

Pînă la ultimul capitol al acestei cărţi sînt tratate reţelele liniare şi invariante în timp. Reţelele nu sînt limitate la reţele pasive sau reciproce. Ultimele tipuri de reţele au proprietăţi speciale, şi unele metode

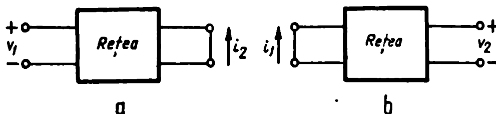


Fig. 1.3. Condiţia de reciprocitate.

pe care le vom discuta, sînt limitate la aceste reţele. Cînd discutăm metodele a căror aplicabilitate este limitată la reţele pasive sau reciproce, vom specifica acest lucru. Cînd această specificaţie nu este făcută, presupunem că metodele şi proprietăţile în discuţie sînt aplicabile în general, la reţele pasive şi active, reciproce şi nereciproce. Ultimul capitol al cărţii este destinat reţelelor liniare variabile în timp şi reţelelor neliniare.

1.5. ELEMENTELE DE REŢEA (CIRCUIT)

Să facem acum o clasificare a reţelelor în funcţie de tipurile de elemente pe care le includ. Vom considera că reţelele de care ne ocupăm sînt cu „elemente concentrate". Presupunem că toate efectele electrice sînt sesizate imediat de întreaga reţea. Cu această presupunere, neglijăm influenţa dimensiunilor într-un circuit fizic, şi presupunem că efectele electrice sînt concentrate în spaţiu şi nu distribuite.

În modelul de reţea, postulăm existenţa de elemente care sînt definite de relaţia dintre curenţi şi tensiuni. Există trei elemente de bază: rezistor, bobină şi condensator. Reprezentările lor grafice şi relaţiile tensiuni-curenţi sînt date în tabelul 1.1. Rezistorul este caracterizat prin parametrul rezistenţă R sau parametrul conductanţă G, unde $G = 1/R$.

Bobina este caracterizată prin parametrul inductanţă. Reciproca lui L nu are nume, dar este folosit uneori simbolul Γ (un L întors). Condensatorul este caracterizat de parametrul capacitate C. Reciproca lui C este cunoscută ca elastanţă, şi este folosit uneori simbolul D.

Tabelul 1.1

Element	Parametru	Relaţii tensiune-curent		
		Directe	Inverse	Simbol
Rezistenţă	Rezistenţa R Conductanţa G	$v = Ri$	$i = \frac{1}{R} v = Gv$	$i\downarrow$ R (+ v −)
Inductanţă	Inductanţa L Inversa inductanţei Γ	$v = L \frac{di}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(x)\,dx + i(0)$	$i\downarrow$ L (+ v −)
Capacitate	Capacitatea C Elastanţa D	$i = C \frac{dv}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(x)\,dx + v(0)$	$i\downarrow$ C (+ v −)

În legătură cu aceste elemente se pot face o serie de observaţii. În primul rînd, relaţiile $v-i$ ($v = Ri$, $v = L\,di/dt$, şi $i = C\,dv/dt$) satisfac condiţia de liniaritate, presupunînd că i şi v joacă rolul excitaţiei şi răspunsului. Astfel reţelele cu elemente R, L şi C sînt liniare. În al doilea rînd, parametrii R, L şi C sînt constanţi, astfel că reţeaua cu R, L şi C va fi invariantă în timp. În al treilea rînd, presupunînd referinţe

standard, energia furnizată fiecărui element, considerînd că tensiunile şi curenţii iniţiali sînt zero, va fi

$$E_R(t) = \int_{-\infty}^{t} R\,i^2(x)\,\mathrm{d}x \tag{67}$$

$$E_L(t) = \int_{-\infty}^{t} L\,\frac{\mathrm{d}i(x)}{\mathrm{d}x}\,i(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{i(t)} Li'\,\mathrm{d}i' = \tfrac{1}{2}\,Li^2(t) \tag{68}$$

$$E_C(t) = \int_{-\infty}^{t} C\,\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\,v(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{v(t)} Cv'\,\mathrm{d}v' = \tfrac{1}{2}\,C\,v^2(t). \tag{69}$$

Fiecare din părţile din dreapta sînt ne-negative pentru orice t. Deci reţelele R, L, C sînt *pasive*. Reţelele R, L, C sînt *reciproce*. Demonstraţia acestei afirmaţii se va face mai tîrziu.

Se observă din tabelul 1.1 că relaţiile $v - i$ inverse pentru inductanţă şi capacitate sînt scrise ca integrale definite. Adesea această relaţie inversă este scrisă ca o integrală nedefinită (sau primitivă) în loc de o integrală definită. O astfel de expresie este incompletă dacă nu se adaugă la ea valorile iniţiale $i(0)$ sau $v(0)$. O situaţie des întîlnită este aceea ca tensiunea $v(t)$ şi curentul $i(t)$ să fie exprimate ca funcţii explicite, ca de exemplu $\varepsilon^{-\alpha t}$, $\sin \omega t$ etc., caz în care primitiva este unică şi anume: $-(1/\alpha)\,\varepsilon^{-\alpha t}$, $-(1/\omega)\cos \omega t$ etc. În multe cazuri, însă, tensiunea sau curentul nu pot fi exprimate într-o formă simplă pentru orice t;

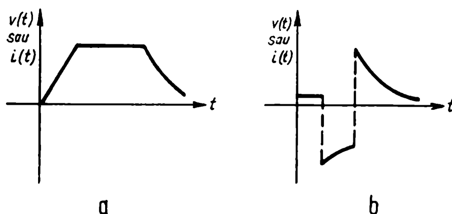


Fig. 1.4. Forma de undă a semnalului.

expresia analitică a lui $v(t)$ sau $i(t)$ poate depinde de un anumit interval al axei timpului. Cîteva astfel de forme de undă sînt arătate în fig. 1.4.

Originea timpului t este arbitrară; ea este de obicei aleasă să coincidă cu o situaţie particulară, ca deschiderea sau închiderea unui contact. În plus, în integrala definită de la 0 la t, expresia pentru tensiunea pe

condensator, $v(t) = (1/C)\int_0^t i(x)\,dx + v(0)$, conţine valoarea iniţială $v(0)$. Aceasta poate fi considerată ca o sursă de tensiune în curent continuu (sursele vor fi discutate mai tîrziu) în serie cu un condensator iniţial relaxat (fără tensiune iniţială) aşa cum se arată în fig. 1.5. Similar, pentru inductor $i(t) = (1/L)\int_0^t v(x)\,dx + i(0)$, unde $i(0)$ este valoarea iniţială

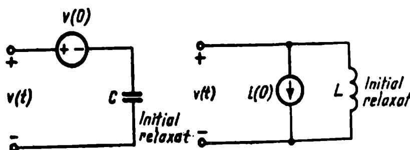


Fig. 1.5. Valori iniţiale ca surse.

a curentului. Aceasta poate fi considerată ca o sursă de curent continuu în paralel cu un inductor iniţial relaxat, aşa cum se arată în fig. 1.5. Dacă aceste surse sînt arătate explicit, ele vor include toate valorile iniţiale iar toate condensatoarele şi inductoarele pot fi considerate iniţial relaxate. Sursele corespunzătoare valorilor iniţiale pot fi utile pentru unele metode de analiză, dar pentru altele nu sînt indicate, ca de exemplu pentru formularea cu ecuaţii de stare.

Transformatorul

Elementele R, L şi C au fiecare cîte două terminale; alte componente au mai mult de două terminale. Următorul element pe care îl vom introduce este *transformatorul ideal* arătat în fig. 1.6. El are două perechi de terminale şi este definit de următoarele relaţii $v - i$,

$$v_1 = nv_2. \tag{70a}$$

$$i_2 = -ni_1 \tag{70 b}$$

sau

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \tag{70c}$$

Transformatorul ideal este caracterizat de un singur parametru n numit *raport de transformare*. Transformatorul ideal este o abstractizare făcută asupra bobinelor cuplate. Relațiile $v - i$ sînt relații idealizate care exprimă legea lui Faraday, respectiv legea lui Ampere. Sensul in aceste ecuații respectă referințele alese. Dacă o referință oarecare este modificată, semnul corespondent se va modifica.

Transformatorul ideal terminat pe o rezistență R la una din porți, prezintă la cealaltă poartă o rezistență R înmulțită cu raportul de transformare

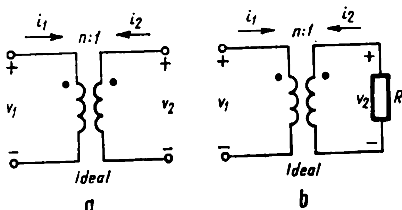


Fig. 1.6. Un transformator ideal.

la pătrat. Astfel în fig. 1.6*b*, $v_2 = -Ri_2$. Folosind această relație în (70) se obține :

$$v_1 = nv_2 = -nRi_2 = (n^2R)i_1. \quad (71)$$

Se constată că rezistența echivalentă văzută la terminalele de intrare, este n^2R.

Se observă că energia totală absorbită de transformatorul ideal este

$$E(t) = \int_{-\infty}^{t} [v_1(x)i_1(x) + v_2(x)i_2(x)]\,\mathrm{d}x = 0 \quad (72)$$

Această relație este ușor verificată dacă folosim relațiile (70) în (72). Rezultă că acest element este pasiv; el transmite, fără a înmagazina sau disipa energie.

Un model al transformatorului real este arătat în fig. 1.7. Reprezentarea este aproape aceeași, cu excepția faptului că în reprezentarea transformatorului ideal raportul de transformare este arătat direct pe figură.

Transformatorul este caracterizat de următoarele relaţii $v - i$, pentru referinţele arătate în fig. 1.7:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \tag{73a}$$

şi

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}. \tag{73b}$$

Transformatorul este deci caracterizat prin trei parametri: două inductanţe proprii L_1 şi L_2, şi inductanţa mutuală M.

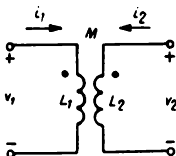


Fig. 1.7. Un transformator.

Energia totală furnizată transformatorului de surse exterioare este

$$E(t) = \int_{-\infty}^{t} [v_1(x)\, i_1(x) + v_2(x)\, i_2(x)]\, dx =$$

$$= \int_0^{i_1} L_1 i_1' di_1' + \int_0^{i_1 i_2} M d(i_1' i_2') + \int_0^{i_2} L_2 i_2' di_2' = \tag{74}$$

$$= \tfrac{1}{2} (L_1 i_1^2 + 2M i_1 i_2 + L_2 i_2^2)$$

Noţiuni fundamentale. Este uşor de arătat [1]) că ultima linie din (74) va fi ne-negativă dacă

$$\frac{M^2}{L_1 L_2} = k^2 \leqslant 1. \tag{75}$$

[1]) O metodă simplă este să observăm (cu $L_1 L_2$ şi M toate ne-negative) că $L_1 i_1^2 + 2M i_1 i_2 + L_2 i_2^2$ poate deveni negativ numai dacă i_1 şi i_2 au semne opuse. Fie $i_2 = - x_1$, cu x orice număr real pozitiv. Cantitatea care ne interesează devine $L_1 - 2Mx + L_2 x^2$. Dacă valoarea minimă a acestei relaţii este ne-negativă, atunci cantitatea va fi ne-negativă pentru orice valoare a lui x. Diferenţiem relaţia patratică în raport cu x şi găsim valoarea minimă; ea va fi $L_1 - M^2/L_2$, şi poate servi la obţinerea rezultatului dorit.

Deoarece considerații fizice cer ca transformatorul să fie pasiv, această condiție trebuie respectată. Cantitatea k este numită *coeficient de cuplare.* Valoarea lui maximă este unu.

Un transformator pentru care coeficientul de cuplare ia valoarea maximă $k = 1$ este numit un *transformator perfect*, sau *cu cuplaj perfect.* Un transformator perfect nu este acelaşi lucru cu un transformator ideal. Pentru a găsi diferenţa, vom considera ecuaţia transformatorului (73) şi includem în ea condiţia transformatorului perfect $M = \sqrt{L_1 L_2}$; apoi considerăm raportul v_1/v_2. Rezultatul va fi

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{L_1 \frac{di_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2}\frac{di_2}{dt}}{\sqrt{L_1 L_2}\frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}} = \sqrt{L_1/L_2}. \tag{76}$$

Această expresie este identică cu $v_1 = nv_2$ pentru transformatorul ideal[1]) dacă

$$n = \sqrt{L_1/L_2}. \tag{77}$$

Să considerăm acum raportul între curenţi. Deoarece (73) include derivatele curentului, va fi necesar să integrăm aceste expresii.Rezultatul includerii condiţiei transformatorului perfect $M = \sqrt{L_1 L_2}$, a valorii $n = \sqrt{L_1/L_2}$ şi al integrării lui (73) de la 0 la t, va fi, după o rearanjare a termenilor,

$$i_1(t) = -\frac{1}{n} i_2(t) + \left\{\frac{1}{L_1}\int_0^t v_1(x)\,dx + \left[i_1(0) + \frac{1}{n} i_2(0)\right]\right\}. \tag{78}$$

Forma expresiei din paranteză sugerează ecuaţia $v - i$ pentru un inductor. Reprezentarea din fig. 1.8. satisface relaţiile (78) şi (76).
Ea arată ce relaţie există între un transformator perfect şi un transformator ideal. Dacă, într-un transformator perfect L_1 şi L_2 pot fi făcute să tindă către infinit, dar în aşa fel încît raportul lor să rămînă constant, rezultatul va fi un transformator ideal.

---

[1]) Deoarece, pentru bobinele reale, inductanţa este aproximativ proporţională cu patratul numărului de spire ale bobinei, expresia $\sqrt{L_1/L_2}$ este egală cu raportul dintre numărul de spire din primar şi cel din secundar ale unui transformator. Aceasta este originea expresiei „raportul numerelor de spire" pentru n.

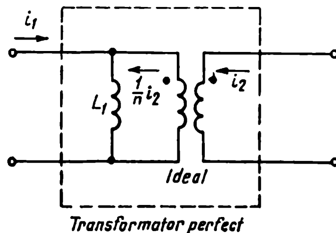


Fig. 1.8. Relaţii între un transformator perfect şi unul ideal.

Giratorul

O altă componentă care are două perechi de terminale este giratorul, a cărei reprezentare simbolică este arătată în fig. 1.9. El este definit de următoarele relaţii $v - i$:

Pentru fig. 1.9a

$$\begin{aligned} v_1 &= -ri_2 \\ v_2 &= ri_1 \end{aligned} \quad \text{sau} \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}. \tag{79a}$$

Pentru fig. 1.9b

$$\begin{aligned} v_1 &= ri_2 \\ v_2 &= -ri_1 \end{aligned} \quad \text{sau} \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \tag{79b}$$

Giratorul, ca şi transformatorul ideal, este caracterizat de un singur parametru r, numit *rezistenţa de giraţie*. Săgeata spre dreapta sau stînga, din fig. 1.9, indică *sensul de giraţie*.

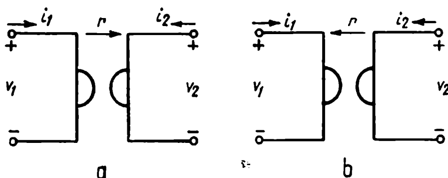


Fig. 1.9. Un girator.

Giratorul este un element ipotetic care a fost introdus pentru a putea lua în considerare situațiile fizice în care nu este îndeplinită condiția de reciprocitate. Într-adevăr, dacă aplicăm mai întîi o tensiune $v_1 = v$ și măsurăm curentul i_2 cu poarta 2 în scurtcircuit, și după aceea aplicăm o tensiune $v_2 = v$ și măsurăm curentul i_1 cu poarta 1 în scurtcircuit, vom găsi că $-i_2 = i_1$. Rezultă că giratorul nu este un element reciproc. De fapt el este nereciproc.

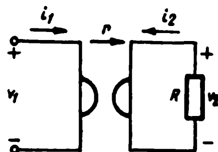


Fig. 1.10. Girator terminat pe o rezistență R.

Pe de altă parte, energia totală absorbită de girator este

$$E(t) = \int_{-\infty}^{t} (v_1 i_1 + v_2 i_2)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{t} [(-ri_2)\,i_1 + (ri_1)\,i_2]\,\mathrm{d}x = 0. \tag{80}$$

Rezultă că el este un element pasiv care nu înmagazinează și nu disipă energie. Din acest punct de vedere el este similar unui transformator ideal.

În cazul transformatorului ideal, am stabilit că rezistența la o pereche de terminale, cînd cealaltă pereche este terminată cu o rezistență R, este n^2R. Transformatorul ideal realizează o conversiune a rezistenței printr-un factor n^2. Ce face giratorul într-o situație asemănătoare? Dacă un girator este terminat cu o rezistență R (fig. 1.10), tensiunea și curentul la ieșire respectă relația $v_2 = -Ri_2$. Ținînd seamă de această relație în relațiile $v - i$ care caracterizează giratorul, se obține

$$v_1 = -ri_2 = -r\left(-\frac{v_2}{R}\right) = r\left(\frac{ri_1}{R}\right) = (r^2G)i_1. \tag{81}$$

Rezultă că rezistența echivalentă la terminalele de intrare este egală cu r^2 înmulțit cu conductanța terminației de la bornele de ieșire. Giratorul are deci proprietatea de *inversiune*.

Proprietatea de inversiune asigură obținerea de rezultate deosebite atunci cînd giratorul este terminat cu o capacitate sau o inductanță; de exemplu, presupunem un girator terminat cu o capacitate, așa cum

se arată în fig. 1.11. Ştim că $i_2 = - C\mathrm{d}v_2/\mathrm{d}t$. Din relaţiile $v - i$ asociate giratorului, obţinem

$$v_1 = - ri_2 = - r\left(- C\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}\right) = rC\frac{\mathrm{d}(ri_1)}{\mathrm{d}t} = r^2C\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}. \quad (82)$$

Rezultă că la terminalele de intrare, relaţia $v - i$ este aceea a unei inductanţe, cu inductanţa r^2C. Într-o manieră similară se poate arăta

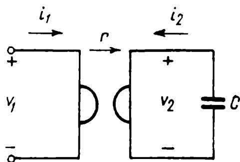


Fig 1.11. Girator terminat pe o capacitate C.

că relaţia $v - i$ la bornele de intrare ale unui girator terminat cu o inductanţă este a unei capacităţi.

Surse independente

Toate elementele introduse pînă acum au fost pasive. Sînt necesare şi alte componente ale reţelei pentru a putea lua în considerare posibilitatea de a genera tensiune, curent sau putere.

Se definesc două tipuri de surse.

1. O *sursă de tensiune* este un element cu două terminale a cărei tensiune este în orice moment de timp independentă de curentul prin terminalele ei. Nu are importanţă ce reţea este conectată la terminalele sursei de tensiune, tensiunea ei îşi menţine amplitudinea şi forma de undă. (Nu are sens să scurtcircuităm terminalele unei surse de tensiune, deoarece aceasta conduce la două cerinţe contradictorii la terminale.) Curentul în sursă va fi determinat de această reţea. Reprezentarea este arătată în fig. 1.12*a*.

2. O *sursă de curent* este un element cu două terminale al cărui curent, la orice moment de timp, este independent de tensiunea la bornele sale. Nu are importanţă ce reţea este conectată la terminalele unei surse de curent, curentul îşi va menţine amplitudinea şi forma de undă. (Nu are sens să lăsăm sursa de curent în gol, deoarece aceasta ne conduce la cerinţe contradictorii la terminale). Tensiunea care apare la bornele sursei este determinată de această reţea. Reprezentare este arătată în fig. 1.12*b*.

Fiecare din noi este obişnuit cu diminuarea luminii acasă, cînd un număr mare de aparate electrice se conectează la rețea, şi ştie că tensiunea unei surse fizice variază cu sarcina. De asemenea, într-o sursă fizică reală, tensiunea şi curentul generate pot depinde de unele cantități neelectrice, ca de exemplu viteza unei maşini rotative, sau concentrația acidului unei baterii, sau intensitatea luminoasă a unei celule fotoelectrice. Aceste relații nu sînt interesante în analiza rețelelor, deoarece nu

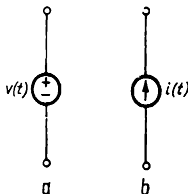


Fig 1.12. Surse de tensiune şi curent.

ne interesează funcționarea internă a surselor ci numai comportarea la terminalele lor. Sursele astfel idealizate nu ne dau informații despre dependența tensiunii sau curentului de cantitățile neelectrice; ele sînt numite *surse independente.*

Surse comandate sau dependente

Sursele independente nu includ dispozitivele care realizează o amplificare a semnalelor. Este necesar deci să se introducă o altă clasă de elemente: aceste elemente sînt numite surse *comandate* sau *dependente.* O *sursă de tensiune comandată* este o sursă a cărei tensiune la terminale este o funcție de altă tensiune sau curent. O *sursă de curent comandată* este definită analog. În tabelul 1.2 sînt arătate patru posibilități. Aceste elemente au două perechi de terminale: — o pereche fiind destinată cantității comandate; cealaltă, cantității care comandă. În fiecare din situațiile prezentate în tabelul 1.2, curentul sau tensiunea comandată este direct proporțională cu cantitatea care comandă, tensiune sau curent. Acesta este cel mai simplu tip de dependență; este posibil să introducem o sursă dependentă, a cărei tensiune sau curent este proporțională cu derivata unei alte tensiuni sau curent. Totuşi, noi nu vom discuta în detaliu niciun alt tip de dependență.

Comportarea tuburilor cu vid şi a tranzistoarelor poate fi aproximată de un model care constă în interconectarea surselor dependente şi a altor elemente de rețea, cu precizarea că acesta este valabil în domenii

Tabelul 1.2.

Componentă de reţea	Simbol	Relaţie tensiune-curent
Sursă de tensiune comandată de tensinue		$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$ (g hibridă)
Sursă de tensiune comandată de curent		$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$ (impedanţă)
Sursă de curent comandată de tensiune		$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ (admitanţă)
Sursă de curent comandată de curent		$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ (h hibridă)

limitate, certe, de tensiune şi curent. În fig. 1.13 sînt arătate două astfel de modele. Aceste modele nu reprezintă elementele fizice în orice condiţii de funcţionare; de exemplu, la frecvenţe suficient de mari e necesar să introducem în modelul tubului, capacităţile dintre electrozi.

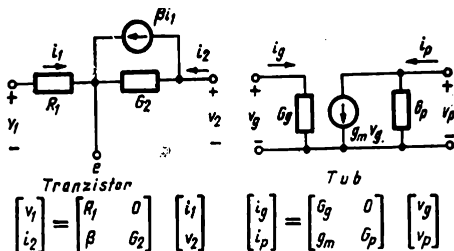


Fig. 1.13. Modele de tranzistor şi triodă.

Ultima problemă care apare este următoarea. Cînd un inginer doreşte să facă un calcul al tensiunilor şi curenţilor unei reţele obţinută prin interconectarea de elemente electrice diferite, trebuie ca în primul rind să reprezinte fiecare element printr-un model. Acest model va consta în interconectarea de componente diferite, componente care au fost definite în acest capitol. Complexitatea modelului va depinde de tipul elementelor fizice componente şi de condiţiile în care sînt puse să lucreze. Consideraţiile referitoare la alegerea unui model adecvat, în condiţii date, nu constituie o parte principală pentru analiza reţelelor. Aceasta nu înseamnă că aceste consideraţii şi capacitatea de alegere a unui model adecvat nu sînt importante; ele sînt. Pentru instruirea completă a unui inginer sînt importante multe alte lucruri, dar desigur ele nu pot fi tratate într-o singură carte. În această carte nu ne vom ocupa de construirea unui model al unei situaţii fizice date, înainte de a face analiza. Punctul nostru de plecare va fi un model.

Convertor de negativare

Ultima componentă pe care o introducem este *convertorul de negativare* (prescurtat *NC*). Acesta este un element cu două perechi de terminale şi este definit de următoarele ecuaţii $v - i$:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{83a}$$

sau

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \tag{83b}$$

Nu există o reprezentare specială pentru NC, astfel că este folosit simbolul general din fig. 1.14. NC este caracterizat de un singur parametru k, numit *raport de conversie*. Dacă considerăm că terminalele din stînga reprezintă intrarea şi cele din dreapta ieşirea, se vede din primul sistem de ecuaţii că atunci cînd i_1 este în sensul său de referinţă, i_2 va fi de

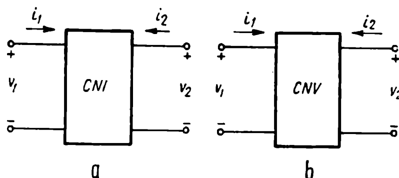


Fig. 1.14. Convertor de negativare;

a) de tipul cu inversiunea curentului: $v_1 = kv_2$ şi $i_2 = ki_1$; *b)* de tipul cu inversiunea tensiunii: $v_1 = -kv_2$ şi $i_2 = -ki_1$.

asemenea în sensul de referinţă; rezultă că curentul va fi inversat la trecerea prin NC. Pe de altă parte, tensiunea nu se va inversa. Acest tip este numit *convertor de negativare a curentului*, sau NIC.

Din al doilea set de relaţii se obţine o inversare a tensiunii, dar nu şi a curentului. Acest tip este numit *convertor de negativare a tensiunii*, sau NVC.

Cînd fiecare din aceste elemente este terminat pe o componentă pasivă la o pereche de terminale, este important de ştiut ce se întîmplă la cealaltă pereche. Astfel, fie o inductanţă L conectată la ieşire; atunci $v_2 = - L\, di_2/dt$. Folosind această relaţie în relaţiile $v - i$, se obţine

$$v_1 = \pm kv_2 = \pm k\left(-L\frac{di_2}{dt}\right) = \pm k(-L)\left(\pm k\frac{di_1}{dt}\right) = -k^2L\frac{di_1}{dt}. \quad (84)$$

Rezultă că la intrare, inductanţa echivalentă este proporţională cu negativa inductanţei L. Concluzii similare se obţin şi în cazul în care elementul conectat la ieşire este o rezistenţă sau o capacitate.

Introducerea NC extinde considerabil numărul de blocuri constituante de reţea, deoarece este acum posibil să includem negativele elementelor R, L şi C în reţea.

PROBLEME

P 1. Este adevărată relaţia $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ în algebra matriceală? Dacă nu, daţi formula corectă.

P 2. Fie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calculaţi **AB** şi **AC** şi comparaţi-le. Deduceţi prin aceasta, care regulă din algebra obişnuită nu se aplică la matrice?

P 3. În ce condiţii putem scrie $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ dacă $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$?

P 4. Fie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ şi } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculaţi **AB**. Ce teoremă din algebra simplă nu este adevărată pentru matrice?

P 5. Fie **A** şi **B** compatibile şi fie submatricele $\mathbf{A}_{ij}$ şi $\mathbf{B}_{jk}$ compatibile pentru orice i şi k. Verificaţi că submatricea (i, k) a produsului **AB** este $\sum_j \mathbf{A}_{ij}\mathbf{B}_{jk}$.

P 6. Arătaţi că

$$\int^x \mathbf{A}(y)\frac{d\mathbf{B}(y)}{dy}\,dy = \mathbf{A}(x)\mathbf{B}(x) - \int^x \frac{d\mathbf{A}(y)}{dy}\mathbf{B}(y)\,dy.$$

P 7. Demonstraţi egalitatea $\overline{(\mathbf{AB})} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}$ şi $(\bar{\mathbf{A}}\mathbf{B})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$.

P 8. Verificaţi că orice matrice pătrată **A** poate fi exprimată ca suma unei matrice hermitică $\mathbf{A_H}$ şi a unei matrice antihermitice $\mathbf{A_{SH}}$. Găsiţi $\mathbf{A_H}$ şi $\mathbf{A_{SH}}$.

P 9. Demonstraţi că dacă **A** este antihermitică, $\mathrm{Re}\,(a_{ii}) = 0$ pentru orice i.

P 10. Demonstraţi că $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\Delta_{jk} = 0$ dacă $i \neq j$.

P 11. Definiţi matricea **B** ca inversa lui **A** astfel ca $\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{U}$. Arătaţi că dacă inversa există, ea este unică. (Presupuneţi două inverse şi arătaţi că ele sînt egale).

P 12. Verificaţi care din următoarele matrice sînt nesingulare. Găsiţi inversele matricelor nesingulare.

$$\mathbf{A} = [\,2 \quad 3\,],$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

P 13. Demonstraţi că inversa unei matrice simetrice este simetrică.

P 14. Demonstraţi că $(\mathbf{A}^{-1})' = (\mathbf{A}')^{-1}$.

P 15. Demonstraţi că dacă **Z** este simetrică, şi $(\mathbf{BZB}')$ este simetrică.

P 16. Demonstraţi că $\mathrm{adj}\,(\mathbf{AB}) = (\mathrm{adj}\,\mathbf{B})\,(\mathrm{adj}\,\mathbf{A})$ cînd **A** şi **B** sînt matrice pătrate nesingulare.

P 17. Demonstraţi că

$$\frac{d\mathbf{A}^{-1}}{dx} = -\mathbf{A}^{-1}\frac{d\mathbf{A}}{dx}\mathbf{A}^{-1}.$$

P 18. Demonstraţi că

$$\frac{d}{dx}\mathbf{AB} = \frac{d\mathbf{A}}{dx}\mathbf{B} + \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dx}.$$

P 19. Demonstraţi că

$$\frac{d\,|\mathbf{A}|}{dx} = \mathrm{tr}\left\{(\mathrm{adj}\,\mathbf{A})\frac{d\mathbf{A}}{dx}\right\} = \mathrm{tr}\left\{\frac{d\mathbf{A}}{dx}(\mathrm{adj}\,\mathbf{A})\right\}.$$

P 20. Arătaţi că

$$\frac{d\,|\mathbf{A}|}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1j-1} & \dfrac{da_{1j}}{dx} & a_{1j+1} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nj-1} & \dfrac{da_{nj}}{dx} & a_{nj+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

P 21. Dacă **A** şi **B** nu sînt matrice pătrate, este adevărat că **AB** nu poate fi niciodată egal cu **BA**? Explicaţi.

P 22. A este de ordinul n şi rangul $n-1$. Demonstraţi că adj **A** este de rang 1.

P 23. Fie **D** o matrice diagonală cu elementele diagonalei d_{ii}, şi fie $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ o matrice pătrată de acelaşi ordin. Arătaţi că:

a) Cînd **D** premultiplică pe **A**, elementele liniei i a lui **A** sînt multiplicate de d_{ii}.
b) Cînd **D** postmultiplică pe **A**, elementele coloanei i a lui **A** sînt multiplicate de d_{ii}.

P 24. Demonstraţi că: a) $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$ şi b) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$.

P 25. Fie **A** şi **B** simetrice şi de ordin n. Demonstraţi că a) produsul **AB** este simetric dacă $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ şi b) $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ dacă produsul **AB** este simetric.

P 26. În produsul matriceal $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, **A** şi **C** sînt matrice nesingulare pătrate. Demonstraţi că **B** este nesingular.

P 27. Folosiţi condensarea pivotală pentru evaluarea determinantului următoarelor matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ şi } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

P 28. Pentru un sistem de ecuaţii omogene, soluţia aşa cum este dată în (45) va deveni $x_1 = -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2$. Dacă $m = n$ şi matricea **A** este de rangul $r = n - 1$, determinaţi o expresie pentru fiecare din variabilele x_i în funcţie de x_1 şi termenii cofactorilor lui **A**.

P 29. Demonstraţi că un determinant este zero dacă şi numai dacă liniile şi coloanele sînt liniar dependente.

P 30. Verificaţi (42) pentru următorul sistem de ecuaţii

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 &= -2 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

P 31. Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii

(a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= -1. \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 - 7x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -1. \\ x_1 + 3x_2 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 &= -9 \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 9x_4 &= 0. \end{aligned}$$

P 32. Evaluaţi det **A** prin aplicarea definiţiei unui determinant cînd

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

P 33. Arătaţi că numărul maxim de n-vectori liniar independenţi din setul tuturor n-vectorilor **x** care satisfac $\mathbf{0} = \mathbf{Ax}$ este egal cu gradul de degenerare al lui **A**.

P 34. Dacă q_P, q_Q şi q_{PQ} reprezintă gradul de degenerare al matricelor **P**, **Q** şi respectiv **PQ**, arătaţi că

$$q_Q \leqslant q_{PQ} \leqslant q_P + q_Q.$$

P 35. Arătaţi că determinantul unei matrice triunghiulare este egal cu produsul elementelor diagonalei principale.

P 36. Fie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

unde $\mathbf{A}_{11}$ şi $\mathbf{A}_{12}$ sînt submatrice pătrate. Arătaţi că

$$\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{A}_{11})(\det \mathbf{A}_{22})$$

P 37. Găsiţi valorile proprii şi vectorii proprii ai următoarelor matrice:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

P 38. Fiecare din următoarele matrice **A** este similară unei matrice diagonale $\Lambda = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$. Găsiţi **S** în fiecare caz

$$\text{(a)} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{(c)} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & j2 \\ -j2 & 4 \end{bmatrix}.$$

P 39. Evaluaţi normele matricelor $\|\mathbf{A}\|_1$, $\|\mathbf{A}\|_2$, $\|\mathbf{A}\|_\infty$ cînd

$$\text{(a)}\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(b)}\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(c)}\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

P 40. O reţea are perechea excitaţie şi răspuns prezentate în fig. 1. P 40. Este arătată şi o a doua excitaţie. Dacă reţeaua este liniară şi invariabilă în timp, trasaţi răspunsul pentru această excitaţie.

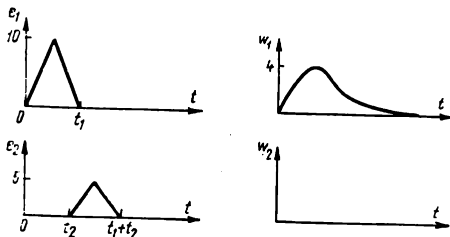


Fig. 1. P. 40.

P 41. Presupunem curentul la ieşirea unei reţele liniare, invariabile în timp şi reciproce, ca urmare a unei excitaţii la intrare, aşa cum este arătat în fig. 1. P.41a. Găsiţi curentul i_1 cînd reţeaua este excitată aşa cum este arătat în Fig.1. P.41b.

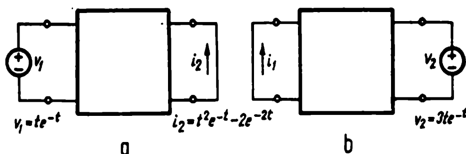


Fig. 1.P. 41.

P 42. Arătaţi că sursa de tensiune comandată arătată în fig. 1. P.42 nu este un element pasiv. Comentaţi sursele dependente şi independente în contextul reţelelor pasive şi active.

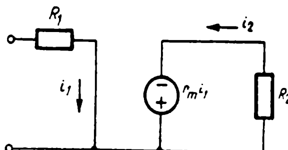


Fig. 1. P. 42.

P 43. Arătaţi că un convertor de negativare nu este pasiv.

P 44. Stabiliţi ecuaţiile la terminale pentru reţelele arătate în fig. 1.P.44.

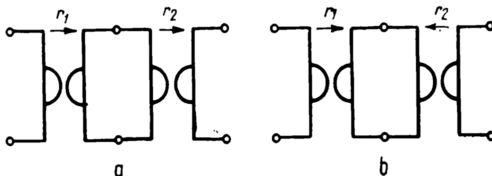


Fig. 1. P. 44.

P 45. Reprezentaţi numai cu surse comandate:

a) un transformator ideal;

b) un girator;

c) un convertor de negativare.

P 46. Găsiţi relaţiile $v - i$ la terminalele de intrare ale unui girator, cînd la ieşire se conectează o inductanţă L. Ca o aplicaţie particulară se cere obţinerea unei capacităţi de 1000 μF.

2

Teoria grafurilor şi ecuaţiile reţelelor (circuitelor)

2.1. NOŢIUNI INTRODUCTIVE

Atunci cînd sînt interconectate două sau mai multe din componentele definite în capitolul precedent se obţine o *reţea electrică*. (O definiţie mai abstractă se dă în § 2.3). Astfel de reţele acumulează energie, disipă energie şi transmit semnale de la un punct la altul. O parte componentă a unei reţele care se găseşte între două terminale la care se pot face alte conexiuni se numeşte *latură*. Atunci cînd două sau mai multe laturi sînt conectate împreună apare un *nod* sau o *joncţiune*. O cale simplă închisă într-o reţea se numeşte *buclă*.

În primul paragraf al acestui capitol se vor prezenta pe scurt o serie de idei cu care cititorul este desigur familiarizat într-o măsură mai mare sau mai mică. Multe din acestea vor fi amplificate succesiv, dar se va face mai întîi o introducere simplă care va servi la concentrarea prezentării asupra unor concepte înaintea tratării lor într-o formă completă.

2.1.1. Teoremele lui Kirchhoff

La baza teoriei reţelelor stau cele două teoreme ale lui Kirchhoff care pot fi formulate după cum urmează.

Teorema lui Kirchhoff referitoare la curenţi (TKC) stabileşte că în orice reţea electrică *suma curenţilor care ies din orice nod este zero în orice moment de timp*. Cînd se aplică această teoremă unui nod al unei reţele se obţine o ecuaţie referitoare la curenţii laturilor respective. O atenţie

specială trebuie acordată desigur sensului curenţilor. Astfel, în fig.2.1, TKC aplicată nodului *A* conduce la următoarea ecuaţie:

$$-i_1 + i_2 - i_3 + i_4 = 0. \tag{1}$$

Dacă sensul curentului i_1 se alege spre nod, curentul care „iese" din nod prin latura 1 este $-i_1$; similar, curentul care iese prin latura *3* este $-i_3$.

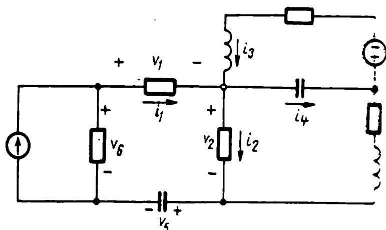


Fig. 2.1. Exemplu pentru TKC şi TKT.

Teorema lui Kirchhoff referitoare la tensiuni (TKT) stabileşte că în orice reţea electrică, ***suma tensiunilor pe toate laturile care formează o buclă este zero în orice moment de timp.*** Aplicarea acestei teoreme unei bucle dintr-o reţea electrică conduce la o ecuaţie referitoare la tensiunile de-alungul buclei. În formularea TKC s-au ales în mod arbitrar curenţii care „ies din nod" pentru a fi însumaţi. S-ar fi putut alege tot aşa de bine şi curenţii care „intră în nod". Tot aşa, aplicînd TKT se poate alege suma tensiunilor într-unul din cele două sensuri posibile de parcurgere a buclei. Astfel, mergînd în sensul acelor de ceasornic pe bucla formată din laturile *1*, *2*, *5* şi *6* din fig. 1 se obţine ecuaţia:

$$v_1 + v_2 + v_5 - v_6 = 0. \tag{2}$$

Deoarece sensul ales pentru v_6 este opus sensului de orientare al buclei, contribuţia acestei tensiuni va fi $-v_6$.

Se observă că TKC şi TKT conduc la ecuaţii algebrice care reprezintă constrîngeri pentru curenţi şi tensiuni. Se obţin atîtea ecuaţii din TKC cîte noduri sînt în reţea şi atîtea ecuaţii din TKT cîte bucle are reţeaua. Vom arăta că aceste ecuaţii nu sînt toate independente; dacă numărul nodurilor este $n + 1$ iar numărul laturilor este l, atunci vom arăta că numărul ecuaţiilor independente obţinute din TKC este n iar

numărul ecuațiilor independente obținute din TKT este $l - n$. Se obțin deci în total $n + (l - n) = l$ ecuații independente din TKC și TKT.

Dar fiecare latură dintr-o rețea determină o relație între curentul și tensiunea corespunzătoare. Aceasta poate fi o relație algebrică de tipul $v = Ri$ sau o relație diferențială de tipul $v = L\, di/dt$. În orice caz vor fi tot atîtea relații cîte laturi sînt, adică l relații. Cu totul vor fi $l + l = 2l$ ecuații care leagă l curenți și l tensiuni, adică $2l$ variabile. (Așa cum se va arăta mai departe, sursele independente nu vor fi considerate drept laturi în acest context.) Punînd cele trei grupuri de ecuații împreună —

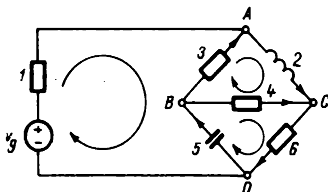


Fig. 2.2. Exemplu pentru ecuațiile rețelelor.

și anume TKC, TKT și relațiile $v - i$ — se obține un sistem de ecuații care permit determinarea tuturor tensiunilor și curenților.

Însă $2l$ este un număr relativ mare și este prudent să se evite soluționarea unui sistem cu un număr atît de mare de ecuații. Există o serie de căi sistematice de a combina cele trei sisteme de ecuații de bază, care permit formulări diferite ce reclamă soluționarea unui număr mai mic decît $2l$ ecuații simultane. În acest paragraf introductiv vom examina pe scurt trei procedee ilustrînd pe fiecare în parte. Rețeaua în punte din fig. 2.2 va folosi drept exemplu. Sursa de tensiune în serie cu un rezistor este considerată ca o singură latură. Orientarea fiecărei laturi este indicată prin cîte o săgeată. Momentul de timp din care începem să ne preocupăm de comportarea rețelei se consideră $t = 0$ și se presupun cunoscute tensiunea inițială la bornele condensatorului $v_5(0) = V_0$ și curentul inițial prin bobină $i_2(0) = I_0$.

2.1.2. Ecuațiile pe bucle

În această rețea apar șase laturi ($l = 6$) și patru noduri ($n = 3$). Se pot scrie deci $l - n = 3$ ecuații independente pe baza TKT și $n = 3$ ecuații independente pe baza TKC. În fig. 2.2 săgețile circulare arată orientarea buclelor în vederea scrierii ecuațiilor TKT. Ele nu influențează cu nimic asupra curenților (deocamdată). Dar să ne imaginăm niște

curenţi ciclici fictivi, circulînd de-a lungul buclelor în concordanţă cu sensul de parcurgere al acestora. Examinînd figura se observă că aceşti curenţi ciclici sînt identici cu curenţii din laturile i_1, i_2 şi i_6.

Dacă se aplică buclelor TKT se obţin următoarele ecuaţii:

$$\begin{aligned} v_1 - v_g - v_3 - v_5 &= 0 \\ v_2 + v_3 - v_4 &= 0 \\ v_4 + v_5 + v_6 &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Se obţine un sistem de trei ecuaţii cu şase necunoscute, şi se observă că aceste ecuaţii sînt independente. Introducînd în aceste ecuaţii relaţiile dintre tensiuni şi curenţi pentru fiecare latură rezultă

$$\begin{aligned} R_1 i_1 - v_g - R_3 i_3 - \frac{1}{C_5}\int_0 i_5(x)dx - V_0 &= 0 \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + R_3 i_3 - R_4 i_4 &= 0 \\ R_4 i_4 + \frac{1}{C_5}\int_0 i_5(x)dx + V_0 + R_6 i_6 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Se obţine un sistem de trei ecuaţii cu şase necunoscute, reprezentate de curenţii prin laturi.

Urmează să se aplice TKC. Aplicînd TKC nodurilor A, C şi D se obţine

$$\begin{aligned} i_3 &= -i_1 + i_2 \\ i_4 &= -i_2 + i_6 \\ i_5 &= -i_1 + i_6. \end{aligned} \tag{5}$$

Aceste ecuaţii sînt independente. Scriind ecuaţiile ce rezultă din aplicarea TKC se poate omite pe rînd cîte un nod, obţinîndu-se astfel de fiecare dată ecuaţii independente. Se observă că toţi curenţii prin laturi se exprimă în funcţie de curenţii i_1, i_2 şi i_6 care sînt tocmai curenţii

buclelor (ciclici). Cînd se substituie aceste expresii în ecuaţiile (4) se obţine

$$(R_1 + R_3)i_1 + \frac{1}{C_5}\int_0^t i_1 dx - R_3 i_2 - \frac{1}{C_5}\int_0^t i_6\, dx = v_g + V_0$$

$$- R_3 i_1 + L_2 \frac{di_2}{dt} + (R_3 + R_4)i_2 - R_4 i_6 = 0$$

$$- \frac{1}{C_5}\int_0^t i_1 dx - R_4 i_2 + (R_4 + R_6)i_6 + \frac{1}{C_5}\int_0^t i_6 dx = - V_0$$

adică un sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute, curenţii buclelor reprezentînd necunoscutele. Atunci cînd sînt scrise în felul acesta se spune că ecuaţiile au forma standard. Ele se numesc *ecuaţiile pe bucle*. Dacă în structura lor apar atît integrale cît şi derivate, ele se numesc ecuaţii integrodiferenţiale. Odată soluţionate ecuaţiile pe bucle, ceilalţi curenţi pot fi determinaţi din relaţiile (5).

Să revenim acum asupra procedeului de scriere a ecuaţiilor pe bucle. Primul pas constă în scrierea unui sistem de ecuaţii independente pentru tensiunile pe laturi pe baza TKT. Se substituie apoi în aceste ecuaţii relaţiile dintre tensiuni şi curenţi, obţinîndu-se un sistem de ecuaţii pentru curenţi. Se exprimă apoi curenţii prin laturi în funcţie de curenţii buclelor obţinîndu-se un sistem de ecuaţii integrodiferenţiale avînd drept necunoscute curenţii buclelor.

2.1.3. Ecuaţiile pe noduri

Presupunem acum că schimbăm ordinea în care se fac paşii din cazul precedent. Presupunem că se scriu mai întîi ecuaţiile pe baza TKC ca în (5); apoi se introduc relaţiile dintre tensiuni şi curenţi. Se obţine:

$$G_1 v_1 - \frac{1}{L_2}\int_0^t v_2 dx - I_0 + G_3 v_3 = 0$$

$$\frac{1}{L_2}\int_0^t v_2 dx + I_0 + G_4 v_4 - G_6 v_6 = 0 \tag{6}$$

$$G_1 v_1 + C_5 \frac{dv_5}{dt} - G_6 v_6 = 0$$

adică un sistem de trei ecuaţii cu şase necunoscute reprezentînd tensiunile pe laturi. Cînd s-au scris ecuaţiile pe baza TKC nodul B a fost omis. Presupunem că nodul B se alege ca nod de referinţă în raport cu care se măsoară tensiunile tuturor celorlalte noduri. Aceste tensiuni se vor

numi *tensiunile nodurilor*. În fig. 2.2 tensiunile nodurilor sînt v_{AB}, v_{CB} şi v_{DB}. Toate tensiunile pe laturi pot fi exprimate prin tensiunile nodurilor aplicînd TKT. Rezultă.

$$v_1 = v_{DB} - v_{AB} + v_g \qquad v_4 = -v_{CB}$$
$$v_2 = v_{AB} - v_{CB} \qquad v_5 = v_{DB} \qquad (7)$$
$$v_3 = -v_{AB} \qquad v_6 = v_{CB} - v_{DB}.$$

Cînd aceste expresii se introduc în relaţiile (6) se obţine

$$(G_1 + G_3)v_{AB} + \frac{1}{L_2}\int_0^t v_{AB}\,dx - \frac{1}{L_2}\int_0^t v_{CB}\,dx - G_1 v_{DB} = G_1 v_g - I_0$$
$$-\frac{1}{L_2}\int_0^t v_{AB}\,dx + (G_4 + G_6)v_{CB} + \frac{1}{L_2}\int_0^t v_{CB}\,dx - G_5 v_{DB} = I_0 \qquad (8)$$
$$-G_1 v_{AB} - G_6 v_{CB} + C_5\frac{dv_{DB}}{dt} + (G_1 + G_6)v_{DB} = -G_1 v_g.$$

Aceste ecuaţii se numesc *ecuaţiile pe noduri*. Ca şi ecuaţiile pe bucle, ele sînt nişte relaţii integrodiferenţiale. Odată soluţionate aceste ecuaţii pentru tensiunile nodurilor v_{AB}, v_{CB} şi v_{DB} toate tensiunile pe laturi sînt cunoscute fiind calculate din relaţiile (7).

Recapitulînd, primul pas în scrierea ecuaţiilor pe noduri îl reprezintă scrierea ecuaţiilor ce rezultă din TKC pentru toate nodurile reţelei mai puţin unul. Acest nod particular este ales drept nod de referinţă şi tensiunile nodurilor sînt definite ca tensiunile acestor noduri în raport cu nodul de referinţă. Relaţiile dintre tensiuni şi curenţi se introduc în ecuaţiile scrise pe baza TKC obţinîndu-se un sistem de ecuaţii pentru tensiunile pe laturi. Tensiunile pe laturi se exprimă apoi în funcţie de tensiunile nodurilor. Aşa dar, ordinea în care se scriu TKC, TKT şi relaţiile tensiune—curent în cazul ecuaţiilor pe noduri este inversă faţă de cazul ecuaţiilor pe bucle.

2.1.4. Ecuaţiile de stare — sistem mixt de ecuaţii

Prezenţa integralelor unor mărimi necunoscute în ecuaţiile pe bucle sau pe noduri conduce la dificultăţi în soluţionarea lor. Astfel de integrale pot fi desigur eliminate prin derivarea ecuaţiilor respective, dar acest procedeu face să crească ordinul ecuaţiilor. De aceea este mai bine să se evite prezenţa integralei.

În cazul de faţă se observă că apare o integrală în ecuaţiile pe bucle atunci cînd tensiunea la bornele unui condensator este eliminată din ecuaţia scrisă pe baza TKT prin substituţia relaţiei tensiune—curent. Aceste integrale nu vor apare dacă se păstrează ca variabile în sistemul de ecuaţii tensiunile pe condensatoare şi curenţii prin bobine.

Avînd în vedere acest obiectiv, revenim la ecuaţiile (3), eliminînd tensiunile tuturor laturilor, cu excepţia tensiunii pe condensator v_5, folosind relaţiile tensiune—curent. Deoarece relaţia tensiune—curent pentru condensator n-a fost folosită, ea trebuie adăugată sistemului format din celelalte ecuaţii. Se obţine

$$R_1 i_1 - v_g - R_3 i_3 - v_5 = 0$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_3 i_3 - R_4 i_4 = 0$$

$$R_4 i_4 + v_5 + R_6 i_6 = 0 \tag{9}$$

$$C_5 \frac{dv_5}{dt} - i_5 = 0$$

adică un sistem de patru ecuaţii cu şase necunoscute. Ca şi mai înainte se pot folosi ecuaţiile obţinute pe baza TKC pentru a elimina unii curenţi. Prin substituţie din (5) în (9) se obţine:

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = -(R_3 + R_4) i_2 + R_3 i_1 + R_4 i_6$$

$$C_5 \frac{dv_5}{dt} = -i_1 + i_6$$

$$0 = v_5 + R_3 i_2 - (R_1 + R_3) i_1 + v_g$$

$$0 = v_5 - R_4 i_2 + (R_4 + R_6) i_6 .$$

Acesta este un sistem de patru ecuaţii cu patru necunoscute şi poate fi soluţionat uşor. Dar rămîne senzaţia că s-a introdus o complicaţie prin mărirea numărului de ecuaţii ce trebuie soluţionate simultan. Totuşi se observă că ultimele două ecuaţii din acest sistem sînt ecuaţii algebrice; ele nu conţin nici derivate şi nici integrale. Prima dintre ele se poate soluţiona în raport cu i_1, a doua în raport cu i_6 iar expresiile respective

se introduc în celelalte două ecuaţii. Rezultatul acestor operaţii este:

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = -(R_3 + R_4)i_2 + \frac{R_3}{R_1 + R_3}(v_5 + R_3 i_2 + v_g) + \frac{R_4}{R_4 + R_6}(R_4 i_2 - v_5)$$

$$C_5 \frac{dv_5}{dt} = -\frac{1}{R_1 + R_3}(v_5 + R_3 i_2 + v_v) + \frac{1}{R_4 + R_6}(R_4 i_2 - v_5)$$

care se pot scrie

$$\frac{di_2}{dt} = ai_2 + bv_5 + cv_g$$

$$\frac{dv_5}{dt} = di_2 + ev_5 + fv_g$$

sau, sub formă matriceală

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_2 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_2 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} v_g, \tag{10}$$

unde

$$a = \frac{1}{L_2}\left(-R_3 - R_4 + \frac{R_3^2}{R_1 + R_3} + \frac{R_4^2}{R_4 + R_6}\right) = -\frac{1}{L_2}\left(\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_4 R_6}{R_4 + R_6}\right)$$

$$b = \frac{1}{L_2}\left(\frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_4 + R_6}\right)$$

$$c = \frac{R_3}{L_2(R_1 + R_3)}$$

$$d = \frac{1}{C_5}\left(\frac{R_4}{R_4 + R_6} - \frac{R_3}{R_1 + R_3}\right)$$

$$e = -\frac{1}{C_5}\left(\frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_4 + R_6}\right)$$

$$f = \frac{-1}{C_5(R_1 + R_3)}.$$

Ecuația matriceală (10) reprezintă două ecuații diferențiale de ordinul întîi cu două necunoscute. Ea se numește *ecuație de stare* din motive care vor fi discutate în alt capitol. Variabilele i_2 și v_5 se numesc *variabile de stare.*

Examinînd retrospectiv procedeul utilizat pentru a scrie ecuațiile de stare, se observă că la baza lui stau aceleași operații ca și în cazul scrierii ecuațiilor pe bucle sau a ecuațiilor pe noduri. Sistemul de ecuații obținut este un sistem care conține drept variabile atît tensiuni cît și curenți, adică este un sistem mixt. Integralele au fost evitate alegîndu-se tensiunile la bornele condensatoarelor și curenții prin bobine drept variabile. Punctul de plecare îl constituie scrierea ecuațiilor pe baza TKT în care s-au introdus toate relațiile tensiune—curent pentru laturi, cu excepția laturilor ce conțin condensatoare. Apoi se utilizează TKC pentru a elimina curenții unor laturi. În ecuațiile ce rezultă apar de asemenea drept variabile și curenții prin unele rezistențe. Aceștia pot fi însă eliminați de oarece un număr suficient de ecuații sînt de natură algebrică și nu diferențială.

2.1.5. Soluțiile ecuațiilor

În cazul rețelelor liniare, invariante în timp și cu parametri concentrați, ecuațiile pe bucle, ecuațiile pe noduri și ecuațiile de stare sînt de obicei ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți. (Pot să apară inițial și integrale care se elimină prin derivare.) Apare deci problema soluționării acestor ecuații. Există diverse metode pentru rezolvarea acestei probleme. Metoda de soluționare în domeniul timp a ecuațiilor de stare este prezentată într-un capitol următor iar metoda transformatei Laplace în Anexa 3.

În metoda transformatei Laplace se aplică transformata Laplace sistemului de ecuații diferențiale obținîndu-se un sistem de ecuații algebrice în variabila complexă *s*. Se soluționează acest sistem de ecuații algebrice în raport cu imaginile operaționale ale variabilelor care pot fi: curenții buclelor, tensiunile nodurilor sau variabilele de stare. Apoi se aplică transformarea inversă. Se obțin astfel soluțiile ca funcții de timp, începînd de la momentul inițial $t_0 = 0$.

În structura soluției intervin contribuțiile a două categorii de mărimi: sursele de semnale de excitație și condițiile inițiale. Condițiile inițiale reprezintă valorile tensiunilor la bornele condensatoarelor și a curenților prin bobine imediat după t_0. Principiile continuității sarcinii electrice și a fluxului magnetic impun constrîngeri pentru variația în timp a tensiunilor pe condensatoare și a curenților prin bobine — constrîngeri ce servesc la determinarea valorilor acestora imediat ulterioare lui t_0

din valorile lor imediat anterioare lui t_0[1]). Reţeaua se numeşte *iniţial relaxată* dacă tensiunile la bornele condensatoarelor şi curenţii prin bobine sînt iniţial zero.

Pentru concretizare se va continua prezentarea cu soluţionarea ecuaţiilor de stare (10) corespunzătoare reţelei din fig. 2.2 ca exemplu. Aplicind transformata Laplace acestor ecuaţii, se obţine:

$$(s - a)I_2(s) - bV_5(s) = cV_g(s) + I_0$$

$$- dI_2(s) + (s - e)V_5(s) = fV_g(s) + V_0, \tag{12}$$

unde I_0 şi V_0 sînt valorile iniţiale. Aceste ecuaţii pot fi soluţionate în raport cu $I_2(s)$ sau $V_5(s)$. Pentru $I_2(s)$ se găseşte:

$$I_2(s) = \frac{c(s - e) + bf}{\Delta} V_g(s) + \frac{(s - e)I_0 + bV_0}{\Delta} \tag{13}$$

unde $\Delta = s^2 - (a + e)s + ae - bd$ este determinantul sistemului de ecuaţii. Contribuţiile sursei de semnal şi ale condiţiilor iniţiale sînt puse clar în evidenţă.

Din nou pentru a concretiza, presupunem că

$$v_g(t) = \sin, t \text{ sau } V_g(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

şi

$$\Delta = (s + 2)(s + 3) \tag{14}$$

iar condiţiile iniţiale sînt astfel încît

$$I_2(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s^2 + 1)(s + 2)(s + 3)} = \frac{1}{10}\left(\frac{6}{s + 2} - \frac{7}{s + 3}\right) + \frac{1}{10}\left(\frac{s + 1}{s^2 + 1}\right). \tag{15}$$

Se obţine:

$$i_2(t) = \mathscr{L}^{-1}[I_2(s)] = \frac{\sqrt{2}}{10}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{6}{10}\varepsilon^{-2t} - \frac{7}{10}\varepsilon^{-3t}. \tag{16}$$

---

[1]) Pentru o analiză detaliată a condiţiilor iniţiale, se poate consulta lucrarea: S. Seshu şi N. Balabanian, *Linear Network Analysis*, John-Wiley & Sons, Inc., New York, 1959, p. 101–112.

Dezvoltarea lui $I_2(s)$ în elemente simple pune în evidenţă polii. Dintre aceşti poli unii — termenul al doilea din (15) — reprezintă contribuţia (sursei) semnalului de excitaţie în timp ce ceilalţi reprezintă contribuţia reţelei. În transformata inversă găsim termeni ce seamănă cu semnalul aplicat şi alţi termeni exponenţiali. Există o abundentă terminologie referitoare la aceşti termeni, acumulată din studiul ecuaţiilor diferenţiale în matematică, din studiul vibraţiilor în mecanică sau a circuitelor de curent alternativ în electrotehnică.

Denumirile corespunzătoare sînt:

1. Soluţia particulară şi soluţia ecuaţiei omogene;
2. Răspuns forţat şi răspuns liber;
3. Regim permanent şi regim tranzitoriu.

Probabil că cititorul este mai familiarizat cu denumirile de „regim permanent" şi „regim tranzitoriu". Cînd semnalul aplicat este sinusoidal, aşa cum este cazul în exemplul considerat, şi răspunsul va conţine un termen sinusoidal care se menţine permanent. În exemplul nostru ceilalţi termeni dispar odată cu timpul; ei reprezintă regimul tranzitoriu. Cu timpul termenul sinusoidal va deveni dominant. Acest fapt este legat de conceptul de regim permanent. Dacă semnalul aplicat nu este periodic, conceptul de regim permanent îşi pierde semnificaţia. Totuşi, polii transformatei funcţiei de excitaţie intervin şi ei în dezvoltarea în elemente simple a răspunsului şi astfel răspunsul va conţine termeni ce provin din aceşti poli. Aceşti termeni constituie ***răspunsul forţat***. Ca formă ei seamănă cu funcţia de excitaţie. Ceilalţi termeni reprezintă răspunsul ***natural*** sau ***liber***. Ei sînt prezenţi în structura soluţiei (cu diverşi coeficienţi) indiferent de forma funcţiei de excitaţie şi chiar dacă nu există funcţia de excitaţie dar există condiţii iniţiale nenule sub forma unor tensiuni la bornele condensatoarelor sau a unor curenţi prin bobine. Acest fapt explică denumirea de răspuns „natural" sau „liber". Exponenţii corespunzători termenilor din răspunsul natural se numesc ***frecvenţe naturale***. În exemplul anterior exponenţii din răspunsul natural, adică frecvenţele naturale, sînt numere reale negative. Dacă ei ar fi numere pozitive sau numere complexe cu partea reală pozitivă, atunci răspunsul natural ar creşte nemărginit odată cu timpul în loc să tindă la zero. O reţea cu o asemenea comportare se numeşte ***instabilă***. Vom defini o reţea ***stabilă*** ca ***o reţea avînd frecvenţele naturale în semiplanul închis din stînga al planului variabilei complexe s***; adică în semiplanul din stînga sau pe axa imaginară [1]). Actualmente se exclud din clasa reţelelor stabile reţelele cu frecvenţe naturale pe axa imaginară.

Să definim acum clar diversele clase de răspunsuri. ***Răspunsul complet*** al reţelei constă din două părţi: răspunsul ***forţat*** şi răspunsul ***natural*** sau ***liber***. Răspunsul forţat constă din toţi termenii la care contribuie,

---

[1]) Definiţia este aplicabilă sistemelor liniare, staţionare şi cu constante concentrate. O definiţie mai generală şi mai precisă a stabilităţii va fi dată în capitolele următoare.

polii funcţiei de excitaţie, în timp ce răspunsul liber constă din toţi termenii la care contribuie frecvenţele naturale (zerourile lui $\Delta(s)$). Dacă funcţia de excitaţie este periodică, răspunsul forţat se mai numeşte şi *regim permanent*. Dacă nu există frecvenţe naturale pe axa imaginară răspunsul liber se mai numeşte şi *regim tranzitoriu*.

2.2. GRAFURI LINIARE

Aşa cum s-a arătat succint în paragraful anterior, la baza teoriei reţelelor se află cele două teoreme ale lui Kirchhoff şi relaţiile tensiune—curent corespunzătoare elementelor din care este formată reţeaua. Cele două teoreme ale lui Kirchhoff exprimă constrîngerile la care sînt supuşi curenţii şi tensiunile corespunzătoare elementelor reţelei prin însăşi aranjarea lor într-o structură. *Topologia reţelei* este o denumire generică care se referă la toate proprietăţile ce decurg din structura sau geometria reţelei.

Proprietăţile topologice ale unei reţele sînt independente de tipul componentelor ce constituie laturile. De aceea este convenabil să se înlocuiască fiecare element al reţelei printr-o simplă linie fără să ne referim în mod special la un anume element. Structura care rezultă constă din noduri interconectate prin segmente de linie. Sîntem conduşi astfel la o ramură a matematicii, numită teoria grafurilor liniare, care se ocupă tocmai cu studiul unor asemenea structuri.

Vom începe un detaliat studiu al analizei reţelelor concentrîndu-ne atenţia mai întîi asupra grafurilor liniare şi a proprietăţilor lor care prezintă importanţă pentru acest studiu. Prezentarea grafurilor liniare nu va fi exhaustivă şi va fi necesar să examinăm succint definiţiile unor termeni fără să motivăm necesitatea introducerii lor.

Definiţii introductive

Un *graf liniar* este definit ca o mulţime de puncte, numite *noduri*, şi de segmente numite *laturi*, nodurile fiind unite prin laturi. Uneori este convenabil să considerăm nodurile de la capetele unei laturi ca făcînd parte din latura respectivă. Alteori este mai convenabil să considerăm nodurile de sine stătătoare şi detaşate de laturi.

O corespondenţă între o reţea şi un graf liniar se poate face imediat. Astfel graful corespunzător reţelei din fig. 2.3*a* este dat în fig. 2.3*b*. Nodurile şi laturile sînt numerotate. În cele ce urmează vom utiliza acest graf pentru a face unele observaţii ce se pretează la generalizări. De asemenea, proprietăţile ce vor fi definite vor fi ilustrate pe acest graf ca un exemplu.

Laturile care intră sau ies dintr-un nod se numesc *incidente* la nodul respectiv. Astfel, laturile *2*, *4* şi *5* sînt incidente la nodul *2*.

Fiecare latură a grafului dat ca exemplu poartă cîte o săgeată care indică orientarea laturii respective. Un graf avînd laturile orientate se numeşte *graf orientat*. Elementele reţelei căreia i se asociază graful sînt caracterizate prin cîte o tensiune şi un curent, fiecare din ele cu o anu-

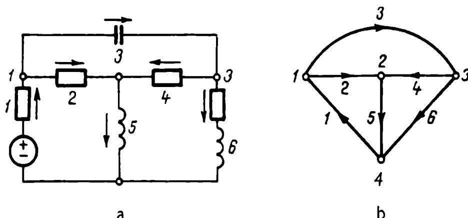


Fig. 2.3. Reţea electrică (*a*) şi graful corespunzător (*b*).

mită orientare. Pentru a pune în corespondenţă orientarea acestora cu orientarea laturilor grafului vom face convenţia ca tensiunea şi curentul fiecărui element să aibă o orientare standard, „plusul'' tensiunii fiind plasat la coada săgeţii care indică sensul de referinţă al curentului. Orientarea laturii grafului va coincide cu sensul curentului. Desigur, proprietăţile grafului nu au nimic comun cu convenţiile referitoare la reţea.

Un *subgraf* este o submulţime de laturi şi noduri ale grafului. Subgraful se numeşte *propriu* (*propriu-zis*) dacă nu conţine toate laturile şi toate nodurile grafului.

O *cale* este un subgraf particular care constă dintr-o secvenţă ordonată de laturi cu următoarele proprietăţi :

1. Cu excepţia a două, toate celelalte noduri numite *noduri interne* au cîte două laturi incidente.

2. Celelalte două noduri numite *noduri terminale* au incidentă cîte o singură latură a subgrafului.

3. Nici un subgraf propriu al acestui subgraf cu aceleaşi noduri terminale nu are proprietăţile 1 şi 2.

În exemplul dat anterior, laturile *2*, *5* şi *6* împreună cu toate nodurile constituie o cale. Nodurile terminale sînt *1* şi *3* iar nodurile interne sînt *2* şi *4*. Din cele trei laturi incidente la nodul 2 numai două, adică *2* şi *5*, fac parte din subgraf.

Un graf este *conex* dacă există cel puţin o cale între orice pereche de noduri. Graful dat ca exemplu este conex. Graful asociat unei reţele ce conţine un transformator poate să nu fie conex.

O *buclă* este un subgraf conex particular al grafului în care la fiecare nod sînt incidente cîte două laturi ale subgrafului. Astfel, dacă cele două noduri terminale ale unei căi sînt făcute să coincidă, se obţine o buclă (care poate fi numită o *cale închisă*). În graful dat ca exemplu, laturile *4*, *5* şi *6* împreună cu nodurile *2*, *3* şi *4* constituie o buclă. Pentru a determina o buclă pot fi specificate fie laturile fie nodurile care intervin. Astfel, în exemplul anterior, pentru a determina bucla respectivă este suficient să se specifice fie mulţimea laturilor {*4*, *5*, *6*}, fie mulţimea nodurilor {*2*, *3*, *4*}.

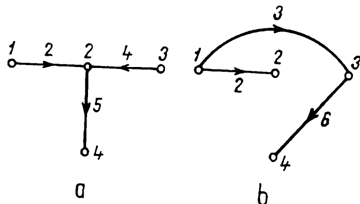


Fig. 2.4. Doi arbori din structura unui graf.

Un *arbore* este un subgraf conex al unui graf conex care conţine toate nodurile grafului dar nu conţine bucle. Pentru a determina un arbore este suficient să se specifice laturile sale. În graful dat ca exemplu, laturile *2*, *4* şi *5* formează un arbore. Conceptul de arbore este un concept cheie al teoriei grafelor. Laturile care intervin în structura unui arbore se numesc *ramuri*; laturile care nu intervin în structura arborelui se numesc *joncţiuni*. Acestea din urmă, luate împreună formează complementul arborelui sau *coarborele*. Această partiţie a laturilor unui graf nu este unică. În fig. 2.4 se dau doi arbori pentru graful din fig. 2.3. În primul caz laturile *2*, *4* şi *5* sînt ramuri iar *1*, *3* şi *6* joncţiuni. În cel de-al doilea latura *2* este tot o ramură iar laturile *3* şi *6* care erau mai înainte joncţiuni au devenit acum ramuri. Dacă o latură particulară a unui graf este ramură sau joncţiune nu se poate preciza în mod unic de la bun început; această precizare devine posibilă numai după ce s-a specificat un anumit arbore.

Fiecare arbore din fig. 2.4 are o anumită structură. În arborele din fig. 2.4*a* toate ramurile sînt incidente la un nod comun. Un astfel de arbore se numeşte *arbore în formă de stea* sau pe scurt *arbore stelat*. În arborele din fig. 2.4*b* nodurile pot fi ordonate astfel încît arborele să prezinte o singură cale începînd de la primul nod şi terminînd cu ultimul. Un astfel de arbore se numeşte *arbore liniar*. Într-un arbore liniar există numai două noduri terminale în timp ce într-un arbore stelat, cu excepţia unui nod, toate celelalte noduri sînt noduri terminale.

Numărul laturilor dintr-un arbore al unui graf este cu o unitate mai mic decît numărul nodurilor din graful respectiv. Acest rezultat se poate demonstra prin inducţie. Astfel, pentru un graf cu două noduri numărul ramurilor este 1. Presupunem că afirmaţia anterioară este adevărată pentru un graf cu k noduri; aceasta înseamnă că numărul ramurilor este $k - 1$. Considerăm acum un graf conex cu $k + 1$ noduri şi ne fixăm atenţia asupra unui arbore al său. Există cel puţin un nod al acestui arbore la care apare o ramură incidentă (în caz contrar două sau mai multe ramuri ar fi incidente la fiecare nod ceea ce este imposibil deoarece această situaţie ar implica prezenţa unei bucle în structura arborelui). Eliminăm nodul cu o singură ramură incidentă şi obţinem un arbore cu k noduri. Prin ipoteză acest arbore are $k - 1$ ramuri. Introducînd nodul eliminat împreună cu ramura corespunzătoare se obţine rezultatul dorit. Se face convenţia ca în cele ce vor urma numărul nodurilor dintr-un graf să se noteze prin $n + 1$ şi deci numărul ramurilor unui arbore va fi n.

Dacă graful nu este conex, conceptul corespunzător unui arbore pentru un graf conex este numit *pădure* şi se defineşte ca o mulţime de arbori, cîte unul pentru fiecare parte separată a grafului. Dacă $p + 1$ reprezintă numărul părţilor separate ale unui graf care nu este conex iar $n + 1$ este numărul nodurilor, atunci pădurea va conţine $n - p$ ramuri. Aceasta se poate arăta aşa cum s-a făcut anterior pentru un graf conex. Complementul unei păduri este o copădure.

Matricea de incidenţă

Atunci cînd se dă un graf, de exemplu cel din fig. 2.3 se poate spune precis care sînt laturile incidente la fiecare nod precum şi care sînt orientările lor faţă de noduri. Invers, graful este complet determinat dacă se cunosc aceste informaţii (şi anume ce laturi sînt incidente la fiecare din noduri şi cum sînt orientate). Forma cea mai convenabilă de prezentare a acestor informaţii este cea matriceală.

Pentru un graf cu $n + 1$ noduri şi l laturi, ***matricea completă de incidenţă*** (sau mai complet, ***matricea completă de incidenţă noduri-laturi***) $\mathbf{A}_a = [a_{ij}]$ este o matrice dreptunghiulară de dimensiuni $(n + 1) \times l$ avînd valorile elementelor:

$a_{ij} = 1$ dacă latura j este incidentă la nodul i şi iese din nod;

$a_{ij} = -1$ dacă latura j este incidentă la nodul i şi intră în nod;

$a_{ij} = 0$ dacă latura j nu este incidentă la nodul i.

Indicele a la $\mathbf{A}_a$ se pune pentru a semnifica *toate* nodurile.

De exemplu, pentru graful din fig. 2.3, matricea completă de incidenţă este

$$A_a = \begin{array}{c} \text{noduri} \\ \downarrow \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \text{laturi} \rightarrow \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (17)$$

În acest exemplu se observă că în fiecare coloană apar o singură dată atît +1 cît şi —1. Aceasta este o proprietate generală pentru orice graf liniar deoarece fiecare latură este incidentă la numai două noduri şi orientată de la unul la altul. Dacă se adună toate celelalte linii la ultima linie se obţine o linie avînd numai zerouri, ceea ce arată că liniile nu sînt toate independente. Cel puţin una din ele poate fi eliminată, ea fiind suma cu semn schimbat a celorlalte. Aşa dar rangul matricei A_a nu poate fi mai mare decît $(n + 1) - 1 = n$.

Matricea obţinută din A_a prin eliminarea unei linii se numeşte matricea de incidenţă şi se notează prin **A**. (Pentru accentuare ea se numeşte uneori matricea *redusă* de incidenţă). Ea este de dimensiuni $n \times l$. Vom calcula acum rangul matricei **A** şi vom arăta cum se obţin submatricele sale nesingulare.

Pentru un graf dat se selectează un arbore. În matricea de incidenţă se aranjează coloanele astfel încît primele n coloane să corespundă ramurilor arborelui ales iar ultimele $l - n$ coloane să corespundă joncţiunilor.

Pentru graful dat ca exemplu, fie **A** matricea obţinută din (17) prin eliminarea ultimei linii. Se selectează arborele din fig. 2.4*a*. Atunci matricea **A** devine

$$A = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \end{array}}^{\text{ramuri}} \quad \overbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 6 \end{array}}^{\text{joncţiuni}} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array}. \qquad (18)$$

În general se poate face o partiţie a matricei **A** sub forma

$$A = [A_t \quad A_l]. \qquad (19)$$

unde $\mathbf{A}_t$ este o matrice pătrată de ordinul n ale cărei coloane corespund ramurilor iar $\mathbf{A}_l$ este o matrice de dimensiuni $n \times (l - n)$ ale cărei coloane corespund joncțiunilor.

În exemplul dat

$$\mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinantul acestei matrice este egal cu -1, astfel încît matricea este nesingulară. Deci, pentru acest exemplu, matricea $\mathbf{A}$ este de rang n.

Vom arăta acum că acest rezultat este valabil în general. Mai exact, dacă un graf are $n + 1$ noduri, rangul matricei de incidență este n. Acest rezultat se va stabili arătînd că *o submatrice de ordinul n a matricei* $\mathbf{A}$ *ale cărei coloane corespund ramurilor unui arbore este nesingulară.*

Demonstrație. Fie un graf conex și matricea sa completă de incidență $\mathbf{A}_a$. Prin eliminarea unei linii se obține matricea $\mathbf{A}$, care se scrie sub forma $[\mathbf{A}_t\ \mathbf{A}_l]$, unde $\mathbf{A}_t$ este o matrice pătrată de ordinul n, ale cărei coloane corespund ramurilor. Deoarece arborele este conex, există cel puțin o ramură incidentă la nodul corespunzător liniei eliminate. Coloana din $\mathbf{A}_t$ corespunzătoare acestei ramuri conține un singur element diferit de zero (egal cu ± 1). Deci det $\mathbf{A}_t$ este egal cu plus sau minus cofactorul acestui element. Matricea asociată acestui cofactor corespunde unui graf conex cu $n - 1$ laturi; această matrice nu conține nici una din liniile pe care coloana eliminată avea elemente nenule. Deoarece acest subgraf este conex, el trebuie să conțină cel puțin o ramură incidentă la unul din cele două noduri eliminate. Coloana din matrice corespunzătoare acestei ramuri conține numai un element diferit de zero. Deci determinantul său este egal cu plus sau minus cofactorul corespunzător, avînd o matrice asociată de ordinul $n - 2$. Se continuă acest raționament pînă ce se ajunge la un cofactor de ordinul 1. Acesta corespunde ultimului nod și, deoarece graful este conex, cofactorul este nenul. În concluzie s-a stabilit nu numai că det $\mathbf{A}_t$ este diferit de zero — deci matricea $\mathbf{A}_t$ este nesingulară — dar s-a găsit și valoarea sa care este ± 1. Deoarece o submatrice de ordinul n a matricei $\mathbf{A}_a$ este nesingulară rezultă că $\mathbf{A}_a$ este de rang n.

Acest rezultat este foarte util. Reciproca este deasemenea adevărată. Astfel, dîndu-se o submatrice nesingulară $n \times n$ a matricei de incidență $\mathbf{A}$, coloanele sale corespund ramurilor unui anumit arbore. Demonstrația se lasă pe seama cititorului.

Din cele de mai sus rezultă că determinantul oricărei submatrice nesingulare de ordinul n a matricei de incidență este egal cu $+1$ sau -1.

Pe baza rezultatelor precedente, se poate găsi acum numărul arborilor dintr-un graf. Fiindcă orice submatrice nesingulară de ordinul n

a matricei **A** corespunde unui arbore, tot ce trebuie să facem este să numărăm cîte astfel de submatrice nesingulare există. Aceasta implică evaluarea determinanţilor tuturor submatricelor $n \times n$ ale matricei **A**, ceea ce este foarte obositor. Problema poate fi simplificată utilizînd teorema Binet-Cauchy care a fost prezentată în Cap. 1. În conformitate cu această teoremă

det (**AA**′) = ∑ (produsele corespunzătoare determinanţilor principali din **A** şi **A**′) (20)

= ∑ (toţi determinanţii principali nenuli din **A**)²

= numărul arborilor.

A doua egalitate rezultă din faptul că o submatrice nesingulară a matricei **A**′ are acelaşi determinant ca şi submatricea corespunzătoare din **A**. Deoarece fiecare determinant principal nenul are valoarea ± 1, şi sînt atîţia determinanţi principali nenuli cîţi arbori sînt, rezultă a treia egalitate.

Astfel, pentru a găsi numărul arborilor unui graf este necesar numai să se evalueze det (**AA**′). Pentru exemplul din fig. 2.3, matricea de incidenţă este dată de relaţia (18). Deci numărul arborilor va fi

$$\det(\mathbf{AA}') = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 3 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 16.$$

Dîndu-se un graf se poate scrie uşor matricea de incidenţă. Problema poate fi formulată adesea şi invers: dîndu-se o matrice de incidenţă (sau matricea completă de incidenţă) să se traseze graful. În sens abstract matricea de incidenţă *defineşte* graful. Ea este o reprezentare a grafului,

în timp ce desenînd liniile ce unesc nodurile se obţine o altă reprezentare. Se doreşte să se obţină cea de a doua reprezentare din prima. Procedeul este foarte simplu. Dîndu-se matricea **A**, se plasează pe hîrtie un număr de noduri egal cu numărul de linii din matricea **A** şi un nod suplimentar. Se iau apoi coloanele pe rînd. În fiecare coloană apar cel mult două elemente nenule; se trasează o latură între cele două noduri care corespund elementelor nenule din coloana respectivă. Dacă pe o coloană apare un singur element nenul, latura se trasează între nodul corespunzător

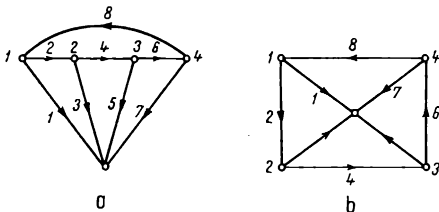


Fig. 2.5. Grafuri izomorfe.

liniei respective şi nodul suplimentar. Orientările laturilor sînt determinate de semnele elementelor respective.

Pentru a ilustra cele de mai sus, fie matricea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Două persoane diferite care şi-ar propune să traseze graful corespunzător ar putea ajunge la grafuri care arată în mod diferit, aşa cum se vede în fig. 2.5.

În aparenţă se pune problema : care este dispunerea iniţială corectă a nodurilor ? În fond însă, ambele grafuri au ca matrice de incidenţă matricea dată.

Vom spune că *două grafuri sînt izomorfe dacă ele au aceeaşi matrice de incidenţă.* Aceasta înseamnă că ele au acelaşi număr de noduri şi de laturi şi că există o corespondenţă biunivocă atît între nodurile cît şi între laturile lor. Aceste corespondenţe conduc la aceeaşi matrice de incidenţă.

Matricea buclelor

Matricea de incidenţă furnizează informaţii asupra incidenţei laturilor la noduri dar nu arată cum laturile formează bucle. Această informaţie se poate da convenabil tot sub formă matricеală. În acest scop vom înzestra mai întîi fiecare buclă a grafului cu o orientare care este dată prin ordonarea ciclică a nodurilor. Această ordine se indică uşor printr-o săgeată curbată, ca în fig. 2.6 unde se arată ordinea pentru două bucle.

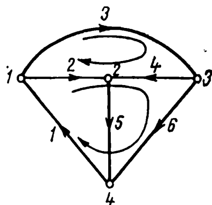


Fig. 2.6. Orientarea buclelor.

Pentru a evita încărcarea desenului, uneori se dau pur şi simplu listele ordonate ale nodurilor ce intervin în buclele respective. Pentru cele două bucle din fig. 2.6 aceste liste vor fi {*1*, *3*, *2*} şi {*1*, *2*, *3*, *4*}.

Pentru un graf cu $n + 1$ noduri şi l laturi, *matricea completă a buclelor* (denumită uneori şi *matricea completă a ciclurilor*) $\mathbf{B}_a = [b_{ij}]$ este o matrice dreptunghiulară cu l coloane şi atîtea linii cîte bucle sînt: elementele ei au următoarele valori:

$b_{ij} = 1$ dacă latura j face parte din bucla i şi orientările lor coincid;

$b_{ij} = -1$ dacă latura j face parte din bucla i şi orientările lor nu coincid;

$b_{ij} = 0$ dacă latura j nu face parte din bucla i.

Indicele a la $\mathbf{B}_a$ se pune din nou pentru a semnifica *toate* buclele.

Spre deosebire de cazul matricei complete de incidenţă (unde numărul liniilor era egal cu numărul nodurilor grafului), numărul de linii din matricea $\mathbf{B}_a$ nu se exprimă simplu în funcţie de n şi l. De exemplu, în fig. 2.6 apar şapte bucle specificate prin nodurile:

bucla 1 : {*1*, *3*, *2*}　　bucla 4 : {*1*, *3*, *4*}
bucla 2 : {*1*, *2*, *4*}　　bucla 5 : {*1*, *2*, *3*, *4*}
bucla 3 : {*2*, *3*, *4*}　　bucla 6 : {*1*, *2*, *4*, *3*}

bucla 7 : {*3*, *2*, *4*, *1*}

Matricea buclelor va fi deci

$$
\begin{array}{c}
\text{bucle} \qquad \text{laturi} \rightarrow \\
\mathbf{B}_a = \begin{array}{c} \downarrow \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\end{array}
\qquad (21)
$$

Mulţimea tuturor buclelor dintr-un graf este destul de cuprinzătoare, aşa cum s-a văzut din acest exemplu. Există o submulţime a mulţimii tuturor buclelor care are proprietăţi interesante şi care va fi examinată în cele ce urmează.

Dîndu-se un graf se selectează mai întîi un arbore şi se elimină toate joncţiunile. Se reintroduce apoi pe rînd fiecare joncţiune una cîte una. Prin reintroducerea fiecărei joncţiuni se va forma cîte o buclă. (Dacă nu ar fi aşa latura respectivă nu ar fi o joncţiune ci o ramură). Această buclă se caracterizează prin faptul că toate laturile sale mai puţin una sînt ramuri ale arborelui selectat. Buclele formate pe această cale se vor numi *bucle fundamentale*, sau *f*-bucle pe scurt. Orientarea unei bucle fundamentale se alege astfel încît să coincidă cu orientarea joncţiunii care o defineşte. Numărul buclelor fundamentale este egal cu numărul joncţiunilor; într-un graf cu l laturi şi $n + 1$ noduri acest număr este $l - n$.

De exemplu, fie arborele din fig. 2.4*b*. Buclele fundamentale care se obţin prin introducerea joncţiunilor pe rînd una cîte una sînt ilustrate în fig. 2.7 (observaţi orientările). Scriind matricea buclelor pentru buclele

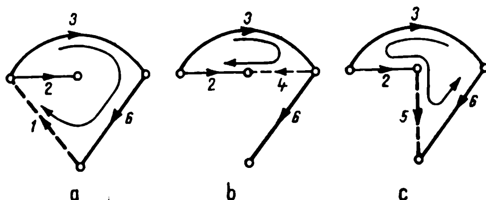


Fig. 2.7. Bucle fundamentale.

fundamentale se vor aranja coloanele în aceeaşi ordine ca şi pentru matricea de incidenţă redusă pentru acelaşi arbore; aşa dar se scriu mai întîi ramurile şi apoi joncţiunile. De asemenea, se dispun buclele în aceeaşi ordine ca şi coloanele joncţiunilor respective.

Matricea buclelor fundamentale va fi

$$\mathbf{B}_f = \overset{\begin{matrix} \text{ramuri} & & & \text{joncţiuni} & & \\ 2 & 3 & 6 & 1 & 4 & 5 \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}. \tag{22}$$

Indicele f se pune la $\mathbf{B}_f$ pentru a semnifica buclele fundamentale. Matricea pătrată formată de ultimele trei coloane corespunzătoare joncţiunilor este o matrice unitate; deci ea este nesingulară şi rangul matricei $\mathbf{B}_f$ este egal în acest exemplu cu numărul joncţiunilor adică $l - n$.

În general, matricea f-buclelor unui graf arbitrar conex poate fi scrisă sub forma

$$\mathbf{B}_f = [\mathbf{B}_t \ \mathbf{B}_l] = [\mathbf{B}_t \ \mathbf{U}]. \tag{23}$$

Matricea pătrată de dimensiuni $(l - n) \times (l - n)$ ale cărei coloane corespund joncţiunilor unui arbore particular va fi o matrice unitate datorită modului în care s-a obţinut. Aşa dar rangul matricei $\mathbf{B}_f$ va fi $l - n$.

Deoarece matricea buclelor fundamentale este o submatrice a matricei tuturor buclelor, rangul matricei $\mathbf{B}_a$ nu poate fi mai mic decît rangul matricei $\mathbf{B}_f$ care este $l - n$. Vom arăta în cele ce urmează că rangul matricei $\mathbf{B}_a$ nu este mai mare ca $l - n$ şi deci el este tocmai $l - n$. Pentru a face aceasta vom folosi un rezultat care este de o mare importanţă prin el însuşi.

Fie un graf pentru care coloanele matricelor $\mathbf{A}_a$ şi $\mathbf{B}_a$ sînt aranjate în aceeaşi ordine. În acest caz au loc relaţiile

$$\mathbf{A}_a \mathbf{B}_a' = 0 \tag{24}$$

şi

$$\mathbf{B}_a \mathbf{A}_a' = 0. \tag{25}$$

A doua relaţie rezultă din prima deoarece $\mathbf{B}_a \mathbf{A}_a' = (\mathbf{A}_a \mathbf{B}_a')'$. Relaţiile (24) şi (25) se numesc *relaţii de ortogonalitate* şi se demonstrează în cele ce urmează.

Matricele $\mathbf{A}_a$ şi $\mathbf{B}'_a$ sînt de forma

$$\mathbf{A}_a = \begin{matrix} & \text{laturi} \rightarrow \\ \text{noduri} & 1\ 2\ \ldots\ l \\ \downarrow & \\ 1 & \\ 2 & \\ \vdots & \\ n+1 & \end{matrix} \left[\quad \right] \qquad \mathbf{B}'_a = \begin{matrix} & \text{bucle} \rightarrow \\ \text{laturi} & 1\ 2\ \ldots \\ \downarrow & \\ 1 & \\ 2 & \\ \vdots & \\ l & \end{matrix} \left[\quad \right]$$

Să ne concentrăm atenţia asupra unei coloane oarecare din matricea $\mathbf{B}'_a$ şi asupra unei linii oarecare din matricea $\mathbf{A}_a$; adică asupra unei bucle şi a unui nod. Un nod oarecare aparţine sau nu buclei. Dacă nodul nu aparţine buclei, atunci nici o latură care face parte din buclă nu poate fi incidentă la acest nod. Aceasta înseamnă că toate elementele nenule din coloana lui $\mathbf{B}'_a$ corespund unor elemente nule în linia respectivă a lui $\mathbf{A}_a$; aşa dar produsul va fi zero. Dacă nodul aparţine buclei, atunci două laturi care fac parte din buclă vor fi incidente la acest nod. Dacă aceste două laturi sînt orientate la fel în raport cu nodul (ambele intră în nod sau ambele ies din nod) ele vor avea orientări opuse în raport cu bucla şi invers. În termeni matriceali, dacă elementele din linia lui $\mathbf{A}_a$ corespunzătoare celor două laturi sînt ambele $+1$ sau ambele -1, cele două elemente din coloana corespunzătoare a lui $\mathbf{B}'_a$ vor fi de semne opuse şi invers.Cînd se calculează produsul, rezultatul este zero. Teorema este deci demonstrată.

Cu ajutorul rezultatului precedent se poate acum determina rangul matricei $\mathbf{B}_a$ folosind teorema de anulare a lui Sylvester care a fost examinată în capitolul 1. În conformitate cu această teoremă, dacă produsul a două matrice este nul, suma rangurilor celor două matrice nu depăşeşte numărul coloanelor din prima matrice a produsului. În cazul de faţă, numărul coloanelor este egal cu numărul l al laturilor din graf. Deoarece rangul unei matrice este egal cu rangul matricei transpuse,

$$(\text{rang}\ \mathbf{A}_a) + (\text{rang}\ \mathbf{B}_a) \leqslant l. \tag{26}$$

Rangul matricei $\mathbf{A}_a$ s-a găsit anterior şi este n.

Deci

$$(\text{rang}\ \mathbf{B}_a) \leqslant (l - n). \tag{27}$$

Dar s-a stabilit anterior că rangul lui $\mathbf{B}_a$ nu este mai mic decît $l - n$ iar acum s-a stabilit că nu este mai mare decît $l - n$, deci *rangul matricei* $\mathbf{B}_a$ *este tocmai* $l - n$.

Observăm că eliminarea unui număr de linii din $\mathbf{A}_a$ sau a unui număr de coloane din $\mathbf{B}_a$ nu face inaplicabile relaţiile (26) şi (27). Fie **B** o submatrice oarecare din $\mathbf{B}_a$ avînd $l - n$ linii şi rangul $l - n$. (O astfel de matrice este matricea buclelor fundamentale $\mathbf{B}_f$). În acest caz relaţiile de ortogonalitate se pot scrie

$$\mathbf{A}\mathbf{B}' = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}\mathbf{A}' = \mathbf{0}. \tag{28}$$

2.2.4. Relaţii între submatricele din A şi B

Presupunem că se aranjează coloanele matricei **B** aşa cum s-au aranjat anterior şi coloanele matricei **A**, adică începînd cu ramurile unui arbore şi terminînd cu joncţiunile. Se poate face atunci o partiţie a matricei **B** sub forma

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_t \ \mathbf{B}_l] \tag{29}$$

unde $\mathbf{B}_l$ este o matrice pătrată de ordinul $l - n$. (Dacă **B** este matricea buclelor fundamentale atunci $\mathbf{B}_l$ este o matrice unitate, ca în (23)). Vom arăta acum că procedînd la partiţia matricei **B** aşa cum s-a arătat, submatricea $\mathbf{B}_l$, ale cărei coloane reprezintă joncţiunile unui arbore, va fi nesingulară.

Pentru demonstraţie se face o partiţie a matricei **A** ca în (19) şi se foloseşte relaţia (28) care se scrie

$$\mathbf{A}\mathbf{B}' = [\mathbf{A}_t \ \mathbf{A}_l]\begin{bmatrix}\mathbf{B}_t'\\ \mathbf{B}_l'\end{bmatrix} = \mathbf{A}_t\mathbf{B}_t' + \mathbf{A}_l\mathbf{B}_l' = 0. \tag{30}$$

Deoarece $\mathbf{A}_t$ este nesingulară,

$$\mathbf{B}_t' = -\mathbf{A}_t^{-1}\mathbf{A}_l\mathbf{B}_l' \ \text{sau} \ \mathbf{B}_t = -\mathbf{B}_l(\mathbf{A}_t^{-1}\mathbf{A}_l)'. \tag{31}$$

În final, matricea **B** devine

$$\mathbf{B} = [-\mathbf{B}_l(\mathbf{A}_t^{-1}\mathbf{A}_l)' \quad \mathbf{B}_l] = \mathbf{B}_l[-(\mathbf{A}_t^{-1}\mathbf{A}_l)' \ \mathbf{U}]. \tag{32}$$

Acum se va aplica acelaşi procedeu plecînd de la relaţia (30) dar de această dată pentru matricea $\mathbf{B}_f$ a buclelor fundamentale pentru un arbore dat, cu o partiţie a matricei $\mathbf{B}_f$ de forma

$$\mathbf{B}_f = [\mathbf{B}_{ft} \ \mathbf{U}], \tag{33}$$

unde s-a introdus indicele f la $\mathbf{B}_{ft}$ pentru a evita confuzii. Lăsînd detaliile de calcul pe seama cititorului, se obţine

$$\mathbf{B}_f = [-(\mathbf{A}_t^{-1}\mathbf{A}_l)' \quad \mathbf{U}]. \tag{34}$$

Prin comparaţia acestei relaţii cu relaţia (32) rezultă

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_l\,\mathbf{B}_f \text{ sau } \mathbf{B}_f = \mathbf{B}_l^{-1}\,\mathbf{B}. \tag{35}$$

Deoarece atît $\mathbf{B}$ cît şi $\mathbf{B}_f$ sînt de rang $l - n$, matricea $\mathbf{B}_l$ trebuie să fie nesingulară. Aceasta rezultă din relaţia (52) din capitolul 1. Afirmaţia este astfel demonstrată.

Reciproca este de asemenea adevărată; adică, dacă se face o partiţie a matricei buclelor $\mathbf{B}$ în două submatrice ca în (29), dintre care una pătrată şi nesingulară de ordin $l - n$, coloanele acestei matrice vor corespunde joncţiunilor unui arbore. Demonstraţia se lasă pe seama cititorului. (v. Problema 6).

Deoarece matricea $\mathbf{B}_l$ din (35) este nesingulară, matricele $\mathbf{B}$ şi $\mathbf{B}_f$ sînt *matrice echivalente*. (Pentru prezentarea matricelor echivalente v. Cap. 7) Deci, liniile din $\mathbf{B}$ sînt combinaţii liniare ale liniilor din $\mathbf{B}_f$ şi invers.

O serie de rezultate se mai obţin rezolvînd ecuaţia (30) în raport cu $\mathbf{A}_l$. Deoarece $\mathbf{B}_l$ este o matrice nesingulară, se obţine

$$\mathbf{A}_l = -\mathbf{A}_t\,\mathbf{B}_t'\,(\mathbf{B}_l')^{-1} = -\mathbf{A}_t\,\mathbf{B}_t'\,(\mathbf{B}_l^{-1})' = -\mathbf{A}_t\,(\mathbf{B}_l^{-1}\,\mathbf{B}_t)'. \tag{36}$$

Ultima egalitate rezultă din faptul că transpusa unui produs este produsul transpuselor în ordine inversă. Egalitatea precedentă rezultă din faptul că operaţiile de transpunere şi de inversare sînt comutative în cazul unei matrice nesingulare.

Ţinînd seama de rezultatul precedent, se poate face partiţia matricei $\mathbf{A}$ sub forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_t\,[\mathbf{U} - (\mathbf{B}_l^{-1}\,\mathbf{B}_t)']. \tag{37}$$

Comparînd cu relaţia (32) se vede că apare o formă similară cu matricea buclelor.

2.2.5. Mulţimea secţiunilor şi matricea secţiunilor

În exemplul din fig. 2.3 presupunem că, laturile 1 şi 5 au fost eliminate. Graful rezultat este prezentat în fig. 2.8*a*. (Prin „eliminarea" unei laturi înţelegem întreruperea ei, adică „deschiderea circuitului" lăsînd intacte nodurile la care ea este incidentă). Graful a rămas încă un graf conex. Dacă se elimină acum şi laturile *3* şi *4*, graful rezultat este reprezentat în fig. 2.8*b*. Graful nu mai este acum convex : el a fost „secţionat" în două părţi. Aceasta conduce la noţiunea de mulţime a secţiunilor, care se defineşte după cum urmează : *O mulţime de secţiuni*

este o mulţime de laturi ale unui graf conex a căror eliminare conduce la separarea grafului în două subgrafuri conexe, cu precizarea că eliminarea oricărei submulţimi de laturi din mulţimea secţiunilor lasă graful conex.

În graful dat ca exemplu, mulţimea secţiunilor este {1, 3, 4, 5}. Mulţimea {1, 2, 3} reprezintă de asemenea o mulţime de secţiuni. (Un nod izolat, care apare în acest caz, este considerat ca „o parte" din graf), În schimb mulţimea {1, 2, 3, 6} nu reprezintă o mulţime de secţiuni.

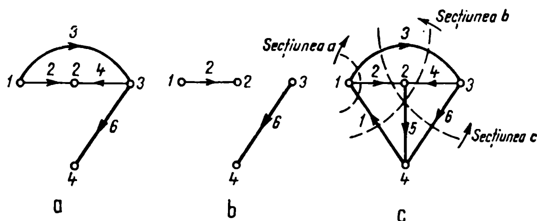


Fig. 2.8. Eliminarea unor laturi dintr-un graf.

deşi graful este separat în două părţi, deoarece eliminarea laturilor din submulţimea {1, 2, 3} nu conduce la un graf conex.

Mulţimea secţiunilor face o partiţie a nodurilor în două grupe, corespunzătoare celor două părţi ale grafului. Fiecare latură din mulţimea secţiunilor este incidentă la un nod dintr-un grup şi la un nod din celălalt grup. Orientarea mulţimii secţiunilor se face alegînd sensul de la o parte a grafului spre alta. Orientarea se poate indica pe graf ca în fig. 2.8*c*. Orientarea laturilor din mulţimea secţiunilor poate să fie aceeaşi sau opusă în raport cu orientarea mulţimii secţiunilor.

Aşa cum matricea de incidenţă caracterizează incidenţa şi orientarea laturilor în raport cu nodurile, matricea secţiunilor se poate defini pentru a descrie prezenţa laturilor într-o mulţime a secţiunilor precum şi orientarea lor în raport cu mulţimea secţiunilor. Vom defini matricea secţiunilor $\mathbf{Q}_a = [q_{ij}]$ ale cărei linii corespund secţiunilor şi ale cărei coloane corespund laturilor grafului. Elementele sale au următoarele valori:

$q_{ij} = 1$ dacă latura j face parte din mulţimea secţiunilor i şi orientările coincid;

$q_{ij} = -1$ dacă latura j face parte din mulţimea secţiunilor i şi orientările nu coincid;

$q_{ij} = 0$ dacă latura j nu face parte din mulţimea secţiunilor i.

Indicele a la $\mathbf{Q}_a$ se pune pentru a semnifica toate secţiunile.

Deoarece secţionînd toate laturile incidente la un nod se separă acest nod de restul grafului, această mulţime de laturi reprezintă o mulţime de secţiuni, *cu condiţia ca restul grafului să nu fie separat el însuşi*

în mai multe părți. În graful din fig. 2.9, secționînd laturile incidente la nodul *1* se va separa graful în trei părți, dintre care una este reprezentată de nodul *1*. Așa dar această mulțime de laturi nu reprezintă o mulțime de secțiuni.

Graful din fig. 2.9 este însă un graf deosebit, iar nodul *1* este un nod de tip special. Definim *un graf cu punct de articulație ca un graf în care există cel puțin un subgraf care are numai un singur nod comun cu*

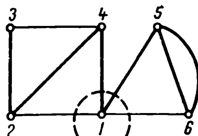


Fig. 2.9. Graf cu punct de articulație

subgraful complementar lui din graf. Un nod care are această proprietate se numește *punct de articulație* sau *pivot*. Într-un graf cu punct de articulație nodurile pot fi grupate în două mulțimi astfel încît orice cale de la un nod dintr-o mulțime la un nod din cealaltă mulțime trebuie să treacă prin nodul pivot. În fig. 2.9, nodurile *2, 3* și *4* formează o mulțime iar nodurile *5* și *6* alta. Dacă se secționează laturile incidente la nodul pivot, nu există nici o cale de la un nod dintr-o mulțime la un nod din cealaltă mulțime. Deci, graful obținut, fără a ține seama și de nodul pivot, nu va fi conex; așa dar mulțimea laturilor incidente la un nod pivot nu formează o mulțime de secțiuni. Pentru toate celelalte noduri, mulțimile de laturi incidente vor constitui mulțimi de secțiuni.

Pentru grafurile fără puncte de articulație, orientarea mulțimii secțiunilor obținută prin secționarea laturilor incidente la un nod se alege de la nod spre exterior. Așa dar, pentru grafurile fără puncte de articulație, matricea secțiunilor va include matricea de incidență.

Pentru exemplul din fig. 2.3, în afară de mulțimile secțiunilor formate din laturile incidente la fiecare nod, mai sînt încă trei mulțimi de secțiuni : {1, 3, 4, 5}, {2, 3, 5, 6} și {1, 2, 4, 6}. Matricea secțiunilor este :

$$
\begin{array}{c}
\text{secțiuni} \quad \text{laturi} \rightarrow \\
\downarrow \qquad\qquad\quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6
\end{array}
$$

$$
\mathbf{Q}_a = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
\begin{bmatrix}
-1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix}.
$$

unde primele patru linii sînt identice cu matricea $\mathbf{A}_a$ iar ultimele trei linii corespund mulţimilor de secţiuni {1, 3, 4, 5}, {2, 3, 5, 6} şi {1, 2, 4, 6} respectiv.

După cum s-a văzut matricea secţiunilor unui graf $\mathbf{Q}_a$ are mai multe linii decît matricea de incidenţă respectivă. Apare deci problema rangului matricei secţiunilor. Pentru a răspunde la această problemă considerăm o mulţime specială de secţiuni formată după cum urmează. Dîndu-se

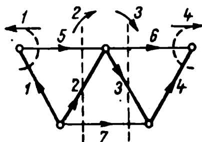


Fig. 2.10. Exemplu de secţiuni fundamentale.

un graf conex se selectează un arbore şi se alege o latură b_k a arborelui. Eliminînd această ramură, arborele se împarte în două. Toate joncţiunile care unesc aceste două părţi ale arborelui împreună cu b_k vor constitui mulţimi de secţiuni. Vom numi o astfel de mulţime *mulţime fundamentală de secţiuni* sau *f*-mulţime de secţiuni pe scurt. Pentru orice ramură există o mulţime fundamentală de secţiuni, deci pentru un graf cu $n + 1$ noduri (deci cu n ramuri) vor fi n mulţimi fundamentale de secţiuni. Orientarea unei mulţimi fundamentale de secţiuni se alege astfel încît să coincidă cu ramura care o defineşte.

Drept exemplu se consideră graful din fig. 2.10. Arborele este reprezentat prin linii îngroşate. Fiecare mulţime fundamentală de secţiuni este unic determinată. Să scriem matricea secţiunilor pentru mulţimea fundamentală de secţiuni, aranjînd coloanele astfel încît primele n coloane să corespundă ramurilor în aceeaşi ordine ca şi mulţimile de secţiuni asociate lor

$$\begin{array}{c} \quad\overbrace{1\;2\;3\;4}^{\text{ramuri}}\quad\overbrace{5\;6\;7}^{\text{joncţiuni}} \\ \mathbf{Q}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Indicele f la $\mathbf{Q}_f$ se pune pentru a semnifica secţiunile fundamentale. Submatricea pătrată formată cu primele patru coloane este o matrice unitate; ea este deci nesingulară şi rangul acestei matrice a secţiunilor este egal cu numărul liniilor sale sau cu numărul ramurilor dintr-un arbore.

Acest exemplu ilustrează trăsăturile specifice ale cazului general. În general, se aranjează coloanele matricei secţiunilor fundamentale pentru un arbore dat, astfel încît să apară mai întîi ramurile şi apoi joncţiunile, ramurile fiind în aceeaşi ordine ca şi mulţimile de secţiuni pe care le definesc. Se poate face atunci o partiţie a matricei de forma

$$\mathbf{Q}_f = [\mathbf{Q}_t \quad \mathbf{Q}_l] = [\mathbf{U} \quad \mathbf{Q}_l]. \tag{38}$$

Prin însăşi modul în care s-a constituit, submatricea $\mathbf{Q}_t$ de dimensiuni $n \times n$, ale cărei coloane corespund ramurilor, va fi o matrice unitate. Deci rangul matricei $\mathbf{Q}_f$ va fi n. Aceasta nu ne spune încă nimic

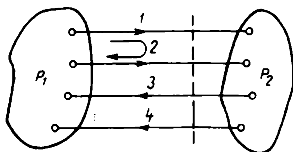


Fig. 2.11. O mulţime de secţiuni avînd un număr par de laturi comune cu o buclă.

despre rangul matricei $\mathbf{Q}_a$. Dar deoarece matricea secţiunilor fundamentale $\mathbf{Q}_f$ este o submatrice a matricei secţiunilor $\mathbf{Q}_a$, rangul matricei $\mathbf{Q}_a$ nu poate fi inferior rangului matricei $\mathbf{Q}_f$, adică rang $\mathbf{Q}_a \geqslant n$.

Cînd s-a căutat rangul matricei $\mathbf{B}_a$ a fost necesar să se utilizeze relaţia de ortogonalitate $\mathbf{A}_a\mathbf{B}_a' = 0$. Dar $\mathbf{Q}_a$ este o matrice care conţine matricea $\mathbf{A}_a$ ca o submatrice şi este de presupus că o relaţie similară are loc şi pentru $\mathbf{Q}_a$ în locul lui $\mathbf{A}_a$[1]. Acest lucru este adevărat şi se poate demonstra pe aceeaşi cale ca şi mai înainte. Este numai necesar să se stabilească faptul că, dacă o mulţime de secţiuni are o latură comună cu o buclă, ea trebuie să aibă şi alte laturi în comun astfel încît numărul lor să fie par. Acest fapt este uşor de constatat examinînd fig. 2.11, in care s-a pus în evidenţă o mulţime de secţiuni care separă graful în două părţi. Presupunem că latura 1 a mulţimii secţiunilor face parte dintr-o buclă. Dacă plecăm din extremitatea ei situată în P_1 şi parcurgem această latură pînă ajungem în P_2 va fi necesar să revenim în P_1 pe altă latură din mulţimea secţiunilor pentru a forma o cale închisă. Pentru a obţine o cale închisă pot fi necesare mai multe treceri succesive între P_1 şi P_2, dar fiecare trecere implică parcurgerea a două laturi din mulţimea secţiunilor. Dacă aceste laturi au aceeaşi orientare în raport cu mulţimea secţiunilor, ele vor avea orientări opuse în raport cu bucla

[1] Această afirmaţie este valabilă numai în cazul unui graf fără puncte de articulaţie.

şi reciproc. Aşa dar, prin acelaşi raţionament ca şi cel utilizat pentru a obţine relaţia (24), rezultă că:

$$\mathbf{Q}_a \mathbf{B}' = 0 \text{ şi } \mathbf{B}\,\mathbf{Q}_a' = 0. \tag{39}$$

Acum poate fi determinat rangul matricei $\mathbf{Q}_a$. Utilizînd teorema de anulare a lui Sylvester şi cunoscînd rangul matricei **B**, rezultă că rangul matricei $\mathbf{Q}_a$ nu depăşeşte valoarea n. (Lăsînd la o parte detaliile) şi deoarece matricea $\mathbf{Q}_f$ este o submatrice a matricei $\mathbf{Q}_a$ care are rangul n, rangul matricei $\mathbf{Q}_a$ nu poate fi mai mic decît n. (O asemenea posibilitate o reprezintă matricea secţiunilor fundamentale, $\mathbf{Q}_f$). Atunci

$$\mathbf{Q}\mathbf{B}' = \mathbf{0} \text{ şi } \mathbf{B}\mathbf{Q}' = \mathbf{0}. \tag{40}$$

În particular, fie această matrice **Q** chiar matricea $\mathbf{Q}_f$ care poate fi scrisă ca în relaţia (38). Atunci

$$[\mathbf{U} \quad \mathbf{Q}_l]\begin{bmatrix} \mathbf{B}_t' \\ \mathbf{B}_l' \end{bmatrix} = \mathbf{B}_t' + \mathbf{Q}_l \mathbf{B}_l' = 0$$

sau

$$\mathbf{Q}_l = -\,\mathbf{B}_t'(\mathbf{B}_l')^{-1} = -\,(\mathbf{B}_l^{-1}\,\mathbf{B}_t)' \tag{41}$$

şi, în final,

$$\mathbf{Q}_f = [\mathbf{U} \quad -(\mathbf{B}_l^{-1}\,\mathbf{B}_t)']. \tag{42}$$

Din această expresie rezultă un fapt foarte interesant. Comparînd-o cu relaţia (37) se obţine

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_t\,\mathbf{Q}_f \text{ sau } \mathbf{Q}_f = \mathbf{A}_t^{-1}\,\mathbf{A} = [\mathbf{U} \quad \mathbf{A}_t^{-1}\,\mathbf{A}_l]. \tag{43}$$

Deoarece matricea $\mathbf{A}_t$ este o matrice nesingulară, matricea de incidenţă a unui graf este echivalentă cu matricea secţiunilor fundamentale pentru un anumit arbore. Astfel, liniile matricei **A** reprezintă combinaţii liniare ale liniilor matricei $\mathbf{Q}_f$ şi reciproc.

Grafuri planare

Toate proprietăţile grafurilor pe care le-am examinat pînă acum nu depind de caracteristici specifice de ordin geometric sau topologic ale grafului ci numai de caracteristicile sale abstracte. Vom examina acum o serie de proprietăţi care depind de structura topologică a grafului.

Topologic, grafurile pot fi desenate sau reprezentate pe un plan. Uneori ele se pot desena astfel încît laturile să nu se intersecteze. Alteori acest lucru nu este posibil. Vom defini un *graf planar* ca fiind un graf ce poate fi dispus pe un plan astfel încît nici o pereche de laturi să nu se intersecteze (adică să nu se întîlnească în alte puncte decît nodurile). În fig. 2.12 se dau două grafuri cu același număr de laturi și noduri; primul este planar; al doilea, neplanar.

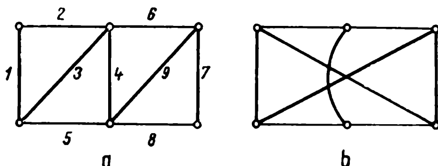


Fig. 2.12. Graf planar (*a*) și graf neplanar (*b*).

Laturile unui graf planar separă planul în mici regiuni; fiecare din ele se numește un *ochi*. Mai precis, un ochi este o secvență de laturi ale unui graf planar care nu includ vre-o altă latură a grafului în interiorul regiunii mărginite de aceste laturi. În fig. 2.12*a* laturile {1, 2, 3} formează un ochi în timp ce laturile {1, 2, 4, 5} nu formează un ochi. Laturile exterioare ale grafului separă planul în două regiuni: regiunea finită în care se află celelalte laturi ale grafului și o regiune infinită. Regiunea infinită poate fi privită ca „interiorul" acestei mulțimi de laturi. Ea este complementara regiunii finite. Așadar această mulțime de laturi poate fi considerată tot ca un ochi și se numește *ochiul exterior*. În fig. 2.12*a* ochiul exterior este format din secvența de laturi {1, 2, 6, 7, 8, 5}. Totuși, atunci cînd se enumeră ochiurile unui graf, ochiul exterior nu este luat în considerație.

Mulțimea ochiurilor unui graf planar constituie o mulțime specială de bucle. Se pune problema dacă ochiurile pot reprezenta buclele fundamentale pentru un anumit arbore, sau, într-o formulare diferită, dacă se poate găsi un arbore pentru care buclele fundamentale să fie ochiuri? Pentru a răspunde la această problemă se observă că fiecare buclă fundamentală conține o latură (ramură) care nu face parte din altă buclă fundamentală. Așadar, orice latură care face parte simultan din două ochiuri nu poate fi o joncțiune ci trebuie să fie o ramură. Se poate găsi cu siguranță un arbore pentru care ochiurile să reprezinte bucle fundamentale dacă laturile comune ochiurilor nu formează o cale deschisă. Pentru unele grafuri planare, acest lucru este posibil, pentru altele nu.

Pentru a ilustra aceasta, în fig. 2.13 se dau două grafuri foarte asemănătoare, avînd acelaşi număr de noduri, de laturi şi de ochiuri. Laturile comune între ochiuri sînt figurate cu linii îngroşate. Acestea trebuie să fie ramurile unui arbore dacă ochiurile formează bucle fundamentale. În primul graf aceste laturi formează o buclă şi deci rezultatul dorit nu este cu putinţă în timp ce el este posibil pentru al doilea graf.

Aceste considerente completează prezentarea grafurilor liniare dată anterior.

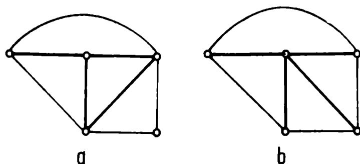


Fig. 2.13. Ochiurile pot fi sau nu bucle fundamentale pentru un arbore dat.

2.3. TEOREMELE DE BAZĂ ALE REŢELELOR (CIRCUITELOR) ELECTRICE

În linii mari, o reţea electrică este formată prin interconectarea a două sau mai multor elemente sau laturi. Aceste laturi sînt formate din elemente de tipul celor descrise în capitolul 1 sau alte componente (neliniare, cu parametri variabili etc). Fiecare latură are o variabilă reprezentînd tensiunea şi o variabilă reprezentînd curentul iar aceste variabile sînt legate de alte variabile similare prin relaţii specifice.

Pentru a introduce grafurile liniare în analiza reţelelor electrice, vom da următoarea definiţie:

O *reţea electrică* este un graf liniar orientat în care fiecărei laturi i se asociază două funcţii de timp: curentul $i(t)$ şi tensiunea $v(t)$. Aceste funcţii trebuie să satisfacă teoremele lui Kirchhoff.

Teorema lui Kirchhoff pentru curent

Teorema lui Kirchhoff pentru curent (prescurtat TKC) stabileşte că în orice reţea electrică suma tuturor curenţilor ce pleacă dintr-un nod este zero în fiecare moment de timp şi pentru fiecare nod al reţelei. Pentru o

rețea conexă (graf) cu $n+1$ noduri și l laturi ecuațiile ce rezultă din TKC se pot scrie sub forma

$$\sum_{k=1}^{l} a_{jk} i_k(t) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, (n+1), \tag{44}$$

unde a_{jk} au aceeași definiție ca și elementele matricei de incidență. Așadar, sub formă matriceală TKC devine

$$\mathbf{Ai}(t) = 0 \text{ sau } \mathbf{AI}(s) = 0, \tag{45}$$

unde $\mathbf{A}$ este matricea de incidență, $\mathbf{i}(t)$ este o matrice coloană ce reprezintă curenții laturilor iar $\mathbf{I}(s)$ este matricea coloană a transformatelor Laplace ale curenților laturilor

$$\mathbf{i}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1(t) \\ \mathbf{i}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{i}_l(t) \end{bmatrix} \text{ și } \mathbf{I}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(s) \\ \mathbf{I}_2(s) \\ \vdots \\ \mathbf{I}_l(s) \end{bmatrix}; \tag{46}$$

(Desigur are loc și relația $\mathbf{A}_a\mathbf{i}(t) = 0$ dacă se includ toate nodurile). Deoarece rangul matricei $\mathbf{A}$ este n, toate ecuațiile din acest sistem sînt liniar independente.

Fie o partiție a matricei de incidență de forma $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_t \; \mathbf{A}_l]$ corespunzătoare unui anumit arbore și o partiție similară pentru matricea $\mathbf{i}$

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_t \\ \mathbf{i}_l \end{bmatrix}.$$

În aceste condiții TKC devine

$$[\mathbf{A}_t \; \mathbf{A}_l] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_t \\ \mathbf{i}_l \end{bmatrix} = \mathbf{A}_t \mathbf{i}_t + \mathbf{A}_l \mathbf{i}_l = 0 \tag{47}$$

sau

$$\mathbf{i}_t(t) = -\mathbf{A}_t^{-1} \mathbf{A}_l \mathbf{i}_l(t) \tag{48}$$

deoarece $\mathbf{A}_t$ este o matrice nesingulară.

Relația (48) arată că pentru un arbore dat, curenții ramurilor sînt determinați de curenții joncțiunilor prin relații liniare. Aceasta înseamnă că, dacă se pot determina curenții joncțiunilor prin alte mijloace, atunci

curenţii ramurilor sînt cunoscuţi fiind daţi de relaţia (48). Dintre toţi curenţii laturilor în număr de l, numai $l-n$ curenţi trebuie determinaţi independent.

Utilizînd relaţia (48), matricea curenţilor se poate scrie

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_t \\ \mathbf{i}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_t^{-1}\mathbf{A}_l \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} \mathbf{i}_l. \tag{49}$$

Comparînd matricea din dreapta semnului egal cu matricea din relaţia (34) şi ţinînd seama de relaţia (35), rezultă

$$\mathbf{i} = \mathbf{B}_f' \mathbf{i}_l \text{ sau } \mathbf{I}(s) = \mathbf{B}_f' \mathbf{I}_l(s) \tag{50a}$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{B}' (\mathbf{B}_l^{-1})' \mathbf{i}_l. \tag{50b}$$

Fiecare dintre aceste ecuaţii exprimă curenţii laturilor unei reţele în funcţie de curenţii joncţiunilor corespunzătoare unui arbore, prin intermediul unei transformări care se numeşte *transformarea pe bucle*. Curenţii joncţiunilor unui arbore joacă rolul *bazei* pentru toţi curenţii. Vom căuta acum şi alţi curenţi decît curenţii joncţiunilor unui arbore care să reprezinte o bază.

Se poate obţine un alt sistem de ecuaţii echivalent cu TKC din (45). (Amintim că două sisteme de ecuaţii sînt echivalente dacă ele au aceeaşi soluţie). Fie o mulţime particulară de secţiuni ale reţelei. Ea va separa reţeaua în două părţi, P_1 şi P_2. Scriem ecuaţiile ce rezultă din TKC pentru toate nodurile din P_1 şi examinăm coloanele. Dacă ambele capete ale unei laturi sînt incidente la noduri din P_1, coloana corespunzătoare va conţine două elemente nenule, unul $+1$ şi altul -1. Dacă un capăt al unei laturi este incident la un nod din P_1 iar alt capăt la un nod din P_2 (dacă latura face parte din mulţimea secţiunilor) coloana respectivă va avea un singur element nenul. Presupunem că se adună aceste ecuaţii; numai curenţii mulţimii secţiunilor vor avea coeficienţi nenuli în sumă. Rezultatul se va numi *ecuaţia secţiunii*. Ecuaţia secţiunii este deci o combinaţie liniară a ecuaţiilor ce rezultă din TKC. Sistemul de ecuaţii pentru toate secţiunile va fi $\mathbf{Q}_a\mathbf{i}(t) = \mathbf{0}$, unde $\mathbf{Q}_a$ este matricea secţiunilor definită anterior pentru toate secţiunile. Dar rangul matricei $\mathbf{Q}_a$ este n, care este mai mic decît numărul ecuaţiilor. Deci aceste ecuaţii nu sînt independente. Fie $\mathbf{Q}$ matricea secţiunilor pentru n mulţimi de secţiuni şi de rang n. (O posibilitate o reprezintă matricea secţiunilor fundamentale, adică $\mathbf{Q}_f$). Atunci relaţiile

$$\mathbf{Q}\,\mathbf{i}(t) = \mathbf{0} \text{ sau } \mathbf{Q}\,\mathbf{I}(s) = \mathbf{0} \tag{51}$$

sînt echivalente cu ecuaţiile scrise pe baza TKC.

În particular, dacă se face o partiție a matricei secțiunilor fundamentale de forma $\mathbf{Q}_f = [\mathbf{U} \quad \mathbf{Q}_l]$, atunci

$$\mathbf{Q}_f \, \mathbf{i} = [\mathbf{U} \quad \mathbf{Q}_l]\begin{bmatrix} \mathbf{i}_t \\ \mathbf{i}_l \end{bmatrix} = \mathbf{i}_t + \mathbf{Q}_l \, \mathbf{i}_l = 0$$

sau

$$\mathbf{i}_t = - \mathbf{Q}_l \, \mathbf{i}_l, \tag{52}$$

adică se obține tocmai relația (48) dacă se ține seama de relația (43). Această expresie poate fi introdusă în matricea curenților din relația (48) și se obține

$$\mathbf{i}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_t \\ \mathbf{i}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_l \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} \mathbf{i}_l(t) = \mathbf{B}'_f \, \mathbf{i}_l(t) \text{ sau } \mathbf{I}(s) = \mathbf{B}'_f \, \mathbf{I}_l(s). \tag{53}$$

(Pentru calculele intermediare v. Problema 17). Aceasta este din nou o transformare pe bucle identică cu (50*a*). Se observă că matricea transformării este transpusă matricei buclelor fundamentale.

După cum s-a văzut, curenții joncțiunilor corespunzătoare unui arbore reprezintă curenții de bază în funcție de care se pot exprima toți curenții rețelei. O altă mulțime de curenți de bază o reprezintă curenții buclelor, care sînt niște curenți fictivi ce circulă pe contururile formate de buclele închise. Acest fapt se poate ilustra mai bine prin intermediul unui exemplu. În fig. 2.14 s-a redesenat graful din fig. 2.13*a*, cu nodurile și laturile numerotate convenabil. Acest graf este planar, dar nu se poate găsi un arbore căruia să-i corespundă ochiuri care să formeze bucle fundamentale, așa cum s-a arătat anterior. Fie matricea buclelor scrisă pentru buclele specificate în figură. (Această mulțime de bucle nu reprezintă nici bucle fundamentale și nici ochiuri). Orientarea buclelor este dată prin ordonarea nodurilor; ea este indicată de asemenea și prin săgețile din figură. Matricea **B** va fi

bucle ↓ / laturi →	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	1	0	−1	0
2	0	1	1	1	−1	0	0	0
3	0	0	1	1	0	−1	0	0
4	−1	−1	0	0	0	0	0	1

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

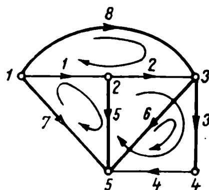
iar transpusa ei

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{54}$$

(Această matrice este de rang 4 deoarece submatricea formată de ultimele patru coloane este nesingulară). Presupunem acum că definim o serie de curenţi i_{m1}, i_{m2} etc., care parcurg buclele din matricea **B** cu sensuri corespunzătoare orientărilor acestor bucle. Prin examinarea grafului se pot exprima curenţii laturilor în funcţie de aceşti curenţi ciclici după cum urmează:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{i}_4 \\ \mathbf{i}_5 \\ \mathbf{i}_6 \\ \mathbf{i}_7 \\ \mathbf{i}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{m1} \\ \mathbf{i}_{m2} \\ \mathbf{i}_{m3} \\ \mathbf{i}_{m4} \end{bmatrix}. \tag{55}$$

Comparînd matricea acestei transformări cu transpusa matricei **B** din (54) se constată că ele sînt identice.



Buclele (specificate prin enumerarea nodurilor)

1 — {1, 2, 5}
2 — {2, 3, 4, 5}
3 — {3, 4, 5}
4 — {1, 3, 2}

Fig. 2. 14. Exemplu ilustrativ.

Acest rezultat este valabil în general. Într-adevăr se observă că fiecare linie a matricei **B** se referă la incidenţa laturilor la bucle iar fiecare coloană corespunde unei laturi. Elementele unei coloane arată din ce bucle face parte şi ce orientare are latura respectivă. Dacă se definesc curenţii ciclici pe bucle, avînd orientările corespunzătoare acestora, fiecare coloană din matricea **B** va reprezenta curentul laturii respective în funcţie de curenţii buclelor.

Într-un graf cu l laturi şi $n + 1$ noduri, se notează prin $\mathbf{i}_m$ vectorul curenţilor buclelor definiţi pentru cele $l - n$ bucle pentru care matricea **B** este de rang $l - n$. Matricea curenţilor laturilor $\mathbf{i}$ se poate exprima în funcţie de matricea $\mathbf{i}_m$ prin relaţia

$$\mathbf{i} = \mathbf{B}'\mathbf{i}_m. \tag{56}$$

Pentru o reţea planară, curenţii ochiurilor formează o bază adecvată (demonstraţia se lasă pe seama cititorului). În acest caz transformarea dată prin relaţia (56) se numeşte *transformarea pe ochiuri.*

Teorema lui Kirchhoff pentru tensiune

A doua teoremă a lui Kirchhoff este *teorema lui Kirchhoff pentru tensiune* (prescurtat TKT) şi stabileşte că *în orice reţea electrică suma tensiunilor tuturor laturilor dintr-o buclă, cu semne corespunzătoare orientării buclei, este zero la fiecare moment de timp şi pentru orice buclă a reţelei.* Pentru o reţea conexă cu l laturi, ecuaţiile ce rezultă din TKT se pot scrie sub forma

$$\sum_{k=1}^{l} b_{jk} v_k(t) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \text{(toate buclele)}, \tag{57}$$

unde b_{jk} au aceeaşi definiţie ca şi elementele matricei buclelor. Aşadar, sub formă matriceală TKT devine

$$\mathbf{B}\mathbf{v}(t) = 0 \text{ sau } \mathbf{B}\mathbf{V}(s) = 0, \tag{58}$$

unde **B** este matricea buclelor, $\mathbf{v}(t)$ este o matrice coloană ce reprezintă tensiunile laturilor iar $\mathbf{V}(s)$ este matricea coloană a transformatelor Laplace ale tensiunilor laturilor

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_l(t) \end{bmatrix} \text{ şi } \mathbf{V}(s) = \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_l(s) \end{bmatrix}. \tag{59}$$

Dacă se includ toate buclele reţelei, matricea coeficienţilor va fi $\mathbf{B}_a$. Deoarece rangul matricei $\mathbf{B}_a$ este $l - n$, ecuaţiile din acest sistem nu sînt independente.

Fie matricea $\mathbf{B}$ cu $l - n$ linii şi de rang $l - n$. (O posibilitate o reprezintă matricea buclelor fundamentale). Se poate face o partiţie a acestei matrice de forma $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_t \;\; \mathbf{B}_l]$ corespunzătoare unui anumit arbore şi fie o partiţie similară pentru matricea $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_t \\ \mathbf{v}_l \end{bmatrix}.$$

În aceste condiţii TKT devine

$$[\mathbf{B}_t \;\; \mathbf{B}_l]\begin{bmatrix} \mathbf{v}_t \\ \mathbf{v}_l \end{bmatrix} = \mathbf{B}_t \mathbf{v}_t + \mathbf{B}_l \mathbf{v}_l = 0$$

din care rezultă

$$\mathbf{v}_l = -\mathbf{B}_l^{-1}\mathbf{B}_t \mathbf{v}_t \quad \text{sau} \quad \mathbf{v}_l = -\mathbf{B}_{lt} \mathbf{v}_t \tag{60}$$

deoarece $\mathbf{B}_l$ este o matrice nesingulară.

Relaţia (60) arată că, pentru un arbore dat, tensiunile joncţiunilor sînt determinate de tensiunile ramurilor prin relaţii liniare. Dacă tensiunile ramurilor se pot determina prin alte mijloace, atunci tensiunile joncţiunilor sînt cunoscute fiind date de relaţia (60). Dintre toate tensiunile laturilor în număr de l numai n tensiuni, reprezentînd tensiunile ramurilor, trebuie determinate independent.

Utilizînd relaţia (60), matricea tensiunilor se poate scrie

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_t \\ \mathbf{v}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ -\mathbf{B}_l^{-1}\mathbf{B}_t \end{bmatrix} \mathbf{v}_t(t) = \mathbf{Q}_f' \mathbf{v}_t(t) \quad \text{sau} \quad \mathbf{V}(s) = \mathbf{Q}_f' \mathbf{V}_t(s). \tag{61}$$

Ultima egalitate rezultă din relaţia (42).

O altă expresie pentru $\mathbf{v}$ se obţine pe baza relaţiei (43) şi anume

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}'(\mathbf{A}_t^{-1})' \mathbf{v}_t. \tag{62}$$

Dacă $\mathbf{A}_t$ este o matrice unitară, atunci

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{A}' \mathbf{v}_t(t). \tag{63}$$

Astfel, matricea tensiunilor laturilor se exprimă prin matricea tensiunilor ramurilor unui arbore prin intermediul unei transformări. Matri-

cea transformării poate fi transpusa matricei secţiunilor fundamentale $\mathbf{Q}_f$ sau transpusa matricei $\mathbf{A}$ cînd $\mathbf{A}_t$ este o matrice unitate. (v. Problema 5, referitoare la condiţia ca $\mathbf{A}_t$ să fie o matrice unitate). Tensiunile ramurilor unui arbore reprezintă o bază pentru exprimarea tuturor tensiunilor. Deoarece tensiunea unei ramuri este diferenţa de potenţial între o pereche de noduri, tensiunile ramurilor sînt *tensiuni între perechi de noduri*. Nu toate tensiunile perechilor de noduri reprezintă însă tensiunile ramurilor. Se pune problema găsirii unei mulţimi de tensiuni între perechi de noduri care, fără să reprezinte neapărat tensiunile ramurilor unui arbore să constituie totuşi o bază pentru exprimarea tuturor tensiunilor. Să examinăm această problemă mai departe.

Dacă se consideră un nod comun pentru fiecare pereche de noduri, atunci toate tensiunile între perechi de noduri vor reprezenta tensiunile nodurilor în raport cu nodul comun sau de referinţă. Aceste tensiuni se numesc *tensiunile nodurilor*. Deoarece fiecare latură a unui graf este incidentă la două noduri, tensiunea ei va fi diferenţa tensiunilor celor două noduri (măsurate în raport cu nodul de referinţă al cărui potenţial se consideră nul). Astfel, toate tensiunile unui graf se pot exprima în funcţie numai de tensiunile nodurilor, care sînt în număr de n.

Cînd se scrie matricea $\mathbf{A}$ a unui graf, se omite unul din noduri. Dacă acest nod este ales ca nod de referinţă pentru tensiuni, atunci matricea tensiunilor laturilor se poate exprima în funcţie de matricea tensiunilor nodurilor

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{A}'\mathbf{v}_n(t) \text{ sau } \mathbf{V}(s) = \mathbf{A}'\mathbf{V}_n(s). \tag{64}$$

Aceasta rezultă din faptul că fiecare coloană a matricei $\mathbf{A}$ se referă la o anumită latură. Elementele nenule dintr-o coloană specifică nodurile la care această latură este incidentă, semnul indicînd orientarea. Deci fiecare coloană a matricei $\mathbf{A}$ va reprezenta tensiunea laturii respective în funcţie de tensiunile nodurilor.

Exemplul următor va ilustra acest rezultat. În fig. 2.15 se dă graful din fig. 2.14 cu o numerotare diferită a laturilor. Matricea $\mathbf{A}$, omiţînd nodul 5, este

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

şi

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (65)$$

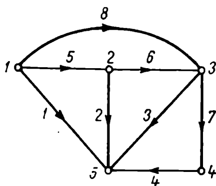


Fig. 2.15. Tensiunile laturilor în funcţie de tensiunile nodurilor.

Fie nodul 5 nodul de referinţă şi fie v_{n1}, v_{n2}, v_{n3} şi v_{n4} tensiunile celorlalte noduri în raport cu acest nod. Din examinarea grafului, se pot exprima tensiunile laturilor în funcţie de tensiunile nodurilor astfel

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ v_{n3} \\ v_{n4} \end{bmatrix}. \qquad (66)$$

Matricea acestei transformări este transpusa matricei **A**.

Se observă că primele 4 coloane ale matricei **A** formează o matrice unitate. Acest fapt este în concordanţă cu Problema 5, deoarece arborele

format din laturile *1*, *2*, *3* şi *4* este un arbore stelat. De aceea tensiunile între perechile de noduri definite pentru arborele considerat în acest caz sînt aceleaşi cu tensiunile nodurilor (în raport cu nodul *5* ca nod de referinţă). Pentru a înţelege şi mai clar situaţia vom alege acum nodul *4* drept nod de referinţă. În acest caz nu mai există un arbore stelat cu nodul *4* ca nod comun. Matricea **A** va fi aceeaşi ca şi în relaţia (65) dar cu ultima linie înlocuită prin [−1 −1 −1 −1 0 0 0 0]. Pentru orice arbore s-ar alege, matricea $\mathbf{A}_t$ nu va fi o matrice unitate şi relaţia (63) nu este aplicabilă. Totuşi relaţia (64), în raport cu noile tensiuni ale nodurilor este în continuare valabilă. Propunem cititorului să verifice aceasta.

Relaţiile pe laturi

Cele două teoreme ale lui Kirchhoff reprezintă relaţii între curenţii şi tensiunile laturilor unei reţele, independente de natura specifică acestor laturi, indiferent dacă ele sînt formate din condensatoare, rezistenţe, surse, etc. Ele se aplică tot atît de bine pentru elementele liniare cît şi pentru elemente neliniare, pentru elemente cu parametrii variabili în timp sau pentru elemente cu parametrii constanţi. Aceste relaţii reprezintă constrîngeri dictate de structura topologică a reţelei.

Totuşi, modul în care tensiunea unei laturi particulare este legată de curentul corespunzător depinde de elementele care formează latura respectivă. Există o mare varietate de posibilităţi în alegerea elementelor care formează o latură a reţelei. O posibilitate este să se considere fiecare element (rezistenţă, condensator, etc.) drept o latură. În acest caz trebuie să se considere drept noduri toate punctele de legătură dintre elementele conectate în serie. Uneori este convenabil să se considere elementele conectate în serie sau elementele conectate în paralel drept o singură latură. În reţeaua din fig. 2.16, elementele R_a şi L_a conectate în serie pot fi considerate ca o singură latură sau ca două laturi distincte.

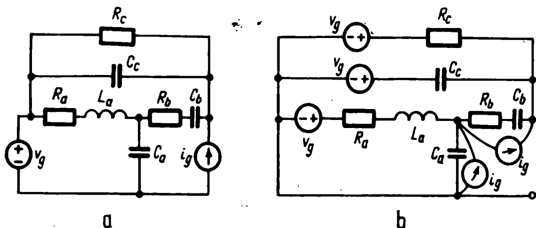


Fig. 2.16. Deplasarea surselor de tensiune şi a surselor de curent.

O varietate similară apare şi în tratarea surselor. O sursă de tensiune se numeşte *însoţită* dacă are un element pasiv conectat în serie. Similar, o sursă de curent se numeşte însoţită dacă are un element pasiv conectat în paralel. În fig. 2.16*a*, nici o sursă nu este însoţită. Pentru o latură pasivă atît curentul cît şi tensiunea reprezintă mărimi necunoscute ale căror variaţii în timp urmează a fi determinate. În cazul unor surse, tensiunea sau respectiv curentul sînt cunoscute. Din această cauză nu se pot face afirmaţii general valabile despre numărul de necunoscute în funcţie de numărul de laturi ale reţelei, dacă sursele neînsoţite sînt considerate drept laturi. În acest scop este recomandabil să se folosească anumite echivalenţe care vor fi prezentate în cele ce urmează şi care permit eliminarea surselor neînsoţite.

Fie reţeaua din fig. 2.16*b*. Sursa v_g a fost deplasată printr-unul din terminalele sale în fiecare latură incidentă la acest terminal, menţinîndu-se polaritatea şi scurt-circuitînd poziţia ei iniţială. Prin aplicarea TKT pentru orice buclă se vede că aceste ecuaţii nu se schimbă. Dar în această situaţie fiecare sursă este însoţită; ea este în serie cu o latură pasivă. În cazul unei surse de curent, aceasta a fost deplasată astfel încît să apară conectată în paralel cu fiecare latură din bucla ce conţine sursa originală, menţinîndu-se polaritatea şi lăsînd poziţia ei iniţială în gol. Prin aplicarea TKC pentru toate nodurile se vede că aceste ecuaţii rămîn neschimbate. Soluţiile pentru variabilele asociate celorlalte laturi vor fi aceleaşi în cazul noii reţele, ca şi pentru reţeaua iniţială. Ne vom referi la aceste două echivalenţe numindu-le *deplasarea tensiunilor* (sau deplasarea *v*) şi respectiv, *deplasarea curenţilor* (sau deplasarea *i*). În urma acestor operaţii se pot obţine întotdeauna surse însoţite. Uneori este convenabil să se trateze toate sursele independente ca surse însoţite, alteori nu. Pentru scrierea ecuaţiilor pe bucle şi pe noduri este convenabil să se considere toate sursele însoţite; aşa se va face în acest capitol. Mai tîrziu se va renunţa la această presupunere atunci cînd va fi convenabil acest lucru.

Vom începe prin a examina relaţiile tensiune-curent pentru laturi, separat pentru surse independente, în cazul reţelelor pasive, şi reciproce.

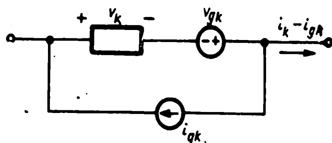


Fig. 2.17. Latură care conţine o sursă de tensiune şi o sursă de curent.

După ce se vor stabili procedeele de bază se va trece la examinarea componentelor active şi nereciproce.

Structura generală a unei laturi este reprezentată în fig. 2.17 şi conţine atît o sursă de tensiune în serie cu un element pasiv cît şi o sursă

de curent în paralel cu acest ansamblu. (În fig. 2.16*b*, de exemplu, sursa de curent din partea stîngă poate fi considerată în paralel cu elementele v_g, R_a și L_a care sînt conectate în serie). Curentul corespunzător acestei laturi, care intervine în TKC va fi $i_k - i_{gk}$. De asemenea, tensiunea care apare în TKT va fi $v_k - v_{gk}$. Așadar relațiile (45) și (58) se vor înlocui prin

$$\mathbf{Ai}(t) = \mathbf{Ai}_g(t), \quad \mathbf{AI}(s) = \mathbf{AI}_g(s) \tag{67}$$

$$\mathbf{Bv}(t) = \mathbf{Bv}_g(t), \quad \mathbf{BV}(s) = \mathbf{BV}_g(s) \tag{68}$$

$$\mathbf{Qi}(t) = \mathbf{Qi}_g(t), \quad \mathbf{QI}(s) = \mathbf{QI}_g(s) \tag{69}$$

unde $\mathbf{i}_g$ și $\mathbf{v}_g$ sînt matricele coloană corespunzătoare surselor de curent și de tensiune.

Similar, transformările de la variabilele laturilor la curenții buclelor sau tensiunile nodurilor trebuie înlocuite prin următoarele

$$\mathbf{i}(t) - \mathbf{i}_g(t) = \mathbf{B}'\mathbf{i}_m(t), \qquad \mathbf{I}(s) - \mathbf{I}_g(s) = \mathbf{B}'\mathbf{I}_m(s) \tag{70}$$

$$\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_g(t) = \mathbf{Q}_l\mathbf{v}'_t(t), \qquad \mathbf{V}(s) - \mathbf{V}_g(s) = \mathbf{Q}'_l\mathbf{V}_t(s) \qquad (71)^{1)}$$

$$\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_g(t) = \mathbf{A}'\mathbf{v}_n(t), \qquad \mathbf{V}(s) - \mathbf{V}_g(s) = \mathbf{A}'\mathbf{V}_n(s). \tag{72}$$

Deoarece sursele pot fi manipulate pe această cale independent de părțile pasive ale laturilor, de acum încolo ne vom concentra atenția asupra componentelor pasive. Pentru aceasta vom face sursele să dispară, ceea ce se poate realiza înlocuind sursele de tensiune prin scurtcircuite și sursele de curent prin circuite deschise.

Acum putem trece la examinarea relațiilor dintre tensiunile și curenții laturilor unui graf. La început nu vom face convenții speciale referitoare la modul în care sînt numerotate laturile. Vom opera cu transformatele Laplace ale variabilelor și vom introduce surse echivalente pentru a reprezenta condițiile inițiale. Impedanța și admitanța laturii k se vor nota prin z_k respectiv y_k iar matricele corespunzătoare prin $\mathbf{Z}$ și $\mathbf{Y}$.

---

[1]) În această relație $\mathbf{V}_t$ este tensiunea *totală* de ramură a unei laturi, incluzînd orice sursă de tensiune prezentă. Această abatere de la consistența strictă a notațiilor permite scrierea mai compactă a ecuațiilor de perechi de noduri care se va face ulterior — relația (96).

O observație similară se va face dacă se utilizează transformarea $\mathbf{I} - \mathbf{I}_g = \mathbf{B}_f\mathbf{I}_l$ pentru curenții joncțiunilor în locul relației (70) cînd se scriu ecuațiile pe bucle. În acest caz I_l se va considera curentul *total* al joncțiunii (v. și Problema **P.27**).

Relaţiile între mărimile aferente laturilor se vor scrie după cum urmează :

$$\begin{array}{ll} \text{Latura } k & \text{Reţea} \\ V_k(s) = z_k I_k(s) & \mathbf{V}(s) = \mathbf{Z}(s)\mathbf{I}(s) \\ I_k(s) = y_k V_k(s) & \mathbf{I}(s) = \mathbf{Y}(s)\mathbf{V}(s). \end{array} \tag{73}$$

Natura acestor matrice poate fi ilustrată prin exemplul din fig. 2.18.

Fig. 2.18. Exemplu ilustrativ.

Cele două laturi inductive *1* şi *2* sînt cuplate magnetic. Relaţia (73) cu matricea impedanţă a laturilor **Z** scrisă detaliat poate fi scrisă după cum urmează :

$$\mathbf{V}(s) = \left[\begin{array}{cc:ccc:ccc} sL_{11} & sL_{12} & & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & \\ sL_{21} & sL_{22} & & & & & & \\ \hdashline & & R_3 & & \bigcirc & & & \\ & \mathbf{0} & & R_4 & & & \mathbf{0} & \\ & & \bigcirc & & R_5 & & & \\ \hdashline & & & & & 1/sC_6 & & \bigcirc \\ & \mathbf{0} & & 0 & & & 1/sC_7 & \\ & & & & & \bigcirc & & 1/sC_8 \end{array}\right] \mathbf{I}(s)$$

$$\mathbf{V}(s) = \begin{bmatrix} s\mathbf{L}_p & & \bigcirc \\ & \mathbf{R}_p & \\ \bigcirc & & \frac{1}{s}\mathbf{D}_p \end{bmatrix} \mathbf{I}(s). \tag{74}$$

Se observă că datorită modului în care au fost numerotate laturile — considerînd fiecare element drept o latură separată şi luînd mai întîi

bobinele, apoi rezistenţele şi la sfîrşit condensatoarele — se poate face o partiţie a matricei, aşa cum s-a arătat, în submatrice ale căror semnificaţii sînt evidente. Matricea rezistenţelor şi matricea inverselor capacităţilor sînt matrice diagonale deoarece aceste elemente nu sînt cuplate între ele de la o latură la alta. Nu tot aşa se petrec lucrurile cu matricea $\mathbf{L}_p$ datorită prezenţei cuplajelor inductive.

Este evident că aceste proprietăţi ale submatricelor matricei impedanţă sînt valabile în general dacă se foloseşte procedeul de numerotaţie descris mai sus. Deoarece acest sistem de numerotare este util, el va fi adoptat deoarece este convenabil în stabilirea proprietăţilor matricelor corespunzătoare. Se vor ivi totuşi situaţii în care vom urmări o flexibilitate mai mare şi vom numerota laturile într-un mod diferit.

În cazul general, dacă fiecare element este considerat drept o latură separată iar laturile inductive sînt numerotate mai întîi, apoi laturile rezistive şi la sfîrşit laturile capacitive, matricea impedanţă şi matricea admitanţă a laturilor pot fi scrise după cum urmează:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} s\mathbf{L}_p & & \bigcirc \\ & \mathbf{R}_p & \\ \bigcirc & & \frac{1}{s}\mathbf{D}_p \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s}\boldsymbol{\Gamma}_p & & \bigcirc \\ & \mathbf{G}_p & \\ \bigcirc & & s\mathbf{C}_p \end{bmatrix} \tag{75}$$

unde $\mathbf{R}_p$, $\mathbf{G}_p$, $\mathbf{C}_p$ şi $\mathbf{D}_p$ sînt matrice diagonale cu $\mathbf{G}_p = \mathbf{R}_p^{-1}$, $\mathbf{D}_p = \mathbf{C}_p^{-1}$ iar $\boldsymbol{\Gamma}_p = \mathbf{L}_p^{-1}$. (Indicele p în aceste submatrice se pune pentru a semnifica „parţial"). Ele se numesc *matricele parţiale ale parametrilor laturilor.* În cazul în care reţeaua conţine transformatoare perfecte, matricea $\mathbf{L}_p$ va fi o matrice singulară iar $\boldsymbol{\Gamma}_p$ nu există.

Uneori este convenabil ca referindu-ne la matricele parţiale ale parametrilor laturilor să le extindem pînă la dimensiunile matricei Z; astfel vom scrie

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{76}$$

pentru matricea rezistenţelor laturilor şi la fel pentru celelalte. Cu aceasta matricele impedanţă şi admitanţă a laturilor se pot scrie simplu în modul următor:

$$\mathbf{Z} = s\mathbf{L} + \mathbf{R} + \frac{1}{s}\mathbf{D} \tag{77a}$$

şi

$$\mathbf{Y} = s\mathbf{C} + \mathbf{G} + \frac{1}{s}\boldsymbol{\Gamma}. \tag{77b}$$

Se observă că ordinul fiecărei matrice a parametrilor laturilor este egal cu numărul laturilor grafului. În relaţia (77) am mărit în mod convenţional dimensiunile acestor matrice. Din punctul de vedere al calculului, mărirea dimensiunilor unei matrice reprezintă un dezavantaj. În acest caz este preferabilă utilizarea matricelor parţiale.

Cu toate că s-a folosit un procedeu special de numerotare a laturilor pentru a ajunge la matricele parametrilor laturilor ca aceea din relaţia (76) şi celelalte similare ei, aceste matrice se pot defini fără a face apel la acest procedeu de numerotare. Singura diferenţă este aceea că elementele nenule nu vor fi concentrate într-o singură submatrice ca în (76). Într-un capitol următor vom examina proprietăţile acestor matrice a parametrilor şi vom discuta condiţiile de realizabilitate.

2.4. ECUAŢIILE PE BUCLE, PE NODURI ŞI PE PERECHI DE NODURI

Relaţiile de bază prezentate în ultimul paragraf sînt: teorema lui Kirchhoff pentru curenţi (TKC), teorema lui Kirchhoff pentru tensiuni (TKT) şi relaţiile tensiune-curent pentru laturi. Pentru o reţea cu l laturi şi $n+1$ noduri se pot scrie n ecuaţii independente pe baza TKC şi $l-n$ ecuaţii independente pe baza TKT, deci în total l ecuaţii. Deoarece se mai pot scrie încă l relaţii tensiune-curent dispunem în total de $2l$ ecuaţii independente pentru cele $2l$ necunoscute care sînt l curenţi şi l tensiuni. Totuşi, soluţionarea a $2l$ ecuaţii simultane constituie o problemă relativ dificilă şi orice procedeu care aduce o simplificare este binevenit.

În ultimul paragraf s-a observat că toţi curenţii laturilor pot fi determinaţi în funcţie de o submulţime de curenţi mai puţin numeroasă — de exemplu curenţii joncţiunilor pentru un arbore sau curenţii buclelor. Similar, toate tensiunile laturilor pot fi determinate în funcţie de o submulţime de tensiuni mai puţin numeroasă. Vom examina acum o serie de procedee în care se folosesc aceste constatări pentru a soluţiona probleme de analiză a reţelelor. Rezultatul depinde de ordinea în care sînt utilizate cele trei categorii de relaţii fundamentale.

Ecuaţiile pe bucle

Dîndu-se o reţea, vom aplica mai întîi TKT ajungînd la relaţia (68) care se repetă aici (în transformate Laplace)

$$\mathbf{BV}(s) = \mathbf{BV}_g(s). \tag{78}$$

Matricea **B** este de dimensiuni $(l - n) \times l$ şi de rang $l - n$. Introducînd în această relaţie matricea $\mathbf{V}(s)$ dată de relaţia (73) se obţine

$$\mathbf{BZ}(s)\mathbf{I}(s) = \mathbf{BV}_g(s). \tag{79}$$

În sfîrşit, exprimăm curenţii laturilor în funcţie de alţi $l - n$ curenţi care pot fi curenţii buclelor sau curenţii joncţiunilor unui arbore — dacă **B** este matricea buclelor fundamentale pentru arborele respectiv. Presupunem că folosim curenţii buclelor, adică utilizăm expresiile curenţilor $\mathbf{I}(s)$ daţi de transformarea pe bucle din relaţia (70). Se obţine

$$\{\mathbf{BZ}(s)\mathbf{B}'\}\mathbf{I}_m(s) = \mathbf{B}\{\mathbf{V}_g - \mathbf{Z}(s)\mathbf{I}_g\} \tag{80a}$$

sau

$$\mathbf{Z}_m(s)\mathbf{I}_m(s) = \mathbf{E}(s) \tag{80b}$$

unde s-au folosit notaţiile

$$\mathbf{E} = \mathbf{B}(\mathbf{V}_g - \mathbf{ZI}_g)$$

şi

$$\mathbf{Z}_m(s) = \mathbf{BZ}(s)\mathbf{B}'. \tag{81}$$

Ecuaţia matriceală (80) reprezintă un sistem de $l - n$ ecuaţii, numite *ecuaţiile pe bucle*, cu $l - n$ necunoscute reprezentînd curenţii buclelor. Matricea coeficienţilor $\mathbf{Z}_m(s)$ se numeşte matricea *impedanţă a buclelor*, şi nu trebuie confundată cu matricea *impedanţă a ramurilor* **Z**. Pentru o reţea pasivă şi reciprocă, matricea **Z** este simetrică. În acest caz (v. Problema 1.15) matricea $\mathbf{Z}_m$ este şi ea simetrică.

Matricea impedanţă a buclelor poate fi scrisă explicit în funcţie de matricele parametrilor ramurilor introducînd relaţia (77) în relaţia (81). Astfel

$$\mathbf{Z}_m = \mathbf{BZB}' = s\mathbf{L}_m + \mathbf{R}_m + \frac{1}{s}\mathbf{D}_m \tag{82}$$

unde

$$\mathbf{L}_m = \mathbf{BLB}' \tag{83a}$$

$$\mathbf{R}_m = \mathbf{BRB}' \tag{83b}$$

$$\mathbf{D}_m = \mathbf{BDB}' \tag{83c}$$

sînt matricele parametrilor buclelor.

Spre a ilustra relaţia (80) considerăm reţeaua din fig. 2.18 pentru care matricea impedanţei ramurilor a fost dată în relaţia (74). Graful său este redesenat în fig. 2.19 spre a pune în evidenţă alegerea buclelor. Acesta este un graf planar şi probabil cel mai simplu ar fi fost să se

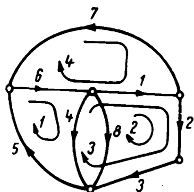


Fig. 2.19. Exemplu de reţea pentru scrierea ecuaţiilor pe bucle.

aleagă drept bucle chiar ochiurile. Totuşi, în scop ilustrativ s-a ales alt sistem de bucle. În acest caz matricea **B** este :

$$
\mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0
\end{array}\right] \end{array}.
$$

Atunci matricea impedanţă a buclelor devine

$$
\mathbf{Z}_m = \left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{cccccccc}
sL_{11} & sL_{12} & & & & & & \\
sL_{21} & sL_{22} & & & & & & \\
 & & R_3 & & & & \bigcirc & \\
 & & & R_4 & & & & \\
 & & & & R_5 & & & \\
 & \bigcirc & & & & \dfrac{1}{sC_6} & & \\
 & & & & & & \dfrac{1}{sC_7} & \\
 & & & & & & & \dfrac{1}{sC_8}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{cccc}
0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$\mathbf{Z}_m = \begin{bmatrix} R_4 + R_5 \times \frac{1}{sC_6} & 0 & -R_4 & -\frac{1}{sC_6} \\ 0 & s(L_{11} + L_{12} + L_{21} + L_{22}) + R_3 + \frac{1}{sC_8} & s(L_{11} + L_{12} + L_{21} + L_{22}) + R_3 & -s(L_{11} + L_{21}) \\ -R_4 & s(L_{11} + L_{12} + L_{21} + L_{22}) + R_3 & s(L_{11} + L_{12} + L_{21} + L_{22}) + R_3 + R_4 & -s(L_{11} + L_{21}) \\ -\frac{1}{sC_6} & -s(L_{11} + L_{12}) & -s(L_{11} + L_{21}) & sL_{11} + \frac{1}{sC_6} + \frac{1}{sC_7} \end{bmatrix}.$$

Corelind această matrice cu graful observăm că elementele matricei impedanță a buclelor pot fi interpretate în următoarea manieră directă. Fiecare element de pe diagonala principală este suma impedanțelor ramurilor pe bucla corespunzătoare, ținînd cont și de impedanțele de cuplaj mutual cu alte bucle.

Fiecare element care nu aparține diagonalei principale este plus sau minus impedanța ramurilor comune între două bucle; semnul este pozitiv dacă curenții buclelor au același sens în ramura comună și negativ dacă au sensuri opuse. Se poate verifica matricea impedanță a buclelor din exemplu, utilizînd această interpretare.

O interpretare similară se aplică pentru matricele parametrilor buclelor $\mathbf{L}_m$, $\mathbf{R}_m$ și $\mathbf{D}_m$. Astfel din matricea $\mathbf{Z}_m$ putem scrie matricea rezistențelor buclelor astfel

$$\mathbf{R}_m = \begin{bmatrix} R_4 + R_5 & 0 & -R_4 & 0 \\ 0 & R_3 & R_3 & 0 \\ -R_4 & R_3 & R_3 + R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Din rețea observăm că elementele diagonalei principale în această matrice sînt rezistențele totale pe conturul buclelor corespunzătoare; elementele care nu aparțin diagonalei principale sînt rezistențele comune buclelor

respective, cu plus sau minus; plus dacă orientarea buclelor este aceeaşi prin rezistenţa comună, minus dacă buclele sînt orientate în sens opus.

Matricele surselor vor fi

$$\mathbf{V}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad \mathbf{I}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Astfel $\mathbf{ZI}_g$ are un element nenul numai în linia a şaptea şi valoarea acestuia este $-I_0/sC_7$. În acest caz partea dreaptă a relaţiei (80) devine

$$\mathbf{E} = \mathbf{B}(\mathbf{V}_g - \mathbf{ZI}_g) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_0 \\ 0 \\ -I_0/sC_7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \\ 0 \\ I_0/sC_7 \end{bmatrix}$$

Cantitatea I_0/sC_7 este tensiunea Thévenin echivalentă corespunzătoare sursei de curent în paralel cu C_7. Astfel matricea $\mathbf{E}$ reprezintă ***vectorul surselor echivalente de tensiuni pe bucle***, ale cărui elemente sînt sumele algebrice ale surselor de tensiune (inclusiv tensiunile Thévenin echivalente corespunzătoare surselor de curent) pe conturul fiecărei bucle, sensul tensiunilor fiind astfel ales încît să fie opus sensului buclei.

Obţinînd ecuaţiile pe bucle în forma

$$\mathbf{Z}_m \mathbf{I}_m = \mathbf{E} \tag{84}$$

se determină soluţia

$$\mathbf{I}_m = \mathbf{Z}_m^{-1} \mathbf{E} \tag{85}$$

ceea ce este de fapt o soluţie simbolică, în formă matriceală. Calculul elementelor matricei $\mathbf{I}_m$ cere un volum considerabil de muncă. Amînăm pentru capitolul următor tratarea acestei probleme.

În legătură cu discuţia precedentă asupra ecuaţiilor pe bucle trebuie să notăm că, în ultimul dintre exemplele considerate putem scrie uşor forma finală a ecuaţiilor pe bucle, dacă folosim o simplă tratare scalară. Astfel, putem scrie matricea impedanţă a buclelor $\mathbf{Z}_m$ şi matricea surselor echivalente $\mathbf{E}$ printr-o examinare directă a reţelei, odată ce s-au ales buclele. Introducerea tratării matriceale pare mai complicată decît e necesar. În acest sens se pot face trei observaţii. În primul rînd, tratarea despre care am vorbit mai sus n-ar fi utilă în determinarea ecuaţiilor pe bucle pentru reţele cu o matrice $\mathbf{B}$ de rang mic. Procedeul general începe să fie preferabil în cazul reţelelor caracterizate prin matrice $\mathbf{B}$ de dimensiuni mari — de ordinul a zeci de linii. În al doilea rînd, tratarea folosind considerente topologice se pretează la programarea pe calculator, ceea ce o face şi mai valoroasă. În sfîrşit, forma finală constituie o „teoremă de existenţă"; ea este o verificare că pentru orice reţea se pot scrie ecuaţiile pe bucle.

2.4.2. Ecuaţiile pe noduri

Scriind ecuaţiile pe bucle, relaţiile tensiune-curent ale laturilor s-au introdus în ecuaţiile obţinute pe baza TKT, după care s-a utilizat transformarea pe bucle pentru a se trece la variabile reprezentînd curenţii buclelor. Acum, dîndu-se o reţea se vor scrie mai întîi ecuaţiile ce rezultă din TCK, ajungîndu-se la relaţia (67) care se repetă aici

$$\mathbf{A}\mathbf{I}(s) = \mathbf{A}\mathbf{I}_g(s). \tag{86}$$

În această expresie se substituie relaţiile (73) şi se obţine

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}(s)\,\mathbf{V}(s) = \mathbf{A}\mathbf{I}_g(s). \tag{87}$$

În sfîrşit se exprimă tensiunile laturilor în funcţie de tensiunile nodurilor prin transformarea pe noduri dată de relaţia (72). Rezultatul este

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}(s)\,\mathbf{A}'\mathbf{V}_n(s) = \mathbf{A}\{\mathbf{I}_g(s) - \mathbf{Y}\mathbf{V}_g(s)\} \tag{88 a}$$

sau

$$\mathbf{Y}_n\mathbf{V}_n(s) = \mathbf{J}(s) \tag{88 b}$$

unde s-a notat prin $\mathbf{J}$ matricea $\mathbf{A}(\mathbf{I}_g - \mathbf{Y}\mathbf{V}_g)$ şi unde

$$\mathbf{Y}_n(s) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(s)\,\mathbf{A}'. \tag{89}$$

Relaţia (88*b*) este o ecuaţie matriceală care reprezintă un sistem de n ecuaţii, numite ***ecuaţiile pe noduri*** cu n necunoscute reprezentînd tensiunile nodurilor. Matricea coeficienţilor $\mathbf{Y}_n(s)$ se numeşte ***matricea admitanţă a nodurilor***.

De această dată ***matricea J este matricea echivalentă a surselor de curent*** aplicate pe noduri, avînd drept elemente sumele algebrice ale curenţilor (incluzînd curenţii Norton echivalenţi surselor de tensiune) incidenţi în nodurile respective cu sensul pozitiv astfel ales încît să intre în nod.

Matricea admitanţă a nodurilor poate fi scrisă explicit în funcţie de matricele parametrilor laturilor, introducînd relaţia (77) în relaţia (89). Rezultatul va fi

$$\mathbf{Y}_n(s) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(s)\,\mathbf{A}' = s\mathbf{C}_n + \mathbf{G}_n + \frac{1}{s}\mathbf{\Gamma}_n \tag{90}$$

unde

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{A}' \tag{91a}$$

$$\mathbf{G}_n = \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}' \tag{91b}$$

$$\mathbf{\Gamma}_n = \mathbf{A}\mathbf{\Gamma}\mathbf{A}' \tag{91c}$$

sînt ***matricele parametrilor nodurilor***.

Pentru sistemul de ecuaţii pe noduri scris sub forma

$$\mathbf{Y}_n(s)\,\mathbf{V}_n(s) = \mathbf{J}(s) \tag{92}$$

se poate obţine cu uşurinţă soluţia:

$$\mathbf{V}_n(s) = \mathbf{Y}_n^{-1}\,\mathbf{J}(s). \tag{93}$$

Aceasta este din nou o soluţie scrisă sub formă simbolică. În capitolul următor vom examina detaliile referitoare la această soluţie.

Să ilustrăm utilizarea ecuaţiilor pe noduri pe exemplul reţelei din fig. 2.18 care s-a redesenat în fig. 2.20. Se alege nodul *5* ca nod de referinţă astfel încît el se omite atunci cînd se scrie matricea **A**.

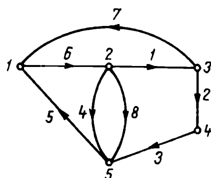


Fig. 2.20. Exemplu de reţea pentru scrierea ecuaţiilor pe noduri.

Matricea **A** este

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iar matricea admitanţă a laturilor va fi

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{L_{22}}{s\Delta} & -\frac{L_{12}}{s\Delta} & & & & & & \\ -\frac{L_{21}}{s\Delta} & \frac{L_{11}}{s\Delta} & & & & \bigcirc & & \\ & & G_3 & & & & & \\ & & & G_4 & & & & \\ & & & & G_5 & & & \\ & \bigcirc & & & & sC_6 & & \\ & & & & & & sC_7 & \\ & & & & & & & sC_8 \end{bmatrix}$$

unde $\Delta = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}$. Atunci

$$Y_n = AYA' =$$

$$\begin{bmatrix} G_5+s(C_6+C_7) & -sC_6 & -sC_7 & 0 \\ -sC_6 & \frac{L_{22}}{s\Delta}+G_4+s(C_6+C_8) & -\frac{(L_{22}+L_{12})}{s\Delta} & \frac{L_{12}}{s\Delta} \\ -sC_7 & -\frac{(L_{22}+L_{21})}{s\Delta} & \frac{L_{11}+L_{12}+L_{21}+L_{22}}{s\Delta}+sC_7 & -\frac{(L_{11}+L_{21})}{s\Delta} \\ 0 & \frac{L_{21}}{s\Delta} & -\frac{(L_{11}+L_{21})}{s\Delta} & \frac{L_{11}}{s\Delta}+G_3 \end{bmatrix}.$$

Matricele surselor $\mathbf{V}_g$ şi $\mathbf{I}_g$ sînt aceleaşi ca şi mai înainte. Obţinem deci

$$\mathbf{J} = \mathbf{A}(\mathbf{I}_g - \mathbf{Y}\mathbf{V}_g) = \begin{bmatrix} G_5V_0 - I_0 \\ 0 \\ I_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mărimea G_5V_0 reprezintă curentul Norton echivalent al sursei de tensiune în serie cu G_5. Aşadar $\mathbf{J}$ este matricea echivalentă a surselor de curent avînd drept elemente sumele algebrice ale surselor de curent (incluzînd curenţii Norton echivalenţi ai surselor însoţite) incidente în nodul respectiv cu sensul pozitiv intrînd în nod.

Ca şi în cazul ecuaţiilor pe bucle, ecuaţiile pe noduri pot fi scrise direct prin examinarea reţelei, pentru reţelele fără cuplaje mutuale. Elementele matricei admitanţă a nodurilor se pot obţine după cum urmează. Fiecare element de pe diagonala principală este suma admitanţelor laturilor incidente în nodul respectiv. Fiecare element care nu aparţine diagonalei principale este admitanţa cu semn schimbat dintre cele două noduri. În acest caz toate elementele care nu aparţin diagonalei principale sînt negative, spre deosebire de cazul impedanţei buclelor, deoarece tensiunea unei laturi este întotdeauna diferenţa tensiunilor celor două noduri, iar tensiunile nodurilor sînt considerate pozitive în raport cu nodul de referinţă.

O interpretare similară se aplică matricelor parametrilor nodurilor $\mathbf{C}_n$, $\mathbf{G}_n$ şi $\mathbf{\Gamma}_n$. Să scriem, de exemplu, matricea capacităţilor nodurilor. Din figură se observă că apar două capacităţi C_6 şi C_7 incidente la nodul 1, C_6 fiind conectată între nodurile *1* şi *2*, iar C_7 fiind conectată între nodurile *1* şi *3*. Rezultă că termenul de pe diagonala principală de pe prima linie a matricei $\mathbf{C}_n$ va fi $C_6 + C_7$, iar ceilalţi trei termeni vor fi

respectiv $-C_6$, $-C_7$ şi 0. Continuînd pe aceeaşi cale se găseşte $\mathbf{C}_n$, care este

$$\mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} C_6 + C_7 & -C_6 & -C_7 & 0 \\ -C_6 & C_6 + C_8 & 0 & 0 \\ -C_7 & 0 & C_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Acest rezultat este în concordanţă cu expresia obţinută anterior pentru matricea $\mathbf{Y}_n$.

Ecuaţiile pe perechi de noduri

Variabilele în raport cu care se scriu ecuaţiile pe noduri reprezintă tensiunile nodurilor în raport cu un nod de referinţă. Aceste variabile formează o bază pentru variabilele laturilor. S-a arătat anterior că tensiunile ramurilor pentru un arbore constituie o altă bază pentru tensiunile pe laturi. De aceea ne putem aştepta la existenţa unui alt sistem de ecuaţii, similar ecuaţiilor pe noduri, dar cu tensiunile ramurilor unui arbore drept variabile; această posibilitate este ilustrată în cele ce urmează.

Dîndu-se o reţea, se selectează mai întîi un arbore şi aplicînd TKC pentru mulţimea secţiunilor fundamentale ajungem la relaţia (69), care este repetată aici

$$\mathbf{QI}(s) = \mathbf{QI}_g(s). \tag{94}$$

Matricea $\mathbf{Q}$ este de dimensiuni $n \times l$ şi de rang n (Indicele f este omis pentru simplificare). În această expresie vom introduce apoi relaţiile pe ramuri date în expresia (73) obţinînd

$$\mathbf{QY}(s)\,\mathbf{V}(s) = \mathbf{QI}_g(s). \tag{95}$$

În sfîrşit, exprimăm tensiunile pe laturi în funcţie de tensiunile pe ramuri prin transformarea corespunzătoare dată de relaţia (71). Rezultă

$$\mathbf{QY}(s)\,\mathbf{Q}'\mathbf{V}_t(s) = \mathbf{Q}\{\mathbf{I}_g - \mathbf{Y}(s)\,\mathbf{V}_g\} \tag{96a}$$

sau

$$\mathbf{Y}_t(s)\,\mathbf{V}_t(s) = \mathbf{J}_t \tag{96b}$$

unde $\mathbf{J}_t$ este exprimarea prescurtată pentru $\mathbf{Q}[\mathbf{I}_g - \mathbf{Y}(s)\,\mathbf{V}_g]$ şi

$$\mathbf{Y}_t(s) = \mathbf{QY}(s)\,\mathbf{Q}'. \tag{97}$$

Reţinem că această expresie este cu totul similară ecuaţiilor pe noduri date în relaţia (88); diferenţa constă în înlocuirea matricei de incidenţă **A** prin matricea secţiunilor fundamentale **Q**, iar variabilele de aici nu sînt tensiunile nodurilor ci tensiunile între *perechi de noduri*. Vom denumi aceste ecuaţii *ecuaţiile pe perechi de noduri*.

Matricea coeficienţilor din ecuaţiile pe perechi de noduri $\mathbf{Y}_t(s)$ se numeşte *matricea admitanţă pe perechi de noduri*; ea se poate explicita în funcţie de parametrii laturilor substituindu-se relaţia (77). Rezultatul va fi

$$\mathbf{Y}_t(s) = \mathbf{Q}\mathbf{Y}(s)\,\mathbf{Q}' = s\mathbf{C}_t + \mathbf{G}_t + \frac{1}{s}\,\mathbf{\Gamma}_t \tag{98}$$

unde

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}' \tag{99a}$$

$$\mathbf{G}_t = \mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{Q}' \tag{99b}$$

$$\mathbf{\Gamma}_t = \mathbf{Q}\mathbf{\Gamma}\mathbf{Q}' \tag{99c}$$

sînt matricele parametrilor între perechi de noduri.

Pentru a ilustra scrierea ecuaţiilor pe perechi de noduri se va utiliza acelaşi exemplu ca şi pentru ecuaţiile pe bucle şi ecuaţiile pe noduri (fig. 2.18), cu excepţia faptului că aici nu mai apar cuplaje mutuale între laturile *1* şi *2*. Reţeaua şi graful corespunzător sînt date în fig. 2.21. S-a ales arborele format din laturile *3*, *4* şi *7* care este figurat cu linii

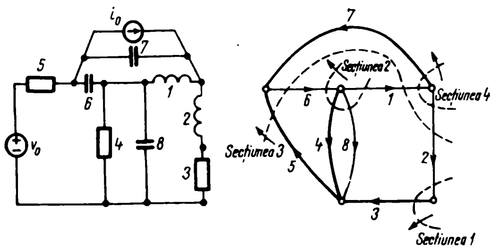


Fig. 2.21. Exemplu de reţea pentru scrierea ecuaţiilor pe perechi de noduri.

îngroșate. Laturile din fiecare mulțime de secțiuni precum și matricea secțiunilor fundamentale sînt următoarele:

mulțimea secțiunilor	
1 :	{3, 2}
2 :	{4, 1, 6, 8}
3 :	{5, 1, 2, 6}
4 :	{7, 1, 2}

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ordinea coloanelor este aceeași ca și a numerotării inițiale a laturilor și nu ordinea pentru care se poate face o partiție a matricei $\mathbf{Q}$ de forma $[\mathbf{U} \quad \mathbf{Q}_l]$. S-a procedat astfel deoarece matricea admitanță a laturilor a fost scrisă în această ordine cînd s-au scris ecuațiile pe noduri. În legătură cu matricea admitanței laturilor se remarcă că termenul L_{22}/Δ s-a înlocuit prin $1/L_1$, iar L_{11}/Δ prin $1/L_2$; de asemenea elementele care nu sînt pe diagonala principală sînt nule deoarece aici nu există cuplaje mutuale. În aceste condiții ecuațiile pe perechi de noduri sînt:

$$\mathbf{QYQV}_t = \begin{bmatrix} G_3 + \frac{1}{L_2 s} & 0 & \frac{1}{L_2 s} & -\frac{1}{L_2 s} \\ 0 & G_4 + \frac{1}{L_1 s} + s(C_6 + C_8) & \frac{1}{L_1 s} + sC_6 & -\frac{1}{L_1 s} \\ \frac{1}{L_2 s} & \frac{1}{L_1 s} + sC_6 & G_5 + \frac{1}{L_1 s} + \frac{1}{L_2 s} + sC_6 & -\left(\frac{1}{L_1 s} + \frac{1}{L_2 s}\right) \\ -\frac{1}{L_2 s} & -\frac{1}{L_1 s} & -\left(\frac{1}{L_1 s} + \frac{1}{L_2 s}\right) & sC_7 + \frac{1}{L_1 s} + \frac{1}{L_2 s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_5 V_0 \\ I_0 \end{bmatrix}$$

Observăm din nou că se poate da o interpretare simplă pentru matricea admitanță a mulțimii secțiunilor. Examinînd rețeaua din fig. 2.21, observăm, de exemplu, că $sC_7 + 1/L_1 s + 1/L_2 s$, care reprezintă elementul de pe linia a 4-a și coloana a 4-a din $\mathbf{Y}_t$ este suma admitanțelor laturilor în mulțimea secțiunilor *4*. Interpretări similare se pot da și celorlalte elemente de pe diagonala principală. Observăm de asemenea că unii termeni, care nu sînt plasați de diagonala principală apar cu semne plus, iar alții cu semne minus; de exemplu, elementul din linia 1 și coloana a 3-a din matricea $\mathbf{Y}_t$ este $1/L_2 s$. Acesta este admitanța laturii comune mulțimii secțiunilor *1* și *3*. Orientarea acestei laturi comune este aceeași în raport cu ambele mulțimi de secțiuni de aceea termenul respectiv este pozitiv.

Ca o regulă generală, elementele matricei admitanţă a secţiunilor au următoarele interpretări. Fiecare element de pe diagonala principală este suma admitanţelor laturilor care fac parte din mulţimea respectivă de secţiuni. Fiecare element care nu este pe diagonala principală reprezintă admitanţa laturii comune la două mulţimi de secţiuni, semnul său fiind plus dacă orientarea laturii este aceeaşi în raport cu cele două mulţimi de secţiuni şi minus dacă nu este aceeaşi. Se propune cititorului să verifice această regulă pentru matricea $\mathbf{Y}_t$ dată în exemplul anterior.

În ceea ce priveşte sursele, matricea $\mathbf{Q}(\mathbf{I}_g - \mathbf{Y}\mathbf{V}_g)$ reprezintă *matricea surselor de curent a mulţimii secţiunilor*, ale cărei elemente sînt sumele algebrice ale surselor de curent (incluzînd curentul Norton echivalent al surselor de tensiune) care intervin în mulţimea respectivă de secţiuni.

2.5. DUALITATEA

Există un paralelism strîns între sistemele de ecuaţii pe bucle şi sistemele de ecuaţii pe noduri. Această observaţie ridică următoarea problemă interesantă: se pot găsi două reţele astfel încît, cu excepţia simbolurilor, ecuaţiile pe bucle pentru o reţea să fie aceleaşi cu ecuaţiile pe noduri pentru cealaltă? Cu alte cuvinte, ecuaţiile pe bucle pentru o reţea pot să devină ecuaţiile pe noduri pentru alta, dacă schimbăm între ele simbolurile v şi i? Pentru a răspunde la această problemă se observă că ecuaţiile pe bucle se obţin atunci cînd relaţiile tensiune-curent pe laturi se introduc în TKT şi se folosesc TKC (sub forma transformării pe bucle). Pe de altă parte, se obţin ecuaţiile pe noduri atunci cînd se inversează ordinea acestor operaţii; adică, relaţiile tensiune-curent se introduc în TKC şi apoi se aplică TKT (sub forma transformării pe noduri). Pe această bază observăm că se poate da un răspuns afirmativ la problema ridicată anterior, dacă există două reţele N_1 şi N_2 care să satisfacă următoarele condiţii:

1. ecuaţiile obţinute din TKC pentru N_1 să reprezinte ecuaţiile corespunzătoare TKT pentru N_2, înlocuind i_j prin v_j pentru orice j.

2. expresia tensiunii unei laturi v_j pentru N_2, în funcţie de curentul laturii i_j să devină expresia curentului laturii i_j pentru N_1, în funcţie de tensiunea laturii v_j, prin permutarea lui i_j şi v_j. Dacă aceste condiţii sînt satisfăcute se spune că N_2 este *duală* lui N_1. De fapt este uşor de observat că dacă N_1 şi N_2 se permută, condiţiile de mai sus vor fi satisfăcute (dacă ele erau satisfăcute iniţial). De aceea N_1 este de asemenea duală lui N_2. Dualitatea este o proprietate mutuală; N_1 şi N_2 sînt *reţele duale*.

În formă matriceală condiția 1 poate fi stabilită după cum urmează. Fie $\mathbf{A}_1 = [a_{ij}]$ matricea de incidență a lui N_1. Atunci

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_2 \tag{100}$$

unde $\mathbf{B}_2$ este matricea buclelor pentru N_2. Evident, numărul de laturi al celor două rețele trebuie să fie același și atunci rangul matricei $\mathbf{A}_1$ trebuie să fie egal cu rangul matricei $\mathbf{B}_2$. Astfel

$$l_1 = l_2 \tag{101a}$$

$$n_1 = l_2 - n_2 \tag{101b}$$

unde l_1 și l_2 se referă la numărul de laturi: $n_1 + 1$ și $n_2 + 1$ se referă la numărul de noduri al celor două rețele, respectiv.

Aceste relații constituie condiții de structură ale celor două rețele. Mai intîi, trebuie să existe o corespondență între laturile celor două rețele, definită prin ordonarea coloanelor matricelor $\mathbf{A}_1$ și $\mathbf{B}_2$ astfel încît să fie satisfăcută relația (100). În al doilea rînd trebuie să existe o corespondență între nodurile lui N_1 (liniile matricei $\mathbf{A}_1$) și buclele lui N_2 (liniile matricei $\mathbf{B}_2$).

Două structuri care satisfac relația (100) sînt numite *grafuri duale*. Nu vom dezvolta aici proprietățile abstracte ale grafurilor duale; vom stabili cîteva consecințe ale acestor proprietăți [1]).

Consecința de bază este că o rețea va admite o structură geometrică duală dacă și numai dacă va fi planară. Dacă două rețele planare pot fi suprapuse astfel că fiecare nod al rețelei N_1, în afară de unul să fie situat în interiorul unui ochi al rețelei N_2 și sensurile laturilor aflate în corespondență sînt orientate convenabil, atunci o linie a matricei $\mathbf{A}_1$ și linia corespunzătoare ei în matricea $\mathbf{B}_2$ vor fi identice. O asemenea buclă și nod sînt redate în fig. 2.22. Laturile și buclele lui N_2 sînt notate cu „prim".

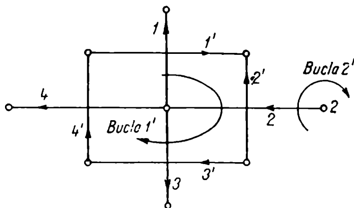


Fig. 2.22. O buclă și nodul dual.

[1]) Pentru o prezentare mai detaliată se pot consulta: H. Whitney, „Nonseparable and Planar Graphs", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 34, No. 2, pp. 339–362, 1932, și C. Kuratowski, „Sur le problème des courbes gauches en topologie", Fundamenta Mathematicae, vol. 15, p. 271–283, 1930.

Nodul *1* în N_1 corespunde buclei *1'* în N_2. Cititorul poate verifica că ecuaţiile TKC pentru nodul *1* au aceeaşi coeficienţi ca şi ecuaţiile TKT pentru bucla *1'*. Coeficientul curentului i_2 în ecuaţiile TKC pentru nodul *2* este $+1$.

Pentru ca în ecuaţia TKT pe bucla *2'* coeficientul tensiunii v_2 să fie acelaşi şi anume $+1$, bucla *2'* trebuie să fie orientată aşa cum se arată în fig. 2.22. Urmărind întregul graf, se poate arăta în acelaşi mod că buclele trebuie să fie orientate în acelaşi sens (toate în sensul

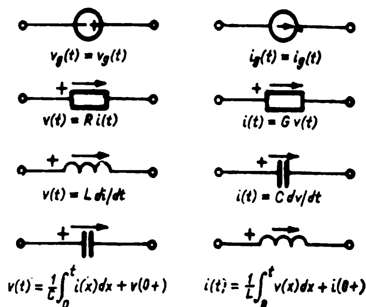


Fig. 2.23. Laturi duale.

acelor de ceasornic, dacă laturile sînt orientate ca în figură, sau toate în sens invers acelor de ceasornic, dacă laturile sînt orientate invers).

Dacă se aleg ochiurile unui graf planar pentru a scrie ecuaţiile pe baza TKT şi toate buclele sînt orientate în acelaşi sens, atunci termenii care nu sînt plasaţi pe diagonala principală în ecuaţiile pe bucle vor fi cu toţii precedaţi de semnul minus, aşa cum trebuie să fie în ecuaţiile pe noduri.

A doua condiţie de dualitate se referă la relaţia dintre laturi. În fig. 2.23 sînt reprezentate perechi de laturi duale, din punctul de vedere al relaţiilor tensiune-curent. Pentru inductanţele mutuale nu există relaţii de dualitate. Prin definiţie, numai reţele planare fără inductanţe mutuale admit reţele duale.

Dîndu-se o reţea, fie acesta N_1, construirea reţelei duale se face după cum urmează. În interiorul fiecărui ochi al lui N_1 se plasează cîte un nod al reţelei duale N_2. Un nod adiţional, care va reprezenta nodul de referinţă se plasează în exteriorul lui N_1. Se unesc nodurile reţelei duale prin laturi care traversează fiecare latură a lui N_1 comună ochiurilor

lui N_1 în care se găsesc cele două noduri ale lui N_2 [1]). În sfîrşit, orientarea laturilor lui N_2 se alege astfel încît matricea ecuaţiilor obţinute pe baza TKT pentru N_1 (cu toate buclele orientate la fel) să fie aceeaşi cu matricea ecuaţiilor obţinute pe baza TKC pentru N_2. Deoarece cele două reţele sînt reciproc duale, matricea admitanţă a nodurilor pentru o reţea este egală cu matricea impedanţă a buclelor pentru cealaltă şi reciproc; astfel

$$\mathbf{Y}_{n1} = \mathbf{Z}_{m2} \qquad (102a)$$

şi

$$\mathbf{Z}_{m1} = \mathbf{Y}_{m2}. \qquad (102b)$$

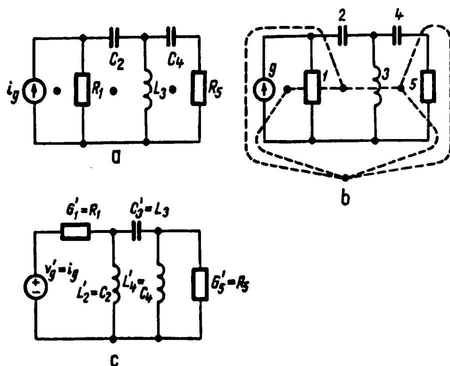


Fig. 2.24. Construirea unei reţele duale.

Deoarece aceste matrice sînt egale, determinanţii şi cofactorii lor sînt de asemenea egali.

Se consideră ca exemplu reţeaua din fig. 2.24.

Se plasează cîte un nod în interiorul fiecărui ochi şi un nod suplimentar în exterior, aşa cum se arată în fig. 2.24, *a*. În fig. 2.24 *b* s-au reprezentat prin linii întrerupte laturile reţelei duale, care intersectează fiecare latură a lui N_1. În sfîrşit, reţeaua duală este dată în fig. 2.24 *c*. Se propune cititorului să verifice relaţiile (100) şi (102) pentru aceste exemple.

---

[1]) În acest proces este convenabil să se considere sursele drept laturi separate, în scopul construirii reţelei duale.

2.6. REŢELELE (CIRCUITELE) NERECIPROCE ŞI ACTIVE

Matricele coeficienţilor ecuaţiilor pe bucle şi ecuaţiilor pe noduri sînt, respectiv, **BZB'** şi **AYA'**. Posibilitatea analizei reţelei pe baza ecuaţiilor pe ochiuri sau a ecuaţiilor pe noduri, în această formă generală depinde deci de existenţa matricei impedanţă a laturilor **Z** sau matricei admitanţă a nodurilor **Y**. Pentru reţelele pasive şi reciproce cu care am avut de-a face pînă acum, aceste matrice există. (Această afirmaţie trebuie corectată în cazul transformatoarelor perfecte, pentru care matricea **Y** nu există.)

Acum vom considera reţele care conţin dispozitive active şi/sau nereciproce, împreună cu elemente pasive avînd mai mult de două borne terminale. În tabelul 2.1 se arată aceste componente împreună cu reprezentările lor simbolice.

Sînt două aspecte care trebuie considerate, în legătură cu aceste două tipuri de componente. Primul aspect se referă la modul în care aceste componente trebuie să fie reprezentate prin grafuri. Acesta va influenţa numărul ecuaţiilor ce rezultă din TKC şi TKT şi deci matricele **A** şi **B**. Al doilea aspect se referă la modul în care trebuie reprezentate laturile pentru a se putea face analiza pe bucle sau pe noduri. Vom examina mai întii primul aspect, adică grafurile acestor componente.

Fiecare din componentele ilustrate în tabelul 2.1 are patru borne terminale. Totuşi, terminalele se consideră totdeauna în perechi, astfel încît e mai potrivit să se considere că ele au două perechi de terminale. Se poate, desigur, să se conecteze împreună cîte un terminal din fiecare pereche, fără a modifica astfel relaţiile tensiune-curent ale componentelor. În felul acesta fiecare dispozitiv poate fi considerat ca avînd trei terminale. Comportarea fiecărui dispozitiv din tabel este caracterizată prin două relaţii între două perechi de variabile — doi curenţi şi două tensiuni. Acesta reprezintă un caz particular al unei situaţii generale şi anume, comportarea unui dispozitiv cu n terminale poate fi complet caracterizată prin $n - 1$ relaţii dintre $n - 1$ perechi de variabile, reprezentînd tensiuni sau curenţi. (Această condiţie este de fapt un postulat şi nu se demonstrează).

Pentru un dispozitiv cu o singură pereche de terminale caracterizat printr-o tensiune şi un curent, graful corespunzător este format dintr-o singură latură. Dispozitivele din tabelul 2.1 au cîte două perechi de terminale şi cîte două tensiuni şi doi curenţi; grafurile lor se vor reprezenta prin cîte două laturi între perechile de terminale, aşa cum se arată în fig. 2.25. Dacă se leagă împreună cîte un terminal din fiecare pereche, laturile din graful respectiv vor avea un nod comun.

Cele de mai sus sînt valabile pentru dispozitive cu trei şi respectiv patru terminale. Dar unele dintre dispozitivele din tabelul 2.1 prezintă anumite degenerescenţe, ceea ce rezultă din numărul de zerouri care apar în ecuaţiile respective. Pentru sursele controlate, perechea de termi-

Tabelul 2.1

Dispozitivul	Simbolul	Ecuațiile	Tipul reprezentării	Graful
Sursă de curent controlată prin tensiune		$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$	Admitanțe	
Sursă de tensiune controlată prin curent		$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$	Impedanțe	
Sursă de tensiune controlată prin tensiune		$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$	Parametri hibrizi *g*	
Sursă de curent controlată prin curent		$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$	Parametri hibrizi *h*	
Girator		$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mp r \\ \pm r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$ sau $\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm g \\ \mp g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$	Impedanțe sau Admitanțe	
Convertor de imitanță negativă		$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm k \\ \pm 1/k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ sau $\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm 1/k \\ \pm 1/k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$	Parametri hibrizi *h* sau Parametri hibrizi *g*	
Transformator ideal		$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ sau $\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/n \\ 1/n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$	Parametri hibrizi *h* sau Parametri hibrizi *g*	

nale de intrare se găseşte în gol sau în scurtcircuit. Ele vor accepta tensiuni arbitrare şi curent zero, sau curenţi arbitrari şi tensiune zero. Aceasta corespunde la o linie de zerouri în relaţiile tensiune-curent, ceea ce înseamnă că nu există decît cîte o singură reprezentare pentru fiecare tip de dispozitiv. Pentru a scrie ecuaţiile pe bucle (noduri) este necesară totuşi reprezentarea prin impedanţe (admitanţe). Dacă trebuie scrise ecuaţiile pe bucle (noduri) pentru reţele care conţin astfel de dispozitive se vor face anumite transformări prealabile.

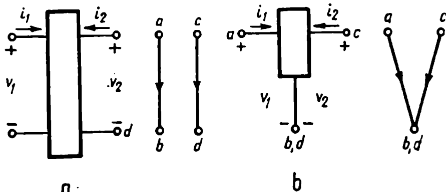


Fig. 2.25. Diporţi şi grafele corespunzătoare.

Cele arătate mai sus sînt ilustrate în exemplul care urmează. Subreţeaua din fig. 2.26 conţine o sursă controlată. Graful conţine două laturi (figurate cu linii îngroşate) corespunzătoare sursei controlate. Latura *3 a* grafului nu are un corespondent fizic în reţea; ea corespunde unui circuit deschis. Totuşi, tensiunea acestei laturi, v_3 este diferită de zero; şi, deoarece ea apare explicit în ecuaţiile pe laturi, nu poate fi neglijată. Dar se observă că tensiunea v_3 poate fi exprimată în funcţie de alte tensiuni; în acest exemplu $v_3 = v_1 - v_2$. Deci, dacă această relaţie e substituită lui v_3 în relaţiile pe laturi nici v_3 şi nici i_3 nu vor mai apare. În consecinţă, latura *3* poate fi eliminată din graf. Aşadar, sursa controlată e reprezentată acum printr-o singură latură (latura *4* din graf) şi ecuaţia corespunzătoare ei devine

$$i_4 = g_m v_3 = g_m v_1 - g_m v_2. \tag{103}$$

sau

$$\begin{bmatrix} i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_m & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Acest exemplu se referă numai la unul dintre dispozitivele ce figurează în tabelul 2.1. Deoarece fiecare dintre ele are o reprezentare diferită vor apare diferenţe specifice în tratarea lor. Din acest motiv în cele ce urmează se vor examina sistematic reprezentările prin impedanţe şi/sau admitanţe pentru fiecare dintre ele.

Se consideră mai întîi un girator, care poate fi reprezentat fie prin impedanţe, fie prin admitanţe. Aşadar, nu sînt necesare măsuri speciale

pentru a face analiza pe bucle sau pe noduri. Cu titlu de exemplu se consideră rețeaua din fig. 2.27 care conține un girator. Graful corespunzător giratorului va avea două laturi reprezentate prin linii îngroșate.

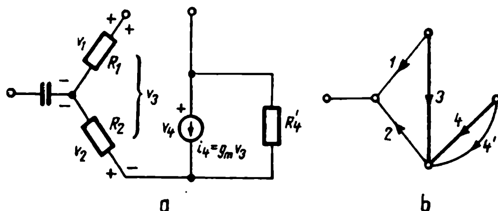


Fig. 2.26. Subrețea cu o sursă de curent controlată prin tensiune.

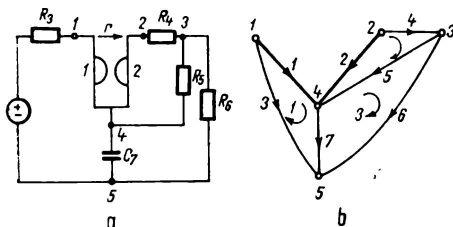


Fig. 2.27. Rețea cu girator (*a*) și graful respectiv (*b*).

Matricea impedanță a laturilor pentru întreaga rețea inclusiv giratorul se scrie cu ușurință.

Pentru numerotarea laturilor și buclelor dată pe figură, matricea impedanță a laturilor este

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/sC_7 \end{bmatrix}$$

iar matricea buclelor

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rezultă că matricea impedanţă a buclelor este

$$\mathbf{Z}_m = \mathbf{BZB}' = \begin{bmatrix} R_3 + 1/sC_7 & -r & -1/sC_7 \\ -r & R_4 + R_5 & -R_5 \\ -1/sC_7 & -R_5 & R_5 + R_6 + 1/sC_7 \end{bmatrix}.$$

(Se propune cititorului să verifice aceste relaţii). Se observă că prezenţa giratorului face ca matricele $\mathbf{Z}$ şi $\mathbf{Z}_m$ să devină nesimetrice.

Întrucît giratorul admite şi o reprezentare prin admitanţe se pot scrie cu uşurinţă şi ecuaţiile pe noduri. Alegînd nodul *5* ca nod de referinţă se obţine matricea de incidenţă

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

şi matricea admitanţă a laturilor

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & g & & & & & \\ -g & 0 & & & & & \\ & & G_3 & & & \bigcirc & \\ & & & G_4 & & & \\ & \bigcirc & & & G_5 & & \\ & & & & & G_6 & \\ & & & & & & sC_7 \end{bmatrix}$$

Rezultă că matricea admitanță a nodurilor este

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{AYA}' = \begin{bmatrix} G_3 & g & 0 & -g \\ -g & G_4 & -G_4 & g \\ 0 & -G_4 & G_4 + G_5 + G_6 & -G_5 \\ g & -g & -G_5 & G_5 + sC_7 \end{bmatrix}.$$

(Se propune cititorului să verifice aceste relații.) Se observă că prezența giratorului face ca matricele $\mathbf{Y}$ și $\mathbf{Y}_n$ să devină nesimetrice.

Prezența giratorului nu implică deci nici un fel de precauții în scrierea ecuațiilor pe bucle sau pe noduri.

Vom examina acum o sursă de curent controlată prin tensiune. O astfel de sursă apare în fig. 2.26. S-a arătat că latura din graf corespunzătoare intrării acestui dispozitiv poate fi eliminată atunci cînd tensiunea de comandă se exprimă în funcție de tensiunile celorlalte laturi. Dispozitivul este atunci reprezentat printr-o singură latură și matricea admitanță a laturilor se scrie ușor, permițînd analiza rețelei pe noduri.

Dacă se cere însă o analiză pe bucle apare o problemă. Ecuațiile pe bucle implică reprezentări prin impedanțe ale componentelor. Pentru rețeaua din fig. 2.26 trebuie găsită o expresie a tensiunii v_4 în funcție de curenți. Dar v_4 nu apare explicit în relația (103), care este relația corespunzătoare pe laturi, ceea ce conduce la un impas. Totuși se poate găsi un remediu, dacă latura *4'* din fig. 2.26, împreună cu latura *4* se leagă în paralel într-o singură latură. Dacă i_4 este curentul laturii care rezultă, atunci ecuația (103) se înlocuiește prin

$$i_4 = g_m v_1 - g_m v_2 + G_4' v_4. \tag{104}$$

Acum se poate explicita v_4, după ce fiecare din tensiunile pe laturi a fost eliminată, utilizînd relațiile tensiune-curent

$$v_4 = - g_m R_1 R_4' i_1 + g_m R_2 R_4' i_2 + R_4' i_4. \tag{105}$$

Matricea impedanță a laturilor se poate scrie acum cu ușurință.

Ce se întîmplă în graf operîndu-se cele de mai sus? O latură reprezentînd sursa controlată a fost eliminată prin combinarea ei cu o altă latură legată în paralel. Evident, acesta cere ca sursele controlate să fie însoțite, ceea ce se poate obține întotdeauna procedînd la deplasarea surselor de curent. Sursele de tensiune controlate prin curent pot fi tratate pe o cale duală. Aici, latura de intrare din graful dispozitivului poate fi eliminată, atunci cînd curentul de comandă se exprimă în funcție de curenții celorlalte laturi. Se poate scrie deci matricea impedanță a latu-

rilor şi analiza pe bucle se poate face fără dificultăţi. Totuşi, dacă se cere analiza pe noduri va fi necesar să se combine într-o singură latură sursa controlată şi o latură care o însoţeşte. Aceasta se poate obţine prin deplasarea surselor de tensiune. După această etapă se inversează relaţiile scrise pe laturi şi se obţine reprezentarea prin admitanţe. Detaliile acestor dezvoltări se lasă pe seama cititorului.

În tabelul 2.1 apar patru dispozitive care au numai o reprezentare hibridă. Înainte de a găsi o reprezentare prin impedanţe sau admitanţe, laturile acestor elemente trebuie combinate cu laturile care le însoţesc şi tensiunile sau curenţii de comandă trebuie exprimaţi în funcţie de curenţii celorlalte laturi.

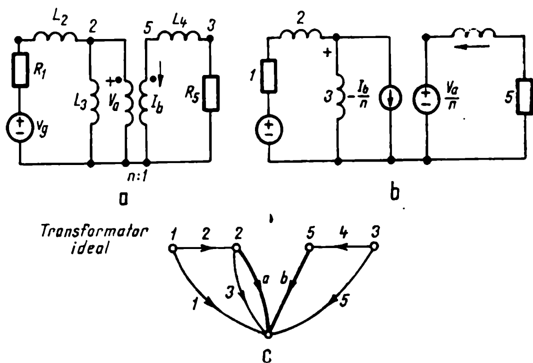


Fig.. 2.28. Reţea cu transformator ideal (*a*), schema echivalentă (*b*) şi graful corespunzător (*c*).

Vom ilustra cele de mai sus considerînd drept exemplu reţeaua din fig. 2.28 *a*, care conţine un transformator ideal. Transformatorul ideal poate fi înlocuit printr-o combinaţie echivalentă de două surse controlate aşa cum se arată în fig. 2.28 *b*. Această etapă nu este esenţială; toate celelalte etape se pot parcurge referindu-ne la graf, fără a face apel la această reţea echivalentă. În graful reţelei din fig. 2.28 *c* laturile corespunzătoare transformatorului sînt reprezentate prin linii îngroşate. Se observă că fiecare sursă controlată este însoţită. Tensiunea corespunzătoare laturii din stînga, V_a, este aceeaşi cu tensiunea corespunzătoare laturii care o însoţeşte, V_3. Tot aşa, curentul prin latura din dreapta, I_b,

este acelaşi cu curentul prin latura care o însoţeşte, I_4. Ecuaţiile transformatorului sînt

$$V_b = \frac{V_a}{n} \text{ şi } I_a = -\frac{I_b}{n}. \tag{106}$$

Vom scrie acum relaţiile pe laturi pentru transformator, combinîndu-le de această dată cu laturile care îl însoţesc. Fie I_3 suma curentului I_a şi a curentului prin latura *3*, iar V_4 suma tensiunii V_b şi a tensiunii pe latura *4*. Atunci

$$V_4 = sL_4I_4 + \frac{V_a}{n} = sL_4I_4 + \frac{V_3}{n} \tag{107a}$$

$$I_3 = \frac{1}{sL_3} V_3 - \frac{I_b}{n} = \frac{1}{sL_3} V_3 - \frac{I_4}{n} \tag{107b}$$

Aceste ecuaţii pot fi transcrise pentru a permite reprezentarea prin impedanţe sau prin admitanţe. Se obţin relaţiile

Reprezentarea prin impedanţe

$$V_3 = sL_3I_3 + \frac{sI_3}{n} I_4$$

$$V_4 = \frac{sL_3}{n} I_3 + s\left(\frac{L_3}{n^2} + L_4\right) I_4$$

Reprezentarea prin admitanţe

$$I_3 = \left(\frac{1}{sL_3} + \frac{1}{n^2 sL_4}\right) V_3 - \frac{V_4}{nsL_4}$$

$$I_4 = -\frac{V_3}{nsL_4} + \frac{1}{sL_4} V_4.$$

Ca urmare a acestor etape, laturile *a* şi *b* din graf se unifică cu laturile care le însoţesc şi dispar. (Nodul *5* dispare de asemenea.) Matricea impedanţă a laturilor va fi

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} R_1 & & & & \\ & sL_2 & & & \bigcirc \\ & & sL_3 & \frac{sL_3}{n} & \\ \bigcirc & & \frac{sL_3}{n} & s\left(L_4 + \frac{L_3}{n^2}\right) & \\ & & & & R_5 \end{bmatrix}. \tag{108}$$

Se propune cititorului să completeze problema determinînd matricea impedanţă a buclelor $\mathbf{Z}_m$.

Din cele de mai sus rezultă clar că prezenţa unor dispozitive cu patru terminale ridică anumite probleme în scrierea ecuaţiilor pe bucle sau pe noduri, dar aceste probleme nu sînt de nerezolvat. Dacă încercăm să scriem aceste ecuaţii sînt necesare cîteva transformări prealabile. Aceste transformări implică unificarea anumitor laturi şi efectele corespunzătoare în graf. Cu toate că graful acestor dispozitive este reprezentat în general prin două laturi, am eliminat uneori cîte o latură, unificînd-o cu alte

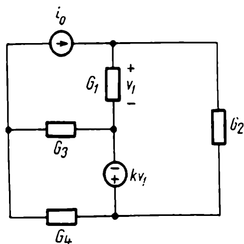


Fig. 2.29. Matrice impedanţă, potenţial singulară

laturi din graf. Laturile de control a surselor comandate au fost eliminate (după ce tensiunile sau curenţii de comandă au fost eliminaţi, fiind exprimaţi în funcţie de alte mărimi). Laturile controlate au fost de asemenea eliminate din graf, ori de cîte ori s-a dorit o analiză care nu corespundea reprezentării naturale a dispozitivului. Mai tîrziu vom găsi alte căi de tratare a laturilor grafurilor pentru aceste dispozitive.

Trebuie să observăm că în cazul reţelelor mici o tratare sistematică implică eforturi mai mari decît acelea de a scrie direct ecuaţiile pe bucle sau pe noduri. În plus, efortul este amplificat de necesitatea reprezentării dispozitivelor într-un mod care nu este cel natural. În paragraful următor vom considera altă tratare, care utilizează o reprezentare hibridă directă.

În fine: prezenţa dispozitivelor nereciproce şi/sau active într-o reţea, semnifică imposibilitatea de a găsi o soluţie unică, pentru diverse valori ale parametrilor reţelei. Această idee este ilustrată de reţeaua din fig. 2.29, care conţine o sursă de tensiune controlată în tensiune. Pentru această reţea, matricea admitanţă a nodurilor va fi singulară dacă $G_1 = (k - 1)G_2$. Deci în acest caz nu există soluţie. Propunem cititorului să verifice această afirmaţie.

2.7. ECUAŢII CU VARIABILE MIXTE

Am observat în ultimul paragraf că intenţia de a scrie ecuaţiile pe bucle sau pe noduri, în cazul reţelelor cu elemente cu mai multe borne terminale ridică probleme, pentru anumite tipuri de elemente. Reuşita în scrierea ecuaţiilor pe bucle sau pe noduri depinde de existenţa unei reprezentări prin impedanţe sau admitanţe a relaţiilor pe laturi. Dacă un dispozitiv cu mai multe borne terminale nu are o asemenea reprezentare sînt necesare anumite transformări şi combinaţii prealabile ale laturilor, pentru a fi posibilă scrierea ecuaţiilor dorite.

Vom prezenta acum o schemă care evită aceste transformări prealabile şi permite utilizarea relaţiilor pe laturi în forma lor naturală.

Dintre toate elementele de care dispunem, cîteva (incluzînd R, L, C şi giratoarele) au ambele reprezentări — prin impedanţă şi prin admitanţă; una (sursa de curent controlată prin tensiune) are numai reprezentare prin admitanţă, alta (sursa de tensiune controlată prin curent) are numai o reprezentare prin impedanţă; şi unele (transformatorul, NIC, sursa de tensiune controlată prin tensiune şi sursa de curent controlată prin curent) au numai o reprezentare mixtă sau hibridă. Orice schemă trebuie să se încadreze într-una din aceste categorii. Trebuie să ne amintim că tensiunile ramurilor formează o bază, în funcţie de care pot fi exprimate toate tensiunile laturilor. În mod similar, curenţii joncţiunilor formează o bază în funcţie de care pot fi exprimaţi toţi curenţii laturilor.

Ţinînd seamă de acestea, dîndu-se o reţea se alege mai întîi un arbore. În loc să se exprime relaţiile pe laturi sub forma $\mathbf{V} = \mathbf{ZI}$ sau $\mathbf{I} = \mathbf{YV}$, se scriu nişte relaţii mixte de forma

$$\begin{matrix} l-n \\ n \end{matrix}\begin{bmatrix} \mathbf{V}_l \\ \mathbf{I}_t \end{bmatrix} = \overset{\quad l-n \qquad n}{\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_l & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{Y}_t \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_l \\ \mathbf{V}_t \end{bmatrix} \tag{109}$$

sau

$$\mathbf{V}_l = \mathbf{Z}_l \mathbf{I}_l + \mathbf{H}_{12} \mathbf{V}_t \tag{110a}$$

$$\mathbf{I}_t = \mathbf{H}_{21} \mathbf{I}_l + \mathbf{Y}_t \mathbf{V}_t. \tag{110b}$$

(Dimensiunile submatricelor sînt cele indicate în relaţia (109).) Notaţiile pentru matricele coeficienţilor s-au ales pentru a facilita memorarea. Pentru uniformitate ar fi trebuit ca prima submatrice din prima linie să se noteze prin $\mathbf{H}_{11}$, iar ultima submatrice din linia a doua prin $\mathbf{H}_{22}$. Dar, deoarece ele sînt de natura unor impedanţe şi respectiv admitanţe, s-a ales o notaţie mai simplă şi mai sugestivă.

În aceste ecuaţii am exprimat curenţii ramurilor şi tensiunile joncţiunilor în funcţie de un grup de variabile mixte formate din tensiunile ramurilor şi curenţii joncţiunilor. Aici se observă posibilitatea de a utiliza o reprezentare hibridă a laturilor dacă laturile cu astfel de reprezentări se aleg drept joncţiuni sau ramuri în mod convenabil. Acest punct de vedere va fi accentuat pe scurt în cele ce urmează.

Urmează să se aplice TKT şi TKC. Presupunem că se aplică TKT pentru buclele fundamentate corespunzător unui arbore dat, iar TKC se aplică mulţimii secţiunilor fundamentale. Utilizînd relaţiile (68) şi (69) pentru TKT şi TKC; făcînd o partiţie a matricelor $\mathbf{B}$ şi $\mathbf{Q}$ de formă uzuală, cu $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_t\ \mathbf{U}]$ şi $\mathbf{Q} = [\mathbf{U}\ \mathbf{Q}_l]$; şi amintindu-ne că $\mathbf{B}_t = -\mathbf{Q}_l'$ din relaţia (41) se obţine:

$$[\mathbf{B}_t\ \ \mathbf{U}]\begin{bmatrix}\mathbf{V}_t\\ \mathbf{V}_l\end{bmatrix} = -\mathbf{Q}_l'\mathbf{V}_t + \mathbf{V}_l = \mathbf{B}\mathbf{V}_g \tag{111a}$$

şi

$$[\mathbf{U}\ \ \mathbf{Q}_l]\begin{bmatrix}\mathbf{I}_t\\ \mathbf{I}_l\end{bmatrix} = \mathbf{I}_t + \mathbf{Q}_l\mathbf{I}_l = \mathbf{Q}\mathbf{I}_g. \tag{111b}$$

(Indicele f care înseamnă „fundamental" a fost omis pentru simplitate). Prima din aceste relaţii poate fi soluţionată în raport cu $\mathbf{V}_l$, a doua poate fi soluţionată în raport cu $\mathbf{I}_t$ iar rezultatul se poate introduce în relaţia (110). După rearanjarea termenilor se obţine:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_t & (\mathbf{H}_{21} + \mathbf{Q}_l)\\ (\mathbf{H}_{12} - \mathbf{Q}_l') & \mathbf{Z}_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_t\\ \mathbf{I}_l\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{Q}\mathbf{I}_g\\ \mathbf{B}\mathbf{V}_g\end{bmatrix}. \tag{112}$$

Acesta este un un sistem de ecuaţii în raport cu variabile mixte reprezentînd tensiuni şi curenţi; şi anume, tensiunile ramurilor şi curenţii joncţiunilor. Apar aici tot atîtea variabile cîte laturi sînt în graf, ceea ce reprezintă preţul pe care trebuie să-l plătim. În partea din dreapta semnului egal, se poate face de asemenea o partiţie a matricei $\mathbf{Q}$ iar $\mathbf{B}_t$ se poate înlocui prin $-\mathbf{Q}_l'$. Astfel, pentru o reţea dată, este suficient să se găsească matricea $\mathbf{Q}$ şi să se scrie relaţiile tensiune-curent date de relaţia (109). Pentru aceste relaţii se cunosc matricea $\mathbf{Q}_l$ şi submatricele parametrilor laturilor $\mathbf{H}$, aşadar se pot scrie relaţiile (112).

Se observă că atunci cînd nu apar dispozitive cu mai multe terminale în reţea, $\mathbf{H}_{12} = \mathbf{H}_{21} = 0$. În acest caz, după ce se separă ecuaţia matriceală (112) în două ecuaţii, dacă se substituie a doua ecuaţie în prima se ajunge la ecuaţiile pe perechi de noduri; dacă se substituie prima ecuaţie în a doua se ajunge la ecuaţiile pe bucle. Se propune cititorului să demonstreze adevărul acestor afirmaţii.

Forma ecuaţiilor din relaţia (110) depinde de arborele ales. Orice latură R, L sau C admite atît o reprezentare prin impedanţă cît şi una prin admitanţă şi poate fi aleasă atît ca ramură cît şi ca joncţiune (vezi tabelul 1). Giratorul are de asemenea ambele reprezentări, astfel cele două laturi ale sale pot fi atît ramuri cît şi joncţiuni. Cu toate acestea, cînd tensiunea unei laturi se exprimă în funcţie de curentul alteia, ambele laturi trebuie să fie sau ramuri sau joncţiuni.

Tabelul 2.2.

Dispozitivul	Tipul reprezentării	Ramură sau joncţiune	
		Latură de comandă	Latură comandată
Girator	Admitanţe sau impedanţe	Ramură sau joncţiune	Ramură sau joncţiune
Sursă de curent controlată în tensiune	Admitanţe	Ramură	Ramură
Sursă de tensiune controlată în curent	Impedanţe	Joncţiune	Joncţiune
Transformator ideal sau NIC	Parametri hibrizi h sau g	Ramură sau joncţiune	Joncţiune sau ramură
Sursă de tensiune controlată în tensiune	Parametri hibrizi g	Ramură	Joncţiune
Sursă de curent controlată în curent	Parametri hibrizi h	Joncţiune	Ramură

Deoarece sursa de tensiune controlată în curent are numai reprezentare prin impedanţă, ambele sale laturi trebuie să fie joncţiuni. Invers pentru sursa de curent controlată în tensiune : există numai o reprezentare prin admitanţă, deci ambele sale laturi trebuie să fie ramuri. În cazul transformatorului ideal şi al convertorului în imitanţă negativă (NIC) există numai reprezentări hibride, dar sînt două posibilităţi : parametrii hibrizi h sau parametrii hibrizi g; astfel, tensiunea de intrare şi curentul de ieşire se pot exprima în funcţie de tensiunea de ieşire şi curentul de

intrare sau invers. Deci una dintre cele două laturi trebuie să fie o ramură, cealaltă o joncţiune şi nu are importanţă care este aceea. În fine, sursa de tensiune controlată în tensiune şi sursa de curent controlată în curent au ambele numai reprezentări prin parametrii hibrizi. Pentru prima dintre acestea, curentul pe latura de comandă este bine determinat (fiind zero), aşadar latura trebuie să fie o ramură; tensiunea pe latura comandată este determinată, aşadar aceasta trebuie să fie o joncţiune. Situaţia este inversă pentru sursa de curent controlată în curent. Aceste rezultate sînt prezentate sintetic în tabelul 2.2.

Deoarece există limitări în ceea ce priveşte posibilităţile de alegere (ramură sau joncţiune) a laturilor unor reţele ce conţin componente cu mai multe terminale, poate fi imposibil să se găsească un arbore care să permită fiecărei laturi să fie ceea ce indică tabelul 2.2. În acest caz, tratarea prezentată va fi abandonată.

Se observă că nu există un motiv pentru a scrie relaţiile pe laturi în forma din (109). Ele pot fi scrise în formă inversă, după cum urmează:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I}_l\\ \mathbf{V}_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_l\\ \mathbf{I}_t\end{bmatrix}. \tag{113}$$

În acest caz denumirile de ramură şi joncţiune care apar în ultimele două coloane ale tabelului 2.2 vor trebui să fie inversate. Aceasta face ca ecuaţiile corespunzătoare relaţiei (112) utilizînd matricea **G** să fie mai complicate. Detaliile obţinerii acestor ecuaţii nu vor fi abordate. În orice caz, dacă una dintre aceste reprezentări hibride eşuează, cealaltă va reuşi [1])

Pentru a ilustra scrierea ecuaţiilor cu variabile mixte, se consideră din nou reţeaua din fig. 2.28, care este redesenată aici în fig. 2.30. Un arbore posibil este arătat în graf prin linii îngroşate. În scopul comparaţiei este făcută aceeaşi numerotare a laturilor ca şi înainte, dar nu este cea naturală pentru arborele selectat; în scrierea ecuaţiilor trebuie acordată atenţie ordinei laturilor. Matricea mulţimii secţiunilor fundamentale luate în ordinea *1*, *a*, *4*, *5* este

$$\mathbf{Q}=\begin{matrix} & \begin{matrix}1 & a & 4 & 5 & & b & 2 & 3\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\ a\\ 4\\ 5\end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc:ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]\end{matrix}, \quad \mathbf{Q}_l=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

[1]) Problema poate fi rezolvată, chiar dacă ambele eşuează, printr-o transformare care foloseşte doi arbori. E clar, totuşi, că eşecul ambelor reprezentări se poate produce numai pentru reţelele care au mai multe surse controlate într-o conexiune particulară. Deci necesitatea unei asemenea transformări este atît de rară încît nu sîntem îndreptăţiţi să continuăm discuţia.

Pentru a scrie relaţiile tensiune-curent în forma corespunzătoare relaţiei (109), variabilele ramurilor şi joncţiunilor sînt dispuse în matrice coloană în aceeaşi ordine ca şi în matricea **Q**. Astfel

$$\begin{bmatrix} V_b \\ V_2 \\ V_3 \\ \cdots \\ I_1 \\ I_a \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{Z}_l & \mathbf{H}_{12} \\ \hdashline \mathbf{H}_{21} & \mathbf{Y}_t \end{array}\right] \begin{bmatrix} I_b \\ I_2 \\ I_3 \\ \cdots \\ V_1 \\ V_a \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}$$

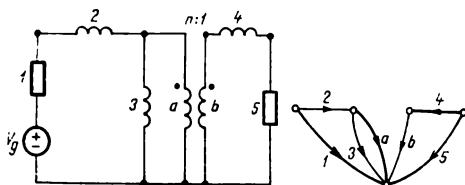


Fig. 2.30. Exemplu pentru ecuaţii cu variabile mixte.

Acum se cunoaşte matricea **H**. Singurele laturi care vor da termeni nesituaţi pe diagonală sînt acelea ale transformatorului. Ecuaţiile corespunzătoare lor sînt $V_b = V_a/n$ şi $I_a = -I_b/n$. Rezultă

$$\begin{bmatrix} V_b \\ V_2 \\ V_3 \\ \cdots \\ I_1 \\ I_a \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/n & 0 & 0 \\ 0 & sL_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sL_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/sL_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 \end{array}\right] \begin{bmatrix} I_b \\ I_2 \\ I_3 \\ \cdots \\ V_1 \\ V_a \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}.$$

Din această expresie sînt uşor de identificat submatricele **H**.

În ceea ce priveşte sursele se presupune că nu există curenţi iniţiali prin bobine; astfel $\mathbf{I}_g = \mathbf{0}$, şi $\mathbf{V}_g$ este diferit de zero numai în primul

element, care este o ramură. Deci $\mathbf{B}\mathbf{V}_g$ se reduce la $\mathbf{B}_l\mathbf{V}_{gl} = -\mathbf{Q}_l'\mathbf{V}_{gl}$, unde, înlocuindu-se expresia obţinută anterior pentru $\mathbf{Q}_l$ se obţine

$$\mathbf{B}\mathbf{V}_g = -\mathbf{Q}_l'\mathbf{V}_{gl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -V_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_g \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Acum toate submatricele care intervin în relaţia (112) sînt determinate. Înlocuind în relaţie obţinem

$$\left[\begin{array}{cccc:ccc} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/n & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/sL_4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_5 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1/n & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & sL_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & sL_3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_a \\ V_4 \\ V_5 \\ \cdots \\ I_b \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ V_g \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(Propunem cititorului să verifice acest rezultat). Aceasta este o ecuaţie matriceală de ordinul 7. Totuşi, ea nu este atît de complicată pe cît se pare, deoarece în matricea coeficienţilor mulţi termeni sînt zero.

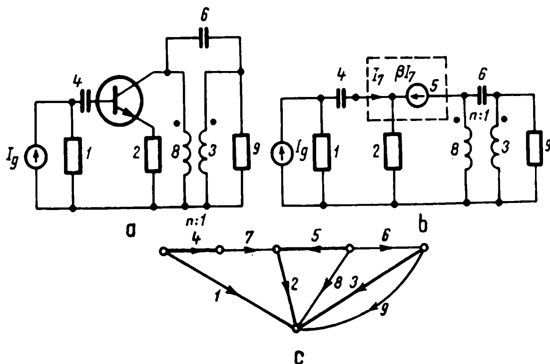


Fig. 2.31. Exemplu de circuit cu tranzistoare

Să considerăm încă un exemplu. În rețeaua din fig. 2.31, tranzistorul este un model simplu de sursă de curent controlată în curent, așa cum se arată în fig. 2.31 *b*. Liniile groase în graf reprezintă ca de obicei arborele. Latura 7 este latura de comandă a sursei. Conform tabelului 2.2, această latură trebuie să fie o joncțiune și latura controlată în curent (latura 5) trebuie să fie o ramură. Pentru transformatorul ideal o latură trebuie să fie o ramură și cealaltă o joncțiune. Odată ce laturilor componentelor cu mai multe terminale li se atribuie caracterul necesar (conform tabelului 2.2), celelalte laturi ale arborelui sînt bine determinate. Acum pot fi scrise relațiile pe laturi și matricea **Q**

$$\begin{bmatrix} V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \\ \cdots \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc:ccccc} 1/sC_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sC_4 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ \cdots \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_l = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

În ceea ce privește sursele, atribuim capacităților tensiunile inițiale v_{40} și v_{60}, respectiv. Acestea pot fi reprezentate ca surse de tensiune v_{40}/s și v_{60}/s. Matricele surselor sînt

$$\mathbf{I}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{gt} \\ \mathbf{I}_{gl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{gt} \\ \mathbf{V}_{gl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{40}/s \\ 0 \\ \cdots \\ v_{60}/s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deci $\mathbf{QI}_g$ devine $\mathbf{I}_{gt} = [I_g\ 0\ 0\ 0\ 0]'$ şi $\mathbf{BV}_g$ devine $-\mathbf{Q}_l'\mathbf{V}_{tl} + \mathbf{V}_{gl} = [v_{60}/s\ v_{40}/s\ 0\ 0]'$.

După introducerea acestora în relaţia (112) se obţin ecuaţiile finale

$$\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & sC_4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1/sC_6 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & n & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{60}/s \\ v_{40}/s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dimensiunile matricei pot apărea impresionante, dar trebuie să observăm că termenii nenului sînt destul de puţini.

Pentru a rezuma caracteristicile ecuaţiilor cu variabile mixte, după selecţia unui arbore relaţiile tensiune-curent pe laturi se scriu sub forma unei singure ecuaţii matriceale în care curenţii ramurilor şi tensiunilor joncţiunilor sînt exprimaţi funcţie de tensiunile ramurilor şi curenţii joncţiunilor. Apoi se aplică TKC mulţimii secţiunilor fundamentale corespunzătoare arborelui ales şi TKT buclelor fundamentale pentru a elimina curenţii ramurilor şi tensiunile joncţiunilor. Relaţiile rezultate se aranjează pentru a obţine un sistem de ecuaţii în raport cu tensiunile ramurilor şi curenţii joncţiunilor. Numărul de ecuaţii este egal cu numărul laturilor, şi este acelaşi cu suma dintre numărul ecuaţiilor pe bucle şi numărul ecuaţiilor pe noduri. Acesta este dezavantajul principal al procedeului. Avantajul constă în aceea că dispozitivele cu mai multe terminale sînt încadrate prin reprezentarea lor naturală.

Se poate face încă o observaţie. În alegerea arborelui nu apar restricţii decît în cazul dispozitivelor cu mai multe terminale. Dispozitivele cu două terminale pot să apară fie în arbore fie în coarbore întrucît ecuaţiile respective nu fac distincţie între condensatoare, bobine şi rezistenţe. Aşa cum vom arăta într-un capitol următor, situaţia se schimbă atunci cînd se scriu ecuaţiile de stare, întrucît acolo există motive ca bobinele şi condensatoarele să fie atribuite într-un mod bine precizat fie arborelui, fie coarborelui.

PROBLEME

P 1. Cînd s-au scris ecuaţiile de stare pentru reţeaua în punte din fig. 2.2, s-au introdus relaţiile pe laturi în TKT pentru a elimina toate tensiunile pe laturi, cu excepţia tensiunii pe condensator. Apoi s-au folosit TKC pentru a elimina curenţii unor laturi. Acum, plecînd

de la TKC şi utilizînd relaţiile pe laturi se cere să se elimine curenţii adecvaţi. Apoi se va folosi TKT pentru a elimina tensiunile unor laturi. Rezultatul final trebuie să coincidă cu cel din relaţia (10)

P 2. Fie $\mathbf{A}_t$ o submatrice nesingulară de ordinul n a matricei de incidenţă pentru un graf liniar cu $n + 1$ noduri. Să se arate că coloanele matricei $\mathbf{A}_t$ corespund cu ramurile unui arbore. (Aceasta este reciproca teoremei de la pag. 87).

P 3. Fie un graf liniar în care cîteva laturi formează o buclă. Să se arate că coloanele corespunzătoare laturilor respective din matricea $\mathbf{A}$ sînt liniar dependente.

P 4. Să se arate că orice mulţime compusă din n laturi ale unui graf conex care nu conţine nici o buclă formează un arbore.

P 5. Se poate face o partiţie a matricei de incidenţă a unui graf de forma $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_t \, \mathbf{A}_l]$ unde coloanele din $\mathbf{A}_t$ corespund ramurilor iar coloanele din $\mathbf{A}_l$ corespund joncţiunilor unui arbore. Submatricea $\mathbf{A}_t$ este nesingulară; în anumite cazuri ea poate fi o matrice unitate. Care trebuie să fie structura arborelui pentru ca $\mathbf{A}_t = \mathbf{U}$? Să se demonstreze şi să se ilustreze cu un exemplu.

P 6. Fie $\mathbf{B}_l$ o submatrice nesingulară de ordinul $l - n$ a matricei buclelor $\mathbf{B}$ care are dimensiunile $(l - n) \times l$. Să se demonstreze că coloanele din $\mathbf{B}_l$ corespund joncţiunilor pentru un coarbore al grafului care este presupus conex.

P 7. Un graf liniar are cinci noduri şi şapte laturi. Matricea de incidenţă redusă pentru acest graf este

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Se afirmă că laturile $\{1, 3, 4, 5\}$ constituie un arbore. Fără să se deseneze graful să se verifice adevărul acestei afirmaţii.
(b) Pentru acest arbore să se scrie matricea buclelor fundamentale $\mathbf{B}_f$ (din nou fără a desena graful).
(c) Pentru un arbore oarecare să se determine matricea secţiunilor fundamentale $\mathbf{Q}_f$ (fără a desena graful).
(d) Să se determine numărul arborilor din graf.
(e) Să se deseneze graful şi să se verifice rezultatele precedente.

P 8. Să se repete problema 7 pentru următoarele matrice de incidenţă şi pentru laturile menţionate:

(a) $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{laturi: } \{2, 3, 4\}$$

(b) $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{laturi: } \{1, 3, 5, 6\}$$

P 9. Să se demonstreze următoarea afirmaţie: într-un graf liniar orice mulţime de secţiuni are un număr par de laturi comune cu orice buclă.

P 10. Pentru $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_t\ \mathbf{A}_l]$ şi $\mathbf{B}_f = [\mathbf{F}_t\ \mathbf{U}]$ se ştie că $\mathbf{B}_t = -(\mathbf{A}_t^{-1}\mathbf{A}_l)'$. Astfel pentru a obţine $\mathbf{B}_f$ trebuie să dispunem de $\mathbf{A}_t^{-1}$. Care din matricele de mai jos sînt recomandabile a fi utilizate drept $\mathbf{A}_t^{-1}$?

(a) $$\mathbf{A}_t^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$ (b) $$\mathbf{A}_t^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

(c) $$\mathbf{A}_t^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

P 11. Fie $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_t\ \mathbf{A}_l]$, unde $\mathbf{A}_t$ este o matrice nesingulară. Să se demonstreze că elementele nenule din fiecare linie a matricei $\mathbf{A}_t^{-1}$ trebuie să fie toate de acelaşi semn.

P 12. Se defineşte matricea căilor unui arbore $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ după cum urmează: $p_{ij} = +1$ (sau -1) dacă latura j face parte din calea directă (unică) din arbore între nodul i şi nodul de referinţă iar orientarea sa coincide (sau este opusă) cu orientarea căii, şi $p_{ij} = 0$ dacă latura j nu face parte din calea respectivă. Matricea căilor este o matrice pătrată ale cărei linii corespund căilor dintre nodurile respective şi nodul de referinţă iar coloanele corespund ramurilor; de exemplu, elementele nenule care apar să zicem, în coloana a treia, precizează căile din care face parte ramura *3*; iar elementele nenule care apar, să zicem, în linia a patra, precizează ramurile care intervin în calea de la nodul *4* la nodul de referinţă. Să se scrie matricele căilor pentru fiecare din arborii: {*2, 5, 6, 8, 9*}, {*1, 3, 9, 10, 12*} şi {*1, 6, 7, 8, 11*} care apar în graful din fig. 2. P.12.

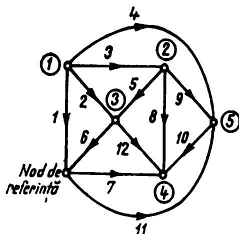


Fig. 2.P.12.

P 13. Cînd se calculează matricele $\mathbf{B}_f$ sau $\mathbf{Q}_f$ plecînd de la matricea de incidenţă este necesar să se calculeze $\mathbf{A}_t^{-1}$. Este deci necesară o metodă simplă de calcul. Să se arate că $\mathbf{A}_t^{-1} = \mathbf{P}'$, unde $\mathbf{P}$ este matricea căilor pentru arborele ale cărui ramuri corespund coloanelor din matricea $\mathbf{A}_t$.

P 14. Utilizînd rezultatele din Problema 13 să se determine $\mathbf{A}_t^{-1}$ pentru arborii din Problema 12. Să se verifice rezultatul prin calculul produsului $\mathbf{A}_t\mathbf{P}'$. În fiecare caz să se verifice rezultatul din Problema 11.

P 15. (a) Două laturi apar în paralel într-un graf. Să se găsească relaţiile între coloanele corespunzătoare acestor laturi din matricea $\mathbf{Q}_f$.

(b) Aceeaşi problemă pentru două laturi în serie.

P 16. Fie $\mathbf{Q}_f = [\mathbf{U}\ \mathbf{Q}_l]$. Presupunem că în matricea $\mathbf{Q}_l$, pe coloana j apare un singur element nenul pe linia k. Ce se poate spune despre structura grafului în ceea ce priveşte laturile j şi k?

P 17. Fie $Q_f = [U\ Q_l]$ şi $B_f = [B_t\ U]$. Se presupune că se dă matricea Q_f pentru un graf.
(a) Să se determine matricea B_f pentru graful respectiv;
(b) Să se discute posibilitatea de a determina matricea A pentru graful respectiv şi unicitatea acestui graf atunci cînd se dă matricea Q_f sau B_f.

P 18. Să se determine numărul de arbori pentru grafurile din fig. 2.P.18.

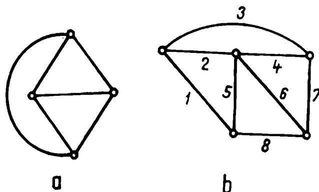


Fig. 2.P.18.

P 19. Să se arate că un graf conţine cel puţin o buclă dacă două sau mai multe laturi sînt incidente la fiecare nod.

P 20. Să se arate că matricea ochiurilor pentru un graf conex cu l laturi şi $n + 1$ noduri ste de rang $l - n$. Aceasta arată că o bază potrivită pentru a reprezenta curenţii tuturor eaturilor o formează curenţii ochiurilor.

P 21. Utilizînd conceptul de dualitate să se arate că ecuaţiile scrise pe baza TKT pentru ochiurile unui graf planar sînt liniar independente.

P 22. Într-un graf latura t reprezintă o ramură a unui arbore. Mulţimea secţiunilor fundamentale determinată de t conţine o mulţime de joncţiuni $l_1, l_2, \ldots$ corespunzătoare acestui arbore. Fiecare din aceste joncţiuni definesc o buclă fundamentală. Să se arate că fiecare din buclele fundamentale formate cu joncţiunile $l_1, l_2, \ldots$ conţine ramura t.

P 23. Fie **B** matricea buclelor formate din ochiurile grafului din fig. 2. P.23.

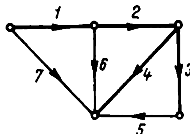


Fig. 2.P.23.

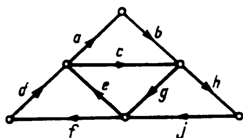
(a) Să se calculeze $B'(B_l^{-1})'$ şi să se verifice că curenţii laturilor sînt corect exprimaţi în funcţie de curenţii joncţiunilor pentru arborele arătat în figură.
(b) Pentru acelaşi arbore să se determine direct B_f şi să se verifice că $B_j = B'(B_l^{-1})$.
(c) Să se verifice transformarea pe ochiuri.

P 24. În graful din fig. 2. P.18 *b*, laturile {2, 3, 7, 6} formează o buclă. Să se verifice rezultatul problemei 3 pentru această mulţime de laturi.

P 25. În graful din fig. 2. P.18 *b* laturile {2, 4, 5, 6} formează un arbore. Se cere partiţia matricei **A** de forma $[A_t\ A_l]$ utilizînd acest arbore. Apoi, pentru $B_f = [B_t\ U]$ şi $Q_f = [U\ Q_l]$ să se determine B_t şi Q_l şi să se verifice relaţia $B_t = -Q_l'$.

P 26. E posibil ca două bucle fundamentale dintr-un graf, pentru un arbore dat să aibă ramuri şi noduri comune. Să se arate că e posibil ca două bucle fundamentale să aibă două noduri comune, numai dacă calea dintre cele două noduri în arbore este comună celor două bucle.

P 27. În fig. 2 P.27 apar următoarele bucle :



bucla *1* : *a*, *e*, *g*, *b*
bucla *2* : *d*, *c*, *g*, *f*
bucla *3* : *a*, *d*, *f*, *j*, *h*, *b*
bucla *4* : *e*, *c*, *h*, *j*

Fig. 2.P.27.

(**a**) Ecuaţiile scrise pe baza TKT pentru aceste bucle sînt independente?

(**b**) Se cere (1) să se găsească o mulţime de joncţiuni care formează bucle fundamentale ce constituie ochiuri ale grafului sau (2) să se arate că nu există o astfel de mulţime.

P 28. Într-o reţea liniară se defineşte puterea din latura *j* prin $p_j(t) = v_j(t)i_j(t)$ unde notaţiile sînt cele uzuale.

(a) Pentru o reţea dată, unde TKC şi TKT sînt satisfăcute, să se arate că $\sum p_j(t) = \mathbf{v}(t)'\mathbf{i}(t) = \mathbf{0}$, unde suma se face pentru toate laturile reţelei. Relaţia $\mathbf{v}'\mathbf{i} = \mathbf{0}$ se numeşte *teorema lui Tellegen*.

(**b**) Se presupune că teorema lui Tellegen şi TKT sînt satisfăcute Să se arate că TKC rezultă ca o consecinţă.

(**c**) Se presupune că teorema lui Tellegen şi TKC sînt satisfăcute. Să se arate că TKT rezultă ca o consecinţă. Această problemă demonstrează că din cele trei teoreme TKC, TKT şi teorema lui Tellegen oricare două pot fi considerate drept fundamentale ; a treia poate fi dedusă ca o consecinţă.

P 29. Să se construiască reţelele duale pentru reţelele din fig. 2.P.29. Numerele care apar în figură reprezintă valorile elementelor *R*, *L*, *C*.

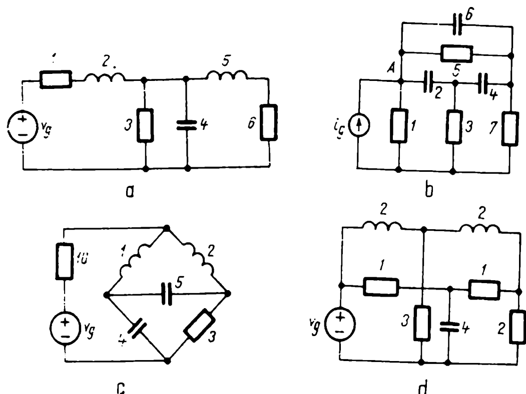


Fig. 2.P.29.

P 30. (a) Dacă într-un graf două laturi apar în paralel sau în serie cum sînt laturile corespunzătoare din graful dual?

Să se verifice pentru fig. 2.P.29.

(b) În fig. 2.P.30 se reprezintă rețeaua din fig. 2.P.29 *b*. În interiorul chenarului se află rețeaua în T podit.

Cum arată subrețeaua corespunzătoare din rețeaua duală?

(c) Care este structura rețelei duale pentru rețeaua în punte din fig. 2.P.29 *c*?

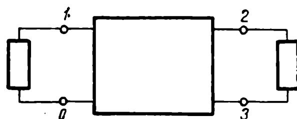


Fig. 2.P.30.

P 31. Pentru rețelele din fig. 2.P.29 să se scrie ecuațiile pe bucle utilizînd ochiurile drept bucle și curenții ochiurilor drept bază pentru mulțimea curenților. Pentru care din aceste rețele ochiurile reprezintă bucle fundamentale pentru un arbore dat? Alegînd alt arbore decît cel de la punctul precedent să se scrie ecuațiile pe bucle, pentru buclele fundamentale.

P 32. Pentru rețelele din fig. 2.P.29 se alege nodul inferior drept nod de referință. Să se scrie ecuațiile pe noduri.

P 33. Pentru rețelele din fig. 2.P.29 să se aleagă un arbore și să scrie ecuațiile pe perechi de noduri cu tensiunile ramurilor acestui arbore drept variabile de bază.

P 34. Se dă rețeaua din fig. 2.P.34.

(a) Să se scrie ecuațiile pe perechi de noduri pentru arborele din figură.

(b) Să se scrie ecuațiile pe noduri alegînd un nod de referință convenabil.

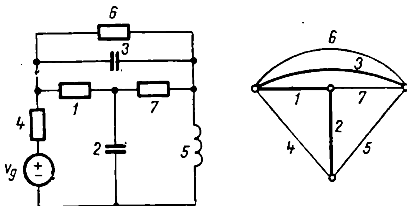


Fig. 2.P.34.

P 35. Pentru rețeaua din fig. 2.P.29 să se scrie ecuațiile pe noduri și să se verifice că matricea admitanță a nodurilor devine singulară cînd $G_1 = (k-1)G_2$.

P 36. În fig. 2. P.36 este reprezentată o rețea pentru care matricea admitanță a nodurilor sau matricea impedanță a buclelor pot fi singulare. Să se determine relațiile dintre parametrii, care determină aceste singularități.

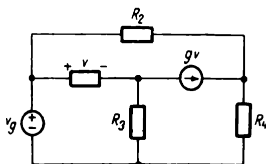


Fig. 2.P.36.

P.37. Pentru rețeaua din fig. 2.P.37 să se scrie sub formă matriceală:
(a) ecuațiile pe noduri;
(b) ecuațiile în variabile mixte;
(c) să se arate care sînt toți arborii din graful respectiv.

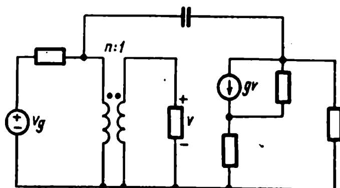
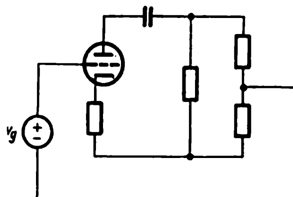


Fig. 2.P.37.

P 38. Pentru rețeaua din fig. 2.P.38 să se scrie (a) ecuațiile pe bucle, (b) ecuațiile în variabile mixte (utilizînd circuitul echivalent liniar pentru diodă la semnale mici) și (c) să se arate care sînt toți arborii posibili.



Fig· 2.P.38.

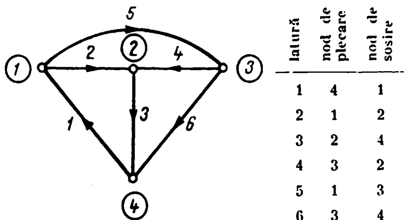
P 39. Să se găsească toți arborii posibili pentru care se pot scrie ecuațiile în variabile mixte în cazul rețelei din fig. 2.31.

P 40. Să se arate că matricea impedanță a buclelor $\mathbf{Z}_m = \mathbf{B}_f\mathbf{Z}\mathbf{B}_f'$ poate fi scrisă sub forma $\mathbf{Z}_l + \mathbf{Q}_l'\mathbf{Z}_t\mathbf{Q}_l$, unde s-a făcut o partiție convenabilă pentru matricele $\mathbf{Q}_f = [\mathbf{U}\ \mathbf{Q}_l]$ și $\mathbf{Z}$.

P 41. Să se arate că pentru reţelele R, L, C ecuaţiile în variabile mixte din relaţia (112) pot fi transformate în ecuaţiile pe bucle sau în ecuaţiile pe perechi de noduri.

În următoarele 6 probleme se cere pregătirea unui program de calculator care să servească la obţinerea soluţiilor unor anumite probleme. În fiecare caz se va elabora programul sub formă de organigramă, precum şi lista de instrucţiuni corespunzătoare într-un limbaj uzual, cum este FORTRAN 4, pentru un calculator numeric care să execute lucrarea specificată în problemă. Se vor include şi indicaţiile de utilizare a programului.

***P 42.** Să se pregătească un program pentru a identifica un arbore dintr-un graf conex cînd fiecare latură şi orientarea ei în graf sînt specificate prin trei numere: primul număr identifică latura, al doilea identifică nodul din care pleacă iar al treilea identifică nodul in care soseşte. Programul trebuie să renumeroteze de asemenea laturile astfel încît ramurile să fie numerotate de la 1 la n, iar joncţiunile de la $n+1$ la l. Un exemplu tipic de asemenea date ne oferă fig. 2.P.42.



latură	nod de plecare	nod de sosire
1	4	1
2	1	2
3	2	4
4	3	2
5	1	3
6	3	4

Fig. 2.P.42.

***P 43.** Să se pregătească un program pentru a determina matricea redusă de incidenţă pentru o reţea conexă avînd drept date iniţiale datele din Problema 42.

***P 44.** Să se pregătească un program pentru a determina:
(**a**) matricea buclelor fundamentale din relaţia (34);
(**b**) matricea secţiunilor fundamentale din relaţia (43);
Datele pentru această problemă sînt cele din Problema 43.

***P 45.** Să se pregătească un program pentru a determina numărul de arbori dintr-o reţea pe baza relaţiei (20). Se va specifica formatul datelor iniţiale.

***P 46.** Să se pregătească un program pentru a determina pentru o reţea R, L, C:
(**a**) matricea admitanţă a nodurilor;
(**b**) matricea impedanţă a buclelor;
(**c**) matricea admitanţă între perechi de noduri,
utilizînd: (1) matricele parametrilor între perechi de noduri din relaţia (91), (2) matricele parametrilor buclelor din relaţia (83) şi (3) matricele parametrilor între perechi de noduri din relaţia (99) respectiv. Se presupune că datele de intrare sînt prezentate printr-o secvenţă de cinci numere: primul identifică latura, al doilea identifică nodul de plecare, al treilea identifică nodul de sosire, al patrulea identifică tipul laturii (*1* pentru *C2,* pentru R şi *3* pentru L) al cincilea este valoarea parametrului laturii. Se presupune că (1) matricea redusă de incidenţă, (2) matricea buclelor fundamentale şi (3) matricea secţiunilor fundamentale au fost evaluate prin programele din Problemele 43 şi 44.

***P 47.** Să se combine programele din Problemele 43, 44 şi 46 într-un singur program, care să permită determinarea matricei admitanţă a nodurilor, matricei impedanţă a buclelor şi/sau matricei admitanţă între perechi de noduri pentru o reţea R, L, C corespunzător opţiunii beneficiarului.

3

Funcții de circuit (rețea)

În ultimul capitol s-au descris un număr de metode sistematice, aplicîndu-se legile fundamentale din teoria circuitelor, pentru obținerea unor seturi de ecuații ca ecuațiile pe contur, la noduri, la perechi de noduri sau ecuații cu variabile mixte. Desigur, aceste metode nu sînt, în mod necesar, simple de utilizat în toate problemele. În multe probleme referitoare la circuite de complexitate structurală moderată, simpla aplicare a unor proprietăți sau teoreme (Norton, Thévenin etc.), poate conduce, fără îndoială, la rezolvarea problemei, mult mai ușor decît scrierea și rezolvarea de exemplu a setului de ecuații pe contur.

Ecuațiile la care conduc metodele sistematice descrise sînt diferențiale sau integrodiferențiale. Se pot folosi metodele clasice de rezolvare a lor, dar în continuare se presupune că soluțiile vor fi obținute cu ajutorul transformatei Laplace.

Presupunînd că un circuit și transformatele Laplace ale ecuațiilor ce descriu comportarea sa sînt accesibile, să ne întoarcem la soluția acestor ecuații și la funcțiile de circuit care descriu comportarea circuitului.

3.1. FUNCȚII DE INTRARE ȘI DE TRANSFER

Fiind dat un circuit liniar, invariabil în timp, excitat de un număr de surse independente de curent și tensiune, cu valori inițiale arbitrare pentru tensiunile pe capacități și curenții prin bobine (care pot fi de asemenea reprezentate ca surse independente), se poate scrie un set de ecuații pe contur, la noduri sau la perechi de noduri. Circuitul poate fi

nereciproc sau poate să nu fie pasiv. În formă matriceală aceste ecuații vor fi toate similare. Astfel:

$$\mathbf{Z}_m(s)\mathbf{I}_m(s) = \mathbf{E}(s) \text{ (contur)} \tag{1a}$$

$$\mathbf{Y}_n(s)\mathbf{V}_n(s) = \mathbf{J}(s) \text{ (nod)} \tag{1b}$$

$$\mathbf{Y}_t(s)\,\mathbf{V}_t(s) = \mathbf{J}_t(s) \text{ (perechi de noduri)} \tag{1c}$$

Membrul drept al acestor ecuații conține contribuțiile surselor, inclusiv ale surselor echivalente condițiilor inițiale nenule; de exemplu, $\mathbf{J} = [J_i]$, unde J_i este suma surselor de curent, inclusiv echivalențele Norton a surselor de tensiune.

Soluția simbolică a acestor ecuații se obține simplu prin multiplicarea fiecărei ecuații cu inversa matricei corespunzătoare a coeficienților. Astfel:

$$\mathbf{I}_m(s) = \mathbf{Z}_m^{-1}\,\mathbf{E}(s)\,, \tag{2a}$$

$$\mathbf{V}_n(s) = \mathbf{Y}_n^{-1}\,\mathbf{J}(s)\,, \tag{2b}$$

$$\mathbf{V}_t(s) = \mathbf{Y}_t^{-1}\,\mathbf{J}_t(s)\,. \tag{2c}$$

Fiecare din aceste ecuații are aceeași formă. Pentru ilustrare, se dă forma dezvoltată a ecuației (2b). Astfel:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} & \frac{\Delta_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{\Delta_{m1}}{\Delta} \\ \frac{\Delta_{12}}{\Delta} & \frac{\Delta_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{\Delta_{m2}}{\Delta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\Delta_{1m}}{\Delta} & \frac{\Delta_{2m}}{\Delta} & \dots & \frac{\Delta_{mm}}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_m \end{bmatrix}, \tag{3}$$

unde Δ este determinantul matricei admitanțelor, iar Δ_{jk} sînt cofactorii acesteia.

Deci, pentru nodul k, expresia tensiunii V_k va fi:

$$V_k(s) = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} J_1 + \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} J_2 + \dots + \frac{\Delta_{mk}}{\Delta} J_m\,. \tag{4}$$

Din relaţia (4) rezultă că tensiunea unui nod este o combinaţie liniară de surse echivalente. Sursele $J : (J_1, J_2, \ldots, J_m)$ nu sînt surse actuale; de exemplu, pentru circuitul din fig. 3.1, presupunînd condiţii iniţiale nule, matricea J va fi:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{g2} + Y_1 V_{g1} \\ -I_{g2} + I_{g3} \\ -Y_1 V_{g1} \end{bmatrix}.$$

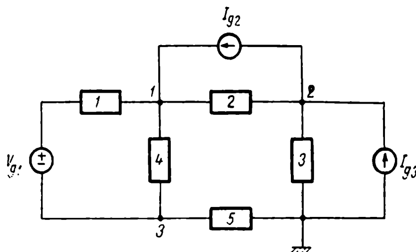


Fig. 3.1. Reprezentarea surselor echivalente.

Dacă se substituie pentru $\mathbf{J}$ expresiile corespunzătoare în funcţie de sursele actuale, rezultă clar că relaţia (4) poate fi aranjată astfel încît V_k să fie o combinaţie liniară a surselor actuale. Astfel, pentru fig. 3.1, expresia lui V_k va fi:

$$V_k(s) = \left(\frac{Y_1 \Delta_{1k} - Y_1 \Delta_{3k}}{\Delta} \right) V_{g1} + \left(\frac{\Delta_{1k} - \Delta_{2k}}{\Delta} \right) I_{g2} + \left(\frac{\Delta_{2k}}{\Delta} \right) I_{g3}. \quad (5)$$

Ca regulă generală se poate spune că transformata Laplace a oricărui răspuns poate fi scrisă ca o combinaţie liniară a transformatelor Laplace a excitaţiilor. Coeficienţii acestor combinaţii liniare sînt ei înşişi combinaţii a unor funcţii de variabila complexă s. Aceste funcţii sînt rapoarte a doi determinanţi, numitorul fiind determinantul lui $\mathbf{Z}_m$, $\mathbf{Y}_n$ sau $\mathbf{Y}_t$, iar numărătorul fiind un cofactor al acestor matrice. De exemplu, în relaţia (5) determinantul de la numitor este det $\mathbf{Y}_n$, iar coeficientul lui I_{g2} este o diferenţă între două astfel de rapoarte de determinanţi.

Odată cunoscute funcţiile care leagă orice transformată (Laplace) a răspunsului unui circuit de orice transformată a excitaţiei (V sau I),

poate fi determinat răspunsul la orice excitație dată. Astfel, în relația (5), cunoașterea expresiilor din paranteze este suficientă pentru a se determina răspunsul $V_k(s)$ pentru orice valori date lui V_{g1}, I_{g2} și I_{g3}.

Vom defini în general ca *funcție de circuit* raportul dintre transformata Laplace a răspunsului și transformata Laplace a excitației unui circuit. Atît răspunsul cît și excitația pot fi curenți sau tensiuni. Dacă răspunsul și excitația se referă la aceleași terminale (în care caz unul trebuie să fie o tensiune, iar celălalt un curent), atunci funcția se numește o *funcție de intrare* fie de impedanță, fie de admitanță.

Dacă excitația și răspunsul se referă la terminale diferite, atunci funcția este o *funcție de transfer.*

Funcții de intrare

Pentru precizarea noțiunii să considerăm fig. 3.2, *a* în care este pusă în evidență numai o pereche de terminale la care pot fi făcute conexiuni externe. Vom presupune că:

1) circuitul nu conține surse independente;

2) este inițial relaxat — (valorile inițiale ale tensiunilor pe condensatoare și ale curenților prin bobine sînt nule).

Prin *„impedanță de intrare"* și *„admitanță de intrare"* la o pereche de terminale a unui circuit înțelegem:

$$Z(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)}, \quad \text{și} \quad Y(s) = \frac{I_1(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{Z(s)}, \tag{6}$$

unde V_1 și I_1 sînt transformatele Laplace ale tensiunii și curentului la terminale, cu sensurile de referință ca în fig. 3.2. În această definiție nu s-a făcut nici o precizare privind modul de excitare sau conectare la perechea de terminale a circuitului. Condițiile ca circuitul să nu conțină surse independente, iar inițial să fie un circuit relaxat, sînt esențiale pentru

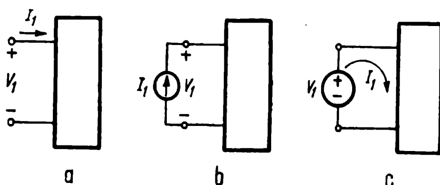


Fig. 3.2. Funcții de intrare.

definiţia impedanţei sau admitanţei de intrare. Este clar că, dacă circuitul conţine surse independente sau condiţii iniţiale nenule (iniţial, „nerelaxat"), atunci Z sau Y pot avea diferite valori în funcţie de ce este conectat la perechea de terminale şi deci impedanţa sau admitanţa de intrare, nu va mai fi o caracteristică invariantă proprie circuitului. O altă observaţie este că nu s-a făcut nici o precizare asupra naturii funcţiilor de timp $v_1(t)$ şi $i_1(t)$; definiţia lui Z sau Y cuprinde raportul transformatelor lor Laplace. Să ne întoarcem la calculul lui Z şi Y pentru un circuit presupus iniţial că nu conţine „dispozitive" *nepasive* sau *nereciproce*. Să scriem ecuaţiile la noduri pentru un circuit excitat de o sursă de curent ca în fig. 3.2, *b*. În aceste condiţii, soluţia pentru V_1 poate fi obţinută din (4) în care J_1 este nenul şi are valoarea I_1. Astfel, pentru impedanţă vom găsi:

$$Z(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} = \frac{\Delta_{11}(s)}{\Delta(s)}\Big|_v \tag{7}$$

unde Z este *impedanţa de intrare* la terminalele circuitului. În relaţia (7) notaţia $|_v$ este folosită pentru a indica că este determinantul ecuaţiilor la noduri.

O formulă duală pentru admitanţa de intrare Y poate fi obţinută imediat considerînd că circuitul este excitat de o sursă de tensiune ca în fig. 3.2, *c*; se scriu, deci, un set de ecuaţii pe contur.

Soluţia setului de ecuaţii pe contur va avea aceeaşi formă ca (3), cu deosebirea că sursele vor fi surse de tensiune echivalente E_k (a căror valori vor fi iniţial toate nule în afara unei singure surse ce va fi V_1), iar variabilele vor fi curenţii pe contur.

Rezolvînd sistemul în raport cu I_1, rezultă:

$$Y(s) = \frac{I_1(s)}{V_1(s)} = \frac{\Delta_{11}(s)}{\Delta(s)}\Big|_z \tag{8}$$

unde Y este *admitanţa de intrare* iar notaţia $_z$ evidenţiază că Δ este determinantul matricei impedanţelor de contur.

Relaţiile (7) şi (8) sînt utile pentru calculul lui Z şi Y dar trebuie reamintit că ele se aplică în cazul cînd nu există surse controlate sau alte astfel de dispozitive. Ele pot fi de asemenea aplicate în unele cazuri cînd sursele controlate sînt prezente, dar nu întotdeauna.

Ca o ilustrare a unui caz simplu, în care (7) şi (8) nu se aplică cînd este prezentă o sursă controlată, să considerăm etajul de amplificare cu grila la masă reprezentat în fig. 3.3, *a*. Modelul liniar este arătat în fig. 3.3, *b*, în care apare sursa de tensiune controlată.

Deoarece aceasta nu are o reprezentare sub forma fie a unei impedanţe fie a unei admitanţe, să exprimăm sursa de tensiune controlată V în funcţie de un curent printr-o latură; din fig. 3.3, *b* expresia corespunzătoare este $V = R_k I_5 - V_1$. Cu această expresie înlocuim sursa de tensiune controlată, latura care controlează chiar nefiind arătată în graful din fig. 3.3, *c*. Relaţia $V - I$ în latura ***controlată*** (latura *2* în graful din fig. 3.3, *c*) este $V_2 = \mu V = \mu R_k I_5 - \mu V_1$. Această relaţie dă laturii o reprezentare sub forma unei impedanţe. Arborele reprezentat cu linii groase în fig. 3.3, *c* a fost ales astfel ca sursa de excitare să apară într-un

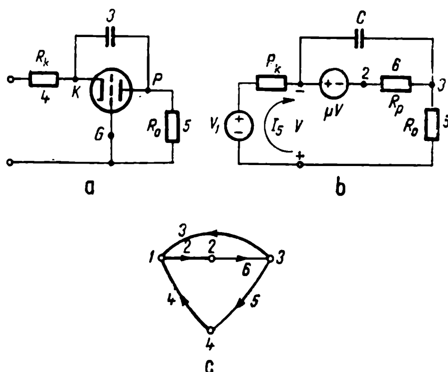


Fig. 3.3. Amplificator cu grila la masă.

singur contur (ochi). Matricea de contur **B**, matricea impedanţelor laturilor **Z**, matricea surselor de tensiune $\mathbf{V}_g$, pot fi scrise astfel:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu R_k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{sC} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_g = \begin{bmatrix} \mu V_1 \\ 0 \\ V_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuațiile de contur ($\mathbf{BZB'I}_m = \mathbf{BV}_g$) devin în acest caz:

$$\begin{bmatrix} R_k + R_0 + \dfrac{1}{sC} & -\dfrac{1}{sC} \\ -\dfrac{1}{sC} + \mu R_k & R_p + \dfrac{1}{sC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ \mu V_1 \end{bmatrix}.$$

Admitanța de intrare este I_5/V_1. Aceasta poate fi găsită rezolvînd ecuațiile pe contur pentru I_5. Rezultă:

$$Y = \frac{I_5}{V_1} = \frac{\Delta_{11} + \mu\Delta_{21}}{\Delta}.$$

Astfel, cu toată precauția de a alege numai un singur contur care să conțină sursa de excitație, sursa de tensiune V_1 apare în ambele ecuații pe contur, și ca urmare rezultatul final diferă de (8). Se poate trage concluzia că nu întotdeauna formule speciale ca (7) și (8) conduc la rezultatul corect și că în general trebuie apelat la definiția din relația(6).

Funcții de transfer

Prin definiție, o funcție de circuit este o *funcție de transfer* cînd excitația și răspunsul corespund la terminale diferite. Să considerăm răspunsul ca fiind tensiunea sau curentul unei anume laturi. Putem evidenția această latură reprezentînd-o separat de restul circuitului ca în fig. 3.4.

Pentru ca noțiunea de funcție de transfer să fie ușor de înțeles, vom presupune în continuare că circuitul nu conține surse interne independente și este inițial relaxat. Corespunzător figurii 3.4, *a* pot fi definite

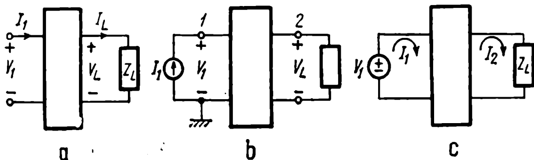


Fig. 3.4. Funcții de transfer.

patru funcţii de transfer diferite fie cu $V_L(s)$ sau $I_L(s)$ ca răspuns şi fie cu $V_1(s)$ sau $I_1(s)$ ca excitaţie. Din nou remarcăm că în aceste definiţii nu se face nici o precizare asupra modului în care este excitat circuitul. Deoarece aceasta nu aduce nici o diferenţă, să considerăm aplicată o sursă de curent ca în fig. 3.4, *b* şi să folosim ecuaţiile la noduri. Singurul lucru ce rămîne de discutat sînt sursele. Chiar dacă există numai o singură sursă, aceasta poate apare în mai mult decît o ecuaţie la nod dacă circuitul conţine surse controlate. Prin urmare, să presupunem pentru început că circuitul considerat nu conţine surse controlate. Atunci toţi J în (4) sînt zero, în afara lui J_1, care este egal cu I_1. Rezultatul analizei pe noduri va fi:

$$V_1(s) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}\bigg|_v I_1(s),$$

$$V_L(s) = V_2 - V_3 = \frac{\Delta_{12} - \Delta_{13}}{\Delta}\bigg|_v I_1(s).$$

Din aceste relaţii, ţinînd seama de faptul că $I_L = Y_L V_L$, poate fi obţinută fiecare funcţie de transfer V_L/V_1, V_L/I_1, I_L/V_1 sau I_L/I_1. În mod similar, presupunînd circuitul excitat cu o sursă de tensiune, ca în fig. 3.4, *c*, se pot scrie ecuaţiile pe contur. Expresiile care rezultă din ecuaţiile la noduri şi pe contur vor fi:

Impedanţa de transfer:

$$\frac{V_L(s)}{I_1(s)} = \frac{\Delta_{12} - \Delta_{13}}{\Delta}\bigg|_v = Z_L\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}\bigg|_z. \qquad (9a)$$

Admitanţa de transfer:

$$\frac{I_L(s)}{V_1(s)} = Y_L\frac{\Delta_{12} - \Delta_{13}}{\Delta_{11}}\bigg|_v = \frac{\Delta_{12}}{\Delta}\bigg|_z. \qquad (9b)$$

Cîştigul (*amplificarea*) *de tensiune* sau *raportul de transfer al tensiunilor*:

$$\frac{V_L(s)}{V_1(s)} = \frac{\Delta_{12} - \Delta_{13}}{\Delta_{11}}\bigg|_v = Z_L\frac{\Delta_{12}}{\Delta}\bigg|_z. \qquad (9c)$$

Cîştigul (*amplificarea*) *de curent* sau *raportul de transfer al curenţilor*:

$$\frac{I_L(s)}{I_1(s)} = Y_L\frac{\Delta_{12} - \Delta_{13}}{\Delta}\bigg|_v = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}\bigg|_z. \qquad (9d)$$

Trebuie subliniat că:

1. Aceste formule sînt valabile în absenţa surselor controlate şi a dispozitivelor nereciproce sau nepasive.

2. Impedanţele de transfer *nu* sînt reciprocele admitanţelor de transfer.

3. Sensurile de referinţă ale curenţilor şi tensiunilor trebuie să fie ca în fig. 3.4.

Cînd circuitul conţine surse controlate aceste formule particulare nu pot fi aplicate. Totuşi şi în acest caz, funcţiile de transfer vor fi combinaţii liniare a unor rapoarte similare de determinanţi şi cofactori.

3.2. CIRCUITE MULTITERMINALE

Pînă acum, în studiul circuitelor electrice, am presupus că structura internă a circuitului este cunoscută şi că se poate face o analiză în scopul determinării curenţilor şi tensiunilor oriunde în circuit. Totuşi, foarte adesea, nu interesează curenţii sau tensiunile în toate laturile, ci numai curenţii şi/sau tensiunile corespunzătoare terminalelor la care sînt făcute conexiuni exterioare circuitului.

De îndată ce este vorba de comportarea exterioară a circuitului, detaliile cu privire la structura internă a circuitului nu mai sînt importante, important fiind să cunoaştem relaţiile între tensiunile şi curenţii la terminalele exterioare, care determină complet comportarea exterioară a circuitului.

Să considerăm circuitul reprezentat în fig. 3.5, *a*, care are şase terminale la care sînt făcute conexiuni exterioare.

Cum vor fi definite variabilele curenţi şi tensiuni? Să definim tensiunile astfel încît tensiunea fiecărui terminal să fie raportată faţă de un punct arbitrar dat? Sau faţă de masă ca V_2? Să fie definite ca tensiuni între

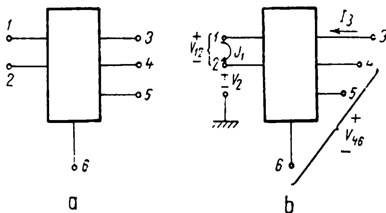


Fig. 3.5. Circuit (reţea) cu 6 terminale.

perechi de terminale, cum ar fi V_{12} sau V_{46}? Să fie definiţi curenţii în raport cu terminalele (cum ar fi I_3) sau pe contur, intrînd într-un terminal şi ieşind din altul (cum ar fi J_1)? De fapt, după cum vom observa, fiecare din aceste convenţii pot fi utile în diferite scopuri.

În multe aplicaţii conexiunile exterioare sînt făcute numai la *terminalele în perechi* ale circuitului. Fiecare pereche de terminale reprezintă o intrare sau o ieşire a circuitului şi este descriptiv — *o poartă*. Circuitul cu 6 terminale din fig. 3.5 este reprezentat ca în fig. 3.6, *a* ca un *triport* şi ca un *5-port* în fig. 3.6, *b*. De notat că nu vor fi făcute alte conexiuni

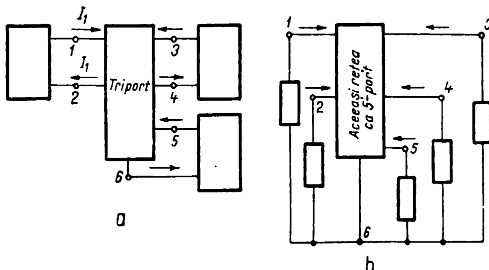


Fig. 3.6. Un circuit cu 6 terminale conectat ca:
a – triport; *b* – 5 – port

exterioare decît la porţile arătate; de exemplu, în fig. 3.6, *a* nu se va face nici o conexiune între terminalele *1* şi *3* sau *1* şi *5*. Conexiunile trebuie să fie făcute astfel ca acelaşi curent care intră printr-un terminal al porţii să iasă prin cel de-al doilea terminal.

Tensiunea porţii este tensiunea între perechile de terminale care constituie poarta.

Există o diferenţă de bază (în afara numărului de porţi) între cele două tipuri de multiporţi reprezentaţi în fig. 3.6.

În fig. 3.6, *b*, un terminal al fiecărei porţi este comun tuturor porţilor. Astfel tensiunile porţilor sînt identice cu tensiunile tuturor terminalelor în afară de unul faţă de care se măsoară aceste tensiuni. Un astfel de circuit este numit un *multiport cu bornă comună* (terminal comun), sau *cu bornă la masă*. În primul circuit din fig. 3.6 nu se poate identifica un astfel de terminal comun (bornă comună), sau la masă.

Este posibil să fie necesare şi alte feluri de conexiuni exterioare multiportului, în afară de cele de tipul conexiunilor la perechi de terminale. În acest caz, o descriere a circuitului în raport cu porţile sale nu este posibilă şi va fi necesară în acest caz o altă metodă pentru descrierea multiportului ce va fi discutată în paragraful 3.6.

3.3. CIRCUITE DIPORT (CUADRIPOLI)

Se poate începe prin a trata un circuit multiport general şi a discuta seturile de ecuaţii ce leagă variabilele de la porţi. După aceasta, rezultatele pot fi aplicate cazului special al diportului (cuadripolului).

O altă alternativă este de a trata mai întîi cel mai simplu multiport — diportul (cuadripolul), avîndu-se în vedere pe de o parte importanţa de

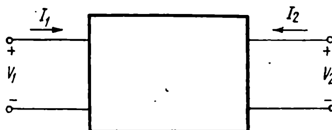


Fig. 3.7. Circuit diport (cuadripol).

sine stătătoare a acestui circuit, iar pe de altă parte faptul că tratarea mai întîi a celui mai simplu caz poate conduce la înţelegerea mai uşoară a cazului general al multiportului.

Vom alege al doilea mod de abordare a problemei.

Un circuit diport (sau pe scurt — un diport) este ilustrat în fig. 3.7.

Din cauza utilizării unui diport ca un circuit de transmisiune, una din porţi — numerotată uzual cu *1* — este denumită *intrare*; cealaltă — poarta *2* este denumită *ieşire*. Variabilele la porţi (în raport cu cele două porţi) sînt doi curenţi de poartă şi două tensiuni de poartă cu sensurile de referinţă standard (de referinţă) ca în fig. 3.7. (În unele lucrări sensul de referinţă pentru I_2 este luat opus celui ales în fig. 3.7). Pentru comparaţia oricărei formule din alte publicaţii va trebui să verificăm comparativ sensurile de referinţă adaptate pentru parametrii diportului.

Circuitele exterioare (diportului), care pot fi conectate la intrarea diportului sau la ieşirea sa, sînt denumite *terminaţii*. Vom folosi transformatele Laplace ale variabilelor şi vom presupune că diportul este iniţial relaxat şi că nu conţine surse independente.

Discuţia care urmează, legată de diferite feluri de a descrie comportarea unui diport, poate apare într-un anume fel nemotivată. Necesitatea unor metode diferite apare clar atunci cînd problema care se pune este proiectarea unor circuite ca filtre, circuite de adaptare, corectoare, etc. O metodă de descriere, care este convenabilă, de exemplu, pentru un circuit de putere, poate fi mai puţin utilă în cazul unui filtru, sau complet nepotrivită pentru un amplificator tranzistorizat. Din acest motiv, vom

descrie mai multe alternative echivalente pentru studiul comportării unui diport. În problema de sinteză a unui circuit, pentru o aplicaţie specifică se convine, deseori, să se despartă problema complicată în cîteva părţi. Fiecare parte a circuitului total este proiectată separat şi apoi reunite într-o manieră similară descompunerii originale. Pentru a folosi acest procedeu este necesar să ştim cum este legată descrierea comportării întregului circuit de comportarea părţilor componente. Din acest motiv, vom trata problema interconectării diporţilor.

Multe rezultate obţinute în acest paragraf necesită o sumă considerabilă de calcule algebrice elementare. Nu vom parcurge toate etapele procedeului lăsînd cititorul să completeze calculele intermediare omise.

Parametrii în gol şi în scurtcircuit

Pentru a descrie relaţiile între tensiunile şi curenţii la porţile unui multiport liniar sînt necesare atîtea ecuaţii liniare cîte porţi sînt. Astfel, pentru un diport sînt necesare două ecuaţii liniare ce leagă patru variabile. Care variabile vor fi considerate dependente şi care independente, este o problemă de convenţie şi de alegere într-o aplicaţie dată. În cazul general al n-portului vor fi $2n$ variabile curenţi şi tensiuni. Numărul de căi în care aceste $2n$ variabile pot fi aranjate în două grupe egale este $(2n)!/(n!)^2$. Pentru un cuadripol, acest număr este 6.

Exprimînd pentru un diport curenţii în funcţie de tensiuni, rezultă următorul set de ecuaţii:

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}; \tag{10}$$

Interpretarea acestor parametri rezultă simplu anulînd pe rînd fiecare tensiune. Astfel:

$$\begin{aligned} y_{11}(s) &= \left.\frac{I_1(s)}{V_1(s)}\right|_{V_2=0}, & y_{12}(s) &= \left.\frac{I_1(s)}{V_2(s)}\right|_{V_1=0}, \\ y_{21}(s) &= \left.\frac{I_2(s)}{V_1(s)}\right|_{V_2=0}, & y_{22}(s) &= \left.\frac{I_2(s)}{V_2(s)}\right|_{V_1=0}. \end{aligned} \tag{11}$$

Dimensional, fiecare parametru este o admitanţă. Anularea unei tensiuni la o poartă este echivalentă cu un scurtcircuit la acea poartă. Din acest motiv parametrii y sînt denumiţi — ***parametri admitanţă în scurtcircuit*** (sau pe scurt parametrii y). Matricea acestor parametri este notată cu Y_{sc} şi se numeşte ***matricea admitanţă în scurtcircuit***. Termenii y_{11} şi y_{22} sînt

admitanțele de intrare în scurtcircuit la cele două porți, iar y_{21} și y_{12} sînt admitanțe *de transfer* în scurtcircuit.

În particular, y_{21} este admitanța de transfer *în sens direct* — adică, raportul unui răspuns în curent la poarta *2* către o excitație în tensiune la poarta *1*, iar y_{12} este admitanța de transfer *în sens invers*.

Un al doilea set de relații pot fi scrise exprimînd tensiunile la porți în funcție de curenții la porți:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

De această dată, interpretarea parametrilor se obține anulînd pe rînd curenții. Astfel:

$$\begin{aligned} z_{11}(s) &= \left.\frac{V_1(s)}{I_1(s)}\right|_{I_2=0}, & z_{12}(s) &= \left.\frac{V_1(s)}{I_2(s)}\right|_{I_1=0}, \\ z_{21}(s) &= \left.\frac{V_2(s)}{I_1(s)}\right|_{I_2=0}, & z_{22}(s) &= \left.\frac{V_2(s)}{I_2(s)}\right|_{I_1=0}. \end{aligned} \tag{13}$$

Dimensional, fiecare parametru este o impedanță. Anularea curentului la o poartă este echivalentă cu lăsarea porții în gol. Din acest motiv parametrii z sînt denumiți *parametri impedanță în gol* (pe scurt parametri în gol). Matricea parametrilor se notează cu $\mathbf{Z}_{oc}$ și se numește *matricea impedanței în gol*. Elementele z_{11} și z_{22} sînt impedanțe de intrare în gol la cele două porți, iar z_{21} și z_{12} sînt impedanțe de transfer în gol; z_{21} este o impedanță de transfer *în sens direct*, iar z_{12} este o impedanță de transfer *în sens invers*.

Rezultă clar din (10) și (12) că matricele $\mathbf{Y}_{sc}$ și $\mathbf{Z}_{oc}$ sînt inverse una alteia, de exemplu:

$$\mathbf{Y}_{sc} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_{oc}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{Z}_{oc}} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

De aici rezultă că:

$$\det \mathbf{Y}_{sc} = \frac{1}{\det \mathbf{Z}_{oc}}. \tag{15}$$

Demonstrația acestei din urmă relații este lăsată cititorului ca exercițiu.

Rezultatele obținute pînă acum se aplică fie că circuitul este pasiv sau activ, reciproc sau nereciproc.

Să considerăm funcţiile de transfer y_{21} şi y_{12}. Dacă circuitul este reciproc, conform definiţiei din paragraful 3.1.4, cele două funcţii de transfer vor fi egale. De asemenea vor fi egale z_{12} şi z_{21}, adică pentru un circuit reciproc:

$$y_{12} = y_{21}, \quad z_{12} = z_{21}, \tag{16}$$

de unde rezultă şi că pentru un circuit reciproc $\mathbf{Y}_{sc}$ şi $\mathbf{Z}_{oc}$ sînt simetrice.

Parametrii hibrizi

Parametrii z şi y sînt două căi de exprimare a relaţiilor între variabilele porţilor. Aceştia exprimă două tensiuni în funcţie de doi curenţi sau reciproc. Alte două seturi de ecuaţii pot fi obţinute exprimînd un curent şi o tensiune de la porţi opuse în funcţie de cealaltă tensiune şi curent. Astfel:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

şi

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Interpretarea acestor parametri poate fi uşor determinată din ecuaţiile precedente, ca fiind următoarea:

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{V_1(s)}{I_1(s)}\bigg|_{V_2=0}, & h_{12} &= \frac{V_1(s)}{V_2(s)}\bigg|_{I_1=0}, \\ h_{21} &= \frac{I_2(s)}{I_1(s)}\bigg|_{V_2=0}, & h_{22} &= \frac{I_2(s)}{V_2(s)}\bigg|_{I_1=0}, \\ g_{11} &= \frac{I_1(s)}{V_1(s)}\bigg|_{I_2=0}, & g_{12} &= \frac{I_1(s)}{I_2(s)}\bigg|_{V_1=0}, \\ g_{21} &= \frac{V_2(s)}{V_1(s)}\bigg|_{I_2=0}, & g_{22} &= \frac{V_2(s)}{I_2(s)}\bigg|_{V_1=0}. \end{aligned} \tag{19}$$

Se observă că parametrii h şi g sînt interpretaţi în condiţii mixte de terminaţie, unii din ei în gol, iar alţii în scurtcircuit. Aceştia sînt denumiţi parametri hibrizi h şi respectiv parametri hibrizi g. Din aceste interpretări rezultă că h_{11} şi g_{22} sînt impedanţe, iar h_{22} şi g_{11} sînt admi-

tanţe. Aceşti parametri sînt legaţi de parametrii z şi y prin relaţiile:

$$h_{11} = \frac{1}{y_{11}}, \qquad g_{11} = \frac{1}{z_{11}},$$
$$h_{22} = \frac{1}{z_{22}}, \qquad g_{22} = \frac{1}{y_{22}}. \tag{20}$$

Parametrii de transfer g şi h sînt fără dimensiuni. Mărimea h_{21} este *amplificarea* (*cîştigul*) *de curent în scurtcircuit în sens direct*, g_{12} este *amplificarea de tensiune în gol în sens invers*, iar h_{12} este *amplificarea de tensiune în gol în sens invers*. Vom folosi literele **H** şi **G** pentru a nota matricele corespunzătoare parametrilor h şi g.

Prin calculul direct se determină următoarele relaţii între parametrii de transfer:

$$h_{12} = \frac{-z_{12}}{z_{21}} h_{21}, \tag{21a}$$

$$g_{12} = \frac{-y_{12}}{y_{21}} g_{21}. \tag{21b}$$

În cazul special, al circuitelor reciproce, aceste expresii se simplifică devenind $h_{12} = -h_{21}$ şi $g_{12} = -g_{21}$. Cu alte cuvinte, în cazul circuitelor reciproce, amplificarea de tensiune în gol pentru un sens de transmisie prin diport este egală cu negativa amplificării de curent în scurtcircuit pentru sensul opus de transmisie. Ca şi în cazul matricelor $\mathbf{Z}_{oc}$ şi $\mathbf{Y}_{sc}$ matricele **H** şi **G** sînt inverse una alteia. Astfel:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{H}^{-1}(s), \quad \det \mathbf{G} = \frac{1}{\det \mathbf{H}}. \tag{22}$$

Cititorului îi rămîne să verifice acest lucru.

Parametrii lanţ

Au rămas două sisteme de ecuaţii care leagă tensiunea şi curentul de la o poartă în funcţie de curentul şi tensiunea de la cealaltă poartă. Acestea au fost de fapt din punct de vedere istoric primele folosite în analiza liniilor de transmisiune. Unul din aceste sisteme este:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Tabelul 3.1.

	Parametrii impedanță în gol		Parametrii admitanță în scurtcircuit		Parametrii lanț		Parametrii hibrizi h		Parametrii hibrizi g	
z	z_{11}	z_{12}	$\frac{y_{22}}{\|y\|}$	$\frac{-y_{12}}{\|y\|}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{AD-BC}{C}$	$\frac{\|h\|}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$\frac{g_{12}}{g_{11}}$
	z_{21}	z_{22}	$\frac{-y_{21}}{\|y\|}$	$\frac{y_{11}}{\|y\|}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{D}{C}$	$\frac{-h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{\|g\|}{g_{11}}$
y	$\frac{z_{22}}{\|z\|}$	$\frac{-z_{12}}{\|z\|}$	y_{11}	y_{12}	$\frac{D}{B}$	$\frac{-(AD-BC)}{B}$	$\frac{1}{h_{11}}$	$\frac{-h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{\|g\|}{g_{22}}$	$\frac{g_{12}}{g_{22}}$
	$\frac{-z_{21}}{\|z\|}$	$\frac{z_{11}}{\|z\|}$	y_{21}	y_{22}	$\frac{-1}{B}$	$\frac{A}{B}$	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{\|h\|}{h_{11}}$	$\frac{-g_{21}}{g_{22}}$	$\frac{1}{g_{22}}$
$ABCD$	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$	$\frac{\|z\|}{z_{21}}$	$\frac{-y_{22}}{y_{21}}$	$\frac{-1}{y_{21}}$	A	B	$\frac{-\|h\|}{h_{21}}$	$\frac{-h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}}$	$\frac{g_{22}}{g_{21}}$
	$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{z_{22}}{z_{21}}$	$\frac{-\|y\|}{y_{21}}$	$\frac{-y_{11}}{y_{21}}$	C	D	$\frac{-h_{22}}{h_{21}}$	$\frac{-1}{h_{21}}$	$\frac{g_{11}}{g_{21}}$	$\frac{\|g\|}{g_{21}}$
h	$\frac{\|z\|}{z_{22}}$	$\frac{z_{12}}{z_{22}}$	$\frac{1}{y_{11}}$	$\frac{-y_{12}}{y_{11}}$	$\frac{B}{D}$	$\frac{AD-BC}{D}$	h_{11}	h_{12}	$\frac{g_{22}}{\|g\|}$	$\frac{-g_{12}}{\|g\|}$
	$\frac{-z_{21}}{z_{22}}$	$\frac{1}{z_{22}}$	$\frac{y_{21}}{y_{11}}$	$\frac{\|y\|}{y_{11}}$	$\frac{-1}{D}$	$\frac{C}{D}$	h_{21}	h_{22}	$\frac{-g_{21}}{\|g\|}$	$\frac{g_{11}}{\|g\|}$
g	$\frac{1}{z_{11}}$	$\frac{-z_{12}}{z_{11}}$	$\frac{\|y\|}{y_{22}}$	$\frac{y_{12}}{y_{22}}$	$\frac{C}{A}$	$\frac{-(AD-BC)}{A}$	$\frac{h_{22}}{\|h\|}$	$\frac{-h_{12}}{\|h\|}$	g_{11}	g_{12}
	$\frac{z_{21}}{z_{11}}$	$\frac{\|z\|}{z_{11}}$	$\frac{-y_{21}}{y_{22}}$	$\frac{1}{y_{22}}$	$\frac{1}{A}$	$\frac{B}{A}$	$\frac{-h_{21}}{\|h\|}$	$\frac{h_{11}}{\|h\|}$	g_{21}	g_{22}

Aceşti parametri sînt denumiţi *parametri lanţ,* sau parametri *ABCD*. Prima denumire provine de la faptul că aceşti parametri sînt utilizaţi în mod natural în analiza unei conexiuni *în cascadă, tandem* sau *lanţ* — conexiune tipică unui sistem de transmisiune. De notat semnul minus în faţa lui $-I_2$, care este consecinţa alegerii sensului de referinţă pentru I_2, şi că folosim notaţia clasică pentru aceşti parametri (A, B, C, D) în loc de a_{ij} ($i, j = 1, 2$) care ar uniformiza notaţia tuturor acestor parametri. De asemenea nu am introdus notaţii suplimentare corespunzătoare parametrilor inverşi ce se pot obţine simplu prin inversarea lui (23).

Determinantul matricei lanţ poate fi calculat în funcţie de parametrii z şi y. Se găseşte că:

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = AD - BC = \frac{z_{12}}{z_{21}} = \frac{y_{12}}{y_{21}}, \tag{24}$$

care este egal cu unitatea pentru un diport reciproc.

Discuţia precedentă destul de detaliată poate deveni obositoare dacă se pierde din vedere scopul dezvoltării unor metode de reprezentare a comportării exterioare a unui diport şi se prezintă diverse relaţii între tensiuni şi curenţi. Fiecare din aceste seturi de relaţii se găsesc utile în aplicaţii. Pentru referire ulterioară vom tabela relaţiile de legătură între diferite tipuri de parametri.

Rezultatul este dat în tabelul 3.1. De notat că aceste relaţii sînt valabile în cazul unui diport general nereciproc.

Zerourile de transmisie

Sînt importante observaţiile care pot fi făcute în legătură cu zerourile diferitelor funcţii de transfer. Acestea rezultă poate cel mai evident, privind una din coloanele tabelei 3.1, de exemplu coloana în care toţi parametrii sînt exprimaţi în funcţie de parametrii y. Rezultă că:

$$z_{21}(s) = \frac{-y_{21}(s)}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}, \tag{25a}$$

$$h_{21}(s) = \frac{y_{21}(s)}{y_{11}(s)}, \tag{25b}$$

$$g_{21}(s) = \frac{-y_{21}(s)}{y_{22}(s)}. \tag{25c}$$

Exceptînd unele posibile simplificări, toate aceste funcţii de transfer vor avea aceleaşi zerouri. Folosim termenul de *zero de transmisiune* pentru a ne referi la valoarea lui s pentru care există un zero al funcţiei de trans-

fer, fără a specifica despre care funcţie de transfer este vorba — dacă este amplificarea de tensiune, o admitanţă de transfer sau oricare alta.

Exemplu. Pentru a ilustra calculul parametrilor unui diport să considerăm circuitul reprezentat în fig. 3.8, care poate fi considerat, în anumite condiţii, ca un model al unei triode. Să calculăm parametrii y ai acestui circuit.

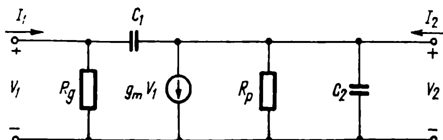
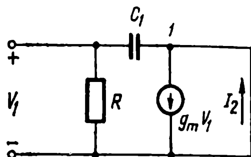


Fig. 3.8. Exemple pentru calculul parametrilor diportului.

Cel mai simplu procedeu este să folosim relaţiile de definiţie date în (11). Dacă se scurtcircuitează terminalele de ieşire, circuitul care rezultă va avea forma din fig. 3.9. Din punctul de vedere al intrării sursa controlată nu are nici un efect; astfel y_{11} este admitanţa combinaţiei paralel a lui R_g şi C_1:

$$y_{11}(s) = \frac{1}{R_g} + sC_1.$$

Fig. 3.9. Circuit cu terminalele de ieşire în scurtcircuit.



Pentru calculul lui y_{21} presupunem la intrare o sursă de tensiune $V_1(s)$. Aplicînd legea lui Kirchhoff nodului notat cu *1* (fig. 3.9), vom găsi că $I_2 = g_m V_1 - sC_1 V_1$. Astfel y_{21} devine:

$$y_{21} = \left.\frac{I_2(s)}{V_1(s)}\right|_{V_2=0} = g_m - sC_1.$$

Acum scurtcircuităm terminalele de intrare ale circuitului original (fig. 3.8). Circuitul rezultat va avea forma din fig. 3.10.

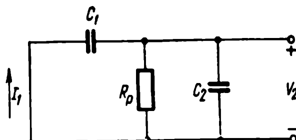


Fig. 3.10. Circuit cu terminalele de intrare în scurtcircuit.

Deoarece V_1 este zero, sursa dependentă de curent este de asemenea nulă. Astfel este simplu de calculat y_{22} şi y_{12}:

$$y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} = s(C_1 + C_2) + \frac{1}{R_p},$$

$$y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} = -sC_1.$$

Se vede că y_{12} diferă de y_{21}, ceea ce se poate întîmpla din cauza sursei de curent controlate.

Dacă parametrii y sînt cunoscuţi, oricare alt set de parametri poate fi calculat folosind relaţiile din tab. 3.1. De notat că chiar în condiţiile că C_1 şi C_2 sînt zero şi R_g infinit, parametrii y există dar parametrii z nu există (z_{11}, z_{22} şi z_{21} devin infiniţi).

3.4. INTERCONECTAREA CIRCUITELOR DIPORT

Un circuit diport dat cu un anumit grad de complexitate poate fi privit ca fiind construit din circuite diport mai simple ale căror porţi sînt interconectate în anume feluri. Invers, un circuit diport, care urmează să fie construit, poate fi proiectat prin combinarea unor blocuri constructive simple. Din punctul de vedere al proiectantului este mult mai simplu să proiectăm blocuri simple, pe care apoi să le interconectăm, în loc să proiectăm un circuit complex ca un tot unitar.

Un motiv în plus, de ordin practic, în favoarea acestui procedeu este acela că este mult mai uşor de ecranat unităţile mici şi de a reduce astfel capacităţile parazite faţă de masă.

Conectarea în cascadă

Interconectarea cuadripolilor poate fi făcută în mai multe feluri. Cel mai simplu mod de interconectare a doi cuadripoli este conectarea lor *în cascadă* sau *în tandem*. Doi cuadripoli se spune că sînt conectaţi *în cascadă* dacă poarta de ieşire a unuia este poartă de intrare a celui de-al doilea, ca în fig. 3.11.

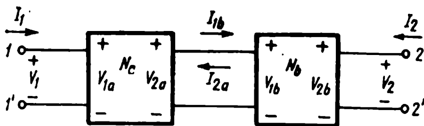


Fig. 3.11. Conectarea în cascadă a diporţilor.

În problema interconectării, din punctul de vedere al analizei, este interesant să studiem relaţiile între parametrii întregului circuit şi parametrii blocurilor constructive. Conectarea în tandem este studiată cel mai convenabil cu ajutorul parametrilor *ABCD*. Cu notaţiile şi sensurile de referinţă adoptate în fig. 3.11, rezultă că:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}.$$

Astfel, pentru sistemul de ecuaţii *ABCD* al circuitului N_b putem scrie:

$$\begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}.$$

În plus, dacă scriem sistemul de ecuaţii *ABCD* pentru circuitul N_a şi ţinem cont de relaţiile precedente, se obţine:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}.$$

Astfel, *matricea ABCD a unor cuadripoli în cascadă este egală cu produsul matricelor ABCD a cuadripolilor individuali, adică*:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Odată cunoscute relaţiile între parametrii cuadripolului total şi parametrii cuadripolilor constitutivi pentru oricare set de parametri, relaţiile pentru oricare alt set de parametri pot fi deduse prin calcul algebric; de exemplu parametrii în gol ai cuadripolului total pot fi găsiţi în funcţie de cei ai cuadripolilor în cascadă exprimînd parametrii z în raport cu parametrii *ABCD* pentru fiecare cuadripol în cascadă în parte. Rezultatul va fi:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11a} - \dfrac{z_{12a}\, z_{21a}}{z_{22a} + z_{11b}} & \dfrac{z_{12a}\, z_{12b}}{z_{22a} + z_{11b}} \\ \dfrac{z_{21a}\, z_{21b}}{z_{22a} + z_{11b}} & z_{22b} - \dfrac{z_{12b}\, z_{21b}}{z_{22a} + z_{11b}} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Detaliile acestui calcul sînt lăsate cititorului.

Sînt necesare cîteva observaţii. Cînd se doreşte să se determine un anume parametru specific unui cuadripol total în funcţie de parametrii corespunzători cuadripolilor interconectaţi, poate fi mai simplu de utilizat o analiză directă în locul folosirii relaţiilor din tabelul 3.1.

Ca exemplu, să presupunem că dorim să găsim expresia lui z_{21} pentru circuitul din fig. 3.11. Elementul z_{21} este raportul între tensiunea de ieşire în gol şi curentul de intrare; adică $z_{21} = V_2/I_1$. Să presupunem că se aplică circuitului la intrare un curent I_1 şi să înlocuim, folosind teorema de echivalenţă Thévenin, circuitul din stînga bornelor de ieşire a lui N_a. Rezultatul este dat în fig. 3.12.

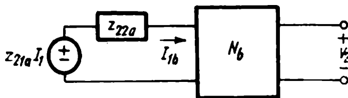


Fig. 3.12. Înlocuirea circuitului N_a prin echivalentul său Thévenin.

Prin definiţie $z_{21b} = V_2/I_{1b}$, cu terminalele de ieşire în gol. Acum poate fi uşor calculat I_{1b} din circuitul din fig. 3.12

$$I_{1b} = \frac{z_{21a} I_1}{z_{22a} + z_{11b}} .$$

Deci :

$$z_{21b} = \frac{V_2}{I_{1b}} = \frac{V_2}{\dfrac{z_{21a} I_1}{z_{22a} + z_{11b}}} = \left(\frac{z_{22a} + z_{11b}}{z_{21a}}\right)\frac{V_2}{I_1}.$$

În final :

$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{z_{21a} z_{21b}}{z_{22a} + z_{11b}} , \tag{28}$$

rezultat care corespunde celui cuprins în relaţia (27).

O proprietate importantă a cuadripolilor conectaţi în cascadă se observă din expresiile impedanţelor de transfer (27). Zerourile lui z_{21} sînt şi zerourile lui z_{21a} şi z_{21b} (O relaţie similară are loc şi pentru z_{12}). Astfel zerourile de transmisiune ale întregii cascade constau din zerourile de transmisie a fiecărei cuadripol component. Aceasta este baza teoretică a unor metode importante de sinteză a circuitelor. Acest fapt permite proiectarea indi-

vidualǎ a cuadripolilor care să asigure anumite zerouri de transmisiune înainte de conectarea lor în cascadă; de asemenea permite ajustarea şi reglajul individual al elementelor în cadrul fiecărui cuadripol, pentru a obţine un zero dorit, fără a influenţa ajustarea întregului cuadripol.

Conectarea paralel şi serie

Să ne întoarcem la alte interconectări ale cuadripolilor care, spre deosebire de conectarea în cascadă, implică ambele porţi. Două posibilităţi evidente sînt conectările serie şi paralel. *Doi cuadripoli se spune că sînt*

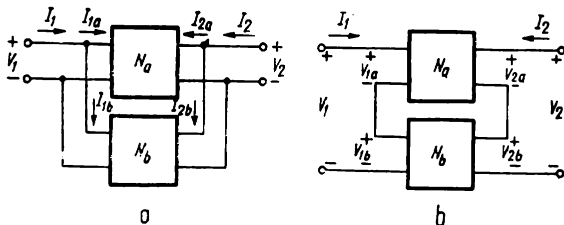


Fig. 3.13. Conectarea diporţilor în paralel şi serie.

conectaţi în paralel dacă porţile lor de intrare şi ieşire corespunzătoare sînt conectate în paralel ca în fig. 3.13, *a*. În conexiunea paralel tensiunile de la intrarea şi ieşirea cuadripolilor componenţi sînt obligate să fie aceleaşi în timp ce curenţii la porţile cuadripolului total sînt egali cu sumele curenţilor corespunzători la porţile cuadripolilor conectaţi în paralel. Aceasta presupune că relaţiile între porţile cuadripolilor individuali nu sînt alterate cînd aceştia sînt conectaţi în paralel.

În acest caz, pentru cuadripolul total se poate scrie:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{1b} \\ I_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11a} & y_{12a} \\ y_{21a} & y_{22a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{2a} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} y_{11b} & y_{12b} \\ y_{21b} & y_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1b} \\ V_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11a} + y_{11b} & y_{12a} + y_{12b} \\ y_{21a} + y_{21b} & y_{22a} + y_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Adică, *matricea admitanţelor în scurtcircuit a doi cuadripoli conectaţi în paralel este egală cu suma matricelor admitanţelor în scurtcircuit a cuadripolilor componenţi*

$$\mathbf{Y}_{sc} = \mathbf{Y}_{sca} + \mathbf{Y}_{scb}. \quad (30)$$

Dualul conexiunii paralel este conexiunea serie. *Doi cuadripoli sînt conectaţi în serie dacă porţile lor corespunzătoare de intrare şi ieşire sînt conectate în serie* ca în fig. 3.13, *b*.

În această conexiune curenţii de la intrare şi de la ieşire sînt forţaţi să fie aceiaşi, în timp ce tensiunile cuadripolului total sînt egale cu sumele tensiunilor de la porţile cuadripolilor individuali. Din nou se presupune că relaţiile între porţile cuadripolilor individuali nu sînt afectate cînd este făcută conectarea cuadripolilor. În acest caz relaţiile ce pot fi scrise pentru cuadripolul total sînt:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{2a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{1b} \\ V_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11a} & z_{12a} \\ z_{21a} & z_{22a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} z_{11b} & z_{12b} \\ z_{21b} & z_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1b} \\ I_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11a} + z_{11b} & z_{12a} + z_{12b} \\ z_{21a} + z_{21b} & z_{22a} + z_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Adică, *matricea impedanţelor în gol a doi cuadripoli conectaţi în serie este egală cu suma matricelor impedanţelor în gol a cuadripolilor componenţi* :

$$\mathbf{Z}_{oc} = \mathbf{Z}_{oca} + \mathbf{Z}_{ocb}. \tag{32}$$

Dintre aceste două tipuri de conexiuni — serie şi paralel — conexiunea paralel este mult mai utilă şi îşi găseşte o largă aplicare în sinteza circuitelor. Un motiv de ordin practic este acela că permite conectarea în paralel a doi cuadripoli cu bornă comună (cu bornă la masă), rezultatul fiind un cuadripol cu bornă comună. Un astfel de exemplu este *circuitul paralel în scară*, (al cărui caz special este circuitul dublu T sau *T-podit*) arătat în fig. 3.14.

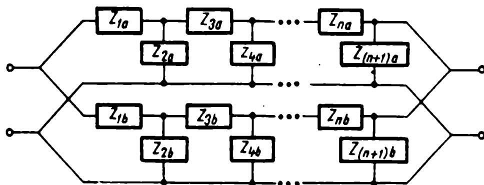


Fig. 3.14. Circuite în scară conectate în paralel.

Pe de altă parte conectarea în serie a doi cuadripoli conduce la un cuadripol cu bornă comună numai dacă unul din cuadripoli este un cuadripol în T. Să considerăm doi cuadripoli cu bornă la masă conectaţi în serie ca în fig. 3.15, *a*. Este clar că o astfel de conectare este inadmisibilă deoarece terminalul de masă a lui N_a va scurtcircuita pe N_b, vio-

lindu-se astfel condiţia ca cuadripolii individuali să fie neafectaţi de interconectare. Situaţia este remediată legînd împreună terminalele comune ale celor doi cuadripoli ca în fig. 3.15, *b*. În acest caz cuadripolul

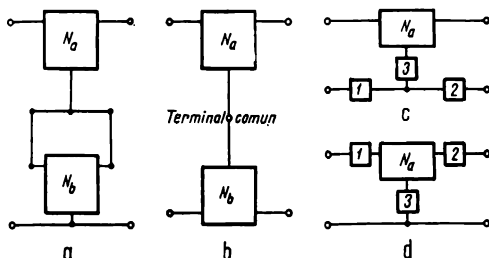


Fig. 3.15. Conectarea în serie a diporţilor cu bornă comună.

rezultat nu mai este un cuadripol cu bornă comună. Dacă unul din cuadripoli este în T, conectarea în serie ia forma din fig. 3.15, *c*. Acesta poate fi redesenat ca un cuadripol cu borna comună ca în fig. 3.15, *d*. Se lasă cititorului demonstraţia că ultimii doi cuadripoli au aceiaşi parametri *z*.

Sînt posibile unele variaţii ale conexiunii serie şi paralel conectînd porţile în serie la un capăt şi în paralel la celălalt capăt. Acestea sînt numite conexiuni *serie-paralel*, şi *paralel-serie*. Cum se poate presupune, in aceste cazuri, parametrii *h* şi *g* ai cuadripolilor individuali sînt aceia care adunaţi dau respectiv parametrii *h* şi *g* ai cuadripolului total. Demonstraţia este lăsată cititorului ca exerciţiu.

Restricţii la interconectarea cuadripolilor

Ne-a rămas să stabilim condiţiile în care doi cuadripoli pot fi interconectaţi fără a afecta prin conectare relaţiile între porţile cuadripolilor individuali. Pentru conexiunea paralel să considerăm fig. 3.16. Cîte o pereche

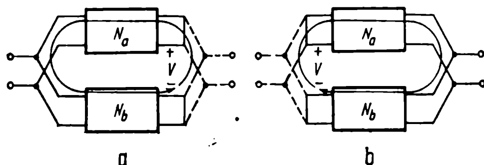


Fig. 3.16. Test pentru conectarea diporţilor în paralel.

de porţi a fiecărui cuadripol este conectată în paralel în timp ce celelalte porţi sînt scurtcircuitate individual. Sînt folosite scurtcircuitele deoarece parametrii care caracterizează cuadripolii individuali şi cuadripolul total sînt parametrii admitanţei în scurtcircuit. Dacă tensiunea V arătată în fig. 3.16 este nenulă, atunci cînd porţile secundare vor fi conectate va exista un curent de circulaţie cum este sugerat în figură. Astfel, condiţia potrivit căreia curentul ce iese din terminalul unei porţi să fie egal cu curentul ce intră în celălalt terminal al porţii este violată, şi prin urmare relaţiile între porţile cuadripolilor individuali vor fi afectate de interconectare.

Pentru cazul conexiunii serie, să considerăm fig. 3.17.

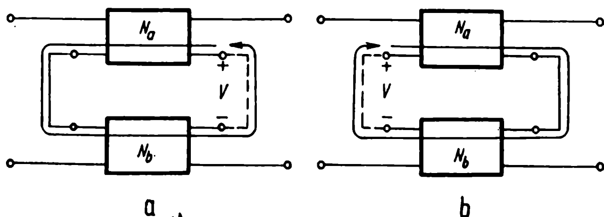


Fig. 3.17— Test pentru conectarea diporţilor în serie.

Cîte o pereche de porţi a fiecărui cuadripol este conectată în serie în timp ce celelalte porţi sînt lăsate în gol. Sînt folosite gol-circuitele (porţile lăsate în gol) deoarece parametrii care caracterizează cuadripolii individuali şi cuadripolul total sînt parametrii impedanţă în gol.

Dacă tensiunea V este nenulă, la conectarea în serie a porţilor secundare va exista un curent de circulaţie cum este sugerat în figură. Din nou relaţiile între porţile cuadripolilor individuali vor fi modificate prin conectarea cuadripolilor şi astfel adunarea parametrilor impedanţă nu va mai fi valabilă pentru întreg circuitul. Cu unele modificări evidente, aceste teste se aplică conexiunilor serie-paralel şi paralel-serie. Discuţia precedentă asupra condiţiilor în care pot fi obţinuţi parametrii totali ai cuadripolilor interconectaţi prin adunarea parametrilor cuadripolilor componenţi a fost mai curînd o schiţare a problemei. Se lasă cititorului sarcina de a suplini detaliile.

Cînd se descoperă că o anumită interconexiune nu poate fi făcută datorită introducerii curenţilor circulatori, există o cale de a opri aceşti curenţi şi de a permite astfel să fie făcută conexiunea. Procedeul este

simplu şi constă în punerea la una din porţi a unui transformator ideal izolator cu raportul de transformare 1 : 1, aşa cum este ilustrat în fig. 3.18, pentru cazul conexiunii paralel.

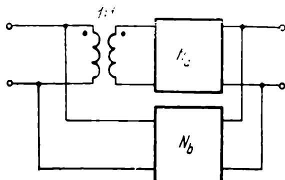


Fig. 3.18. Utilizarea unui transformator-izolator pentru a permite intercnoectarea.

3.5. CIRCUITE MULTIPORT

Paragraful precedent s-a ocupat în detaliu de circuitele diporţi (cuadripoli). Să ne întoarcem atenţia la circuitele avînd mai mult decît două porţi. Ideile discutate în ultimul paragraf se aplică de asemenea multiporţilor cu extensiile corespunzătoare.

Să considerăm circuitul n-port arătat în fig. 3.19.

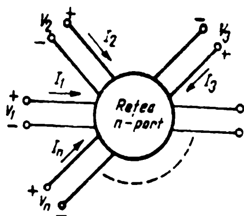


Fig. 3.19. Circuit-(reţea) multiport.

Comportarea exterioară a acestui circuit este complet descrisă dîndu-se relaţiile între tensiunile şi curenţii la porţi. Un set de astfel de relaţii exprimă toate tensiunile la porţi în funcţie de curenţii la porţi

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \tag{33a}$$

sau

$$\mathbf{V} = Z_{oc}\,\mathbf{I}. \tag{33b}$$

Prin observaţie directă se vede că parametrii pot fi interconectaţi ca :

$$z_{jk} = \frac{V_j}{I_k}\Bigg|_{\substack{\text{Toţi ceilalţi} \\ \text{curenţi}=0}} \tag{34}$$

care este pur şi simplu extinderea caracterizării unui cuadripol prin impedanţele în gol. Matricea $\mathbf{Z}_{oc}$ este asemănătoare celei din relaţia (12) cu deosebirea că este de ordinul n.

Matricea admitanţelor în scurtcircuit pentru un cuadripol poate fi extinsă direct pentru un n-port. Astfel :

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_{sc}\,\mathbf{V}, \quad \mathbf{Y}_{sc} = [y_{jk}] \tag{35a}$$

unde

$$y_{jk} = \frac{I_j}{V_k}\Bigg|_{\substack{\text{Toate celelalte} \\ \text{tensiuni}=0}} \tag{35b}$$

Dacă acum ne gîndim să extindem reprezentarea cu ajutorul parametrilor hibrizi ai cuadripolilor ne vom izbi de anumite probleme. În această reprezentare variabilele sînt mixte — curenţi şi tensiuni. Cum vor fi alese variabilele „independente" şi „dependente" pentru un circuit cu mai mult de două porţi? În cazul unui triport, de exemplu, pot fi făcute următoarele trei alegeri:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ V_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_2 \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \\ I_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_3 \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

Tot aşa de bine pot fi alese şi inversele acestor relaţii. În aceste aleger i fiecare vector conţine exact o variabilă din fiecare poartă. Este de asemenea posibilă o alegere ca :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_4 \begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

unde fiecare vector conţine şi curentul şi tensiunea unei anumite porţi. Primele categorii sînt analoage reprezentărilor cu ajutorul parametrilor hibrizi h şi g din cazul cuadripolilor. Ultimele au ceva din trăsăturile

reprezentării cu ajutorul matricei lanț. Este clar că nu este convenabil să urmăm această logică a reprezentărilor posibile pentru un caz general. Ca și în cazul cuadripolilor, este posibil să interconectăm circuitele multiport. Doi multiporți se zice că sînt conectați în paralel dacă porțile lor sînt conectate în paralel în perechi. Nu este necesar ca cei doi multiporți să aibă același număr de porți. Porțile sînt conectate în paralel pînă la terminarea lor și nu are importanță dacă s-au terminat în același timp pentru ambele circuite sau mai devreme pentru unul.

În mod similar, doi multiporți se zice că sînt conectați în serie dacă porțile lor sînt conectate în serie în perechi. Din nou, cei doi multiporți nu trebuie să aibă obligatoriu același număr de porți.

Ca și în cazul cuadripolului matricea y generală a doi n-porți conectați în paralel este egală cu suma matricilor y ale n-porților individuali. Similar, matricea z generală a doi n-porți conectați în serie este egală cu suma matricelor z ale n-porților individuali. Acestea, desigur, presupun de asemenea ca interconectarea nu alterează parametrii n-porților individuali.

3.6. MATRICEA DE ADMITANȚĂ NEDEFINITĂ

Descrierea unui circuit prin comportarea sa la porți este posibilă numai dacă conexiunile exterioare circuitului sînt făcute la terminale luate în perechi.

În general terminalele nu vor fi împerechiate pentru a forma porți. În acest caz va fi util să avem o descriere a comportării externe a circuitului luat mai de grabă ca un circuit multiterminal decît ca un circuit multiport. În acest paragraf vom introduce o astfel de descriere. Să ne întoarcem la fig. 3.6. Circuitul cu șase terminale arătat acolo este reprezentat ca un 5-port cu bornă comună, definind tensiunile a cinci dintre terminale în raport cu cel de-al șaselea terminal luat ca nod de referință. Pentru un astfel de multiport cu bornă comună să presupunem că alegem ca nod de referință un punct arbitrar exterior circuitului așa cum este arătat în fig. 3.20 pentru un circuit n-terminal.

Vom presupune că circuitul este conect, ceea ce presupune că nici un terminal nu este izolat de restul circuitului. Legea lui Kirchhoff privind curenții acestui n-terminal se scrie clar :

$$\sum_{k=1}^{n} I_k(s) = 0.$$

Deoarece circuitul este liniar, curenții pot fi exprimați ca o combinație liniară a tensiunilor terminalelor, astfel că:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}. \tag{36}$$

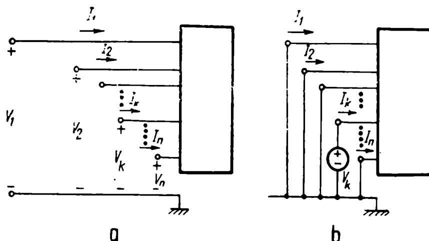


Fig. 3.20. Definiția variabilelor terminalelor.

Dimensional, elementele matricei coeficient a acestei ecuații sînt admitanțe; mai precis, admitanțe în scurtcircuit. În fig. 3.20, *b* toate terminalele sînt conectate la un nod de referință, iar între terminalul k și nodul de referință este conectată o sursă de tensiune. Acum poate fi determinat fiecare curent de terminal. Parametrii matricei vor fi:

$$y_{jk} = \frac{I_j}{V_k}\bigg|_{\substack{\text{Toate celelalte} \\ \text{terminale la masă}}} \tag{37}$$

Aceștia sînt asemănători parametrilor y pentru un diport. Să examinăm relațiile de mai jos. Matricea coeficient din relația 3.36 este denumită ***matricea de admitanță nedefinită*** și este notată cu $\mathbf{Y}_i$. În continuare vor fi date cîteva din proprietățile acestei matrice.

În primul rînd să presupunem că ecuațiile scalare, reprezentate de ecuația matriceală (36), sînt toate adunate. Potrivit legii curenților a lui Kirchhoff, suma curenților este zero, astfel:

$$(y_{11} + y_{21} + \dots + y_{n1})V_1 + (y_{12} + y_{22} + \dots + y_{n2})V_2 + \dots$$
$$+ (y_{1n} + y_{2n} + \dots + y_{nn})V_n = 0.$$

Expresiile din interiorul fiecărei paranteze sînt sumele elementelor coloanelor matricei $\mathbf{Y}_i$. Tensiunile terminalelor sînt toate independente. Să presupunem că toate terminalele, exceptînd terminalul k, sînt scurtcircuitate. În acest caz, relația de mai sus se reduce la:

$$(y_{1k} + y_{2k} + \ldots + y_{nk})V_k = 0. \tag{38}$$

Deoarece $V_k \neq 0$ rezultă că suma elementelor fiecărei linii a matricei de admitanță nedefinită este nulă. Deci liniile nu sînt toate independente și prin urmare $\mathbf{Y}_i$ este o matrice singulară.

Ceea ce este valabil pentru coloane este valabil și pentru rînduri. Să presupunem că toate terminalele, exceptînd terminalul k, sînt lăsate in gol și că terminalului k i se aplică o sursă de tensiune V_k. Presupunînd, in continuare că nici un terminal nu este izolat, tensiunile tuturor celorlalte terminale vor fi de asemenea egale cu V_k. Evident, toți curenții vor fi nuli, cu excepția lui I_k. Cu toate tensiunile egale, relația (3.36) poate fi scrisă pentru curentul I_j astfel:

$$I_j = (y_{j1} + y_{j2} + \ldots + y_{jn})V_k = 0.$$

Deoarece $V_k \neq 0$, suma elementelor fiecărui rînd a lui $\mathbf{Y}_i$ este egală cu zero.

Odată cunoscută matricea de admitanțe nedefinită, pentru un circuit cu $n + 1$ terminale, este simplu să-l transformi într-un n-port cu bornă comună. Fie al „$n + 1$"-lea — terminalul care va fi comun n-portului; tensiunea sa va fi zero. Astfel ultima coloană a lui $\mathbf{Y}_i$ în (3.36) poate fi omisă, deoarece elementele ei sînt coeficienții acestei tensiuni care este zero. De asemenea, curentul acestui terminal care este redundant, cum rezultă din legea curenților lui Kirchhoff și, deci, și ultimul rînd a lui $\mathbf{Y}_i$ poate fi omis. Deci, transformarea unui terminal al circuitului in bornă comună se obține prin omiterea liniei și coloanei corespunzătoare acelui terminal din matricea admitanțelor nedefinită.

Operația inversă permite formarea matricei $\mathbf{Y}_i$ din matricea admitanțelor în scurtcircuit a unui n-port cu borna comună; adică dîndu-se matricea admitanțelor în scurtcircuit a unui n-port cu bornă comună, se adaugă matricei un alt rînd, ale cărui elemente sînt sumele cu semn schimbat ale tuturor elementelor coloanei corespunzătoare. Apoi se adaugă o altă coloană, ale cărei elemente sînt sumele, cu semn schimbat, ale tuturor elementelor liniei corespunzătoare.

Să ilustrăm acest proces cu un diport cu bornă comună reprezentat in fig. 3.21, *a*. Tensiunile la porți, care în mod normal sînt notate cu V_1 și V_2, vor fi notate cu V_{ac} și V_{bc}, pentru a sublinia cele două terminale

ale fiecărei porţi. În fig. 3.21, *b* nodul-tensiune de referinţă este ales ca un punct diferit de terminalele cuadripolului. Să scriem mai întîi ecuaţiile pentru diport; apoi să înlocuim pe V_{ac} cu $V_1 - V_3$ şi V_{bc} cu $V_2 - V_3$:

$$I_1 = y_{11}V_{ac} + y_{12}V_{bc} = y_{11}(V_1 - V_3) + y_{12}(V_2 - V_3),$$

$$I_2 = y_{21}V_{ac} + y_{22}V_{bc} = y_{21}(V_1 - V_3) + y_{22}(V_2 - V_3).$$

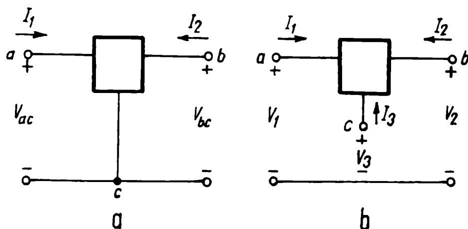


Fig. 3.21. Diportul cu bornă la masă reprezentat ca un circuit tri-terminal.

Din legea lui Kirchhoff privind curenţii rezultă că I_3 din fig. 3.21 *b* este egal cu $-(I_1 + I_2)$. Adăugînd această relaţie celor două relaţii precedente se obţine:

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 - (y_{11} + y_{12})V_3,$$

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 - (y_{21} + y_{22})V_3, \tag{39}$$

$$I_3 = -(y_{11} + y_{21})V_1 - (y_{12} + y_{22})V_2 + (y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22})V_3.$$

Matricea coeficient a acestei ecuaţii este $\mathbf{Y}_t$.

De notat că această matrice poate fi formată imediat din matricea originală $\mathbf{Y}_{sc}$, prin procedeul de adăugare a unei linii şi coloane folosind proprietatea anulării sumei elementelor liniilor şi coloanelor matricei $\mathbf{Y}_i$.

Procedeul discutat conţine şi o metodă ca, plecînd de la matricea $\mathbf{Y}_{sc}$ a unui multiport cu un terminal ca bornă comună, să se determine matricea $\mathbf{Y}_{sc}$ a unui multiport cu oricare alt terminal ca bornă comună. Aceasta este util, de exemplu, pentru obţinerea schemei echivalente a unui amplificator cu triodă cu grila la masă cunoscînd schema echivalentă cu catoda la masă sau reprezentarea unui amplificator cu baza comună din reprezentarea cu emitor comun. Pentru a ilustra procedeul

să considerăm diportul cu bornă comună reprezentat în fig. 3.22, *a*. Matricea admitanțelor în scurtcircuit a acestui diport este:

$$\mathbf{Y}_{sc1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & P \end{array} \\ \begin{bmatrix} G_g + sC & -sC \\ g_m - sC & G_p + sC \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ G \\ P \end{array}$$

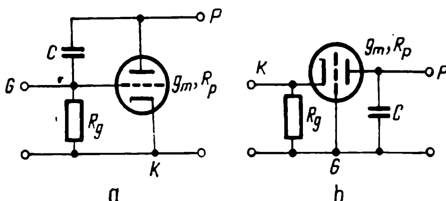


Fig. 3.22. Matricea admitanță nedefinită pentru un amplificator electronic.

(Literele au fost folosite pentru a identifica coloanele și rîndurile cu terminalele specifice). Din matricea admitanțelor în scurtcircuit se poate scrie imediat matricea de admitanță nedefinită:

$$\mathbf{Y}_i = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} G & P & K \end{array} \\ \begin{bmatrix} G_g + sC & -sC & -G_g \\ g_m - sC & G_p + sC & -(g_m + G_p) \\ -(g_m + G_g) & -G_p & g_m + G_g + G_p \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ G \\ P \\ K \end{array} \tag{40}$$

Pentru a găsi matricea admitanțelor în scurtcircuit a configurației cu grilă comună reprezentată în fig. 3.22, *b* este suficient să suprimăm linia și coloana corespunzătoare terminalului grilă, care în relația (40) corespunde primei linii și coloane. Desigur, trebuie să ne asigurăm că rîndurile și coloanele care rămîn corespund intrării și ieșirii — în cazul nostru catodei și anodului. Deci:

$$\mathbf{Y}_{sc2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} K & P \end{array} \\ \begin{bmatrix} g_m + G_g + G_p & -G_p \\ -(G_p + g_m) & G_p + sC \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ K \\ P \end{array}$$

Rezultă că o dată cunoscută matricea admitanță nedefinită a unui circuit multiterminal, diferitele manipulări ale acestuia pot fi descrise prin simple schimbări ale matricei $\mathbf{Y}_i$. Cîteva din acestea vor fi discutate în continuare.

Conectarea a două terminale

Să presupunem că două terminale ale unui n-port sînt conectate într-un singur terminal. Cei doi curenţi exteriori sînt înlocuiţi printr-unul singur egal cu suma primilor doi.

Cele două tensiuni sînt acum identice. Astfel matricea $\mathbf{Y}_i$ a circuitului cu $(n-1)$ terminale se obţine prin adunarea celor două rînduri şi coloane, corespunzătoare celor două terminale, din matricea $\mathbf{Y}_i$—originală. (Această sumă înlocuieşte cele două rînduri şi coloane originale). Generalizarea pentru mai mult de două terminale este evidentă.

Suprimarea terminalelor

Să presupunem că unul din terminale este făcut terminal intern, la care nu poate fi făcută nici o conexiune exterioară. Acest procedeu se numeşte *suprimarea* unui terminal. Curentul la acel terminal, fie el al n-lea, va fi zero. Ecuaţia pentru $I_n = 0$ poate fi rezolvată pentru V_n (presupunînd $y_{nn} \neq 0$) iar rezultatul substituit în celelalte ecuaţii. Aceasta va elimina pe V_n şi vor rămîne astfel $n-1$ ecuaţii pentru $n-1$ tensiuni. Procedeul poate fi extins în formă matriceală pentru mai mult decît un terminal după cum urmează:

Ştiind că $\mathbf{I} = \mathbf{Y}_i \mathbf{V}$, se pot despărţi matricele în forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ \mathbf{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_a \\ \mathbf{V}_b \end{bmatrix}$$

sau

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_a &= \mathbf{Y}_{11} \mathbf{V}_a + \mathbf{Y}_{12} \mathbf{V}_b, \\ \mathbf{I}_b &= \mathbf{Y}_{21} \mathbf{V}_a + \mathbf{Y}_{22} \mathbf{V}_b, \end{aligned} \tag{41}$$

unde $\mathbf{I}_b$ şi $\mathbf{V}_b$ corespund terminalelor care vor fi suprimate; adică vectorul $\mathbf{I}_b = 0$. Rezolvînd a doua ecuaţie (3.41) în raport cu $\mathbf{V}_b$ şi substituind în prima ecuaţie se obţine:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_b &= -\mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}_{21} \mathbf{V}_a, \\ \mathbf{I}_a &= (\mathbf{Y}_{11} - \mathbf{Y}_{12} \mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}_{21}) \mathbf{V}_a. \end{aligned} \tag{42}$$

Noua matrice de admitanţă nedefinită este

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{Y}_{11} - \mathbf{Y}_{12} \mathbf{Y}_{12}^{-1} \mathbf{Y}_{21}. \tag{43}$$

Circuite în paralel

Matricea de admitanță nedefinită a două circuite conectate în paralel este egală cu suma matricelor $\mathbf{Y}_i$ a celor două circuite. Prin „conectare în paralel" înțelegem că fiecare terminal al unui circuit este conectat la un terminal al celuilalt circuit și împreună au un nod de tensiune de referință. Nu este necesar ca cele două circuite să aibă același număr de terminale. În acest caz, matricea $\mathbf{Y}_i$ a circuitului cu mai puține terminale va fi completată cu rînduri și coloane nule.

În particular, un simplu dipol conectat la două terminale ale unui multiterminal poate fi considerat ca fiind în paralel cu acesta. De notat că matricea admitanță nedefinită a unei laturi avînd admitanța Y, este:

$$\mathbf{Y}_i \text{ a unei singure laturi} = \begin{bmatrix} Y & -Y \\ -Y & Y \end{bmatrix}.$$

Cofactorii determinantului matricei $\mathbf{Y}_i$

O proprietate foarte importantă a determinantului matricei admitanței nedefinită rezultă din faptul că suma elementelor fiecărei linii și coloane este zero. Să presupunem că det $\mathbf{Y}_i$ este dezvoltat după latura j. Rezultatul este:

$$\det \mathbf{Y}_i = y_{j1}\,\Delta_{j1} + y_{j2}\Delta_{j2} + \ldots + y_{jn}\,\Delta_{jn},$$

unde Δ_{jk} este cofactorul (j, k) al determinantului lui $\mathbf{Y}_i$. Deoarece suma elementelor liniei j este zero, putem înlocui un element cu suma cu semn schimbat a celorlalte elemente ale liniei. Astfel

$$y_{j1} = -\,(y_{j2} + y_{j3} + \ldots + y_{jn}).$$

Înlocuind aceasta în relația precedentă se obține

$$\det \mathbf{Y}_i = y_{j2}(\Delta_{j2} - \Delta_{j1}) + y_{j3}(\Delta_{j3} - \Delta_{j1}) + \ldots + y_{jn}\,(\Delta_{jn} - \Delta_{j1}) = 0.$$

Determinantul este egal cu zero deoarece $\mathbf{Y}_i$ este singulară. Mai mult, determinantul este zero indiferent de valorile elementelor y_{jk}. Astfel ultima ecuație va fi satisfăcută numai dacă fiecare termen din paranteză va fi zero, adică:

$$\Delta_{jk} = \Delta_{j1}. \tag{44}$$

Aceasta înseamnă că toţi cofactorii elementelor oricărei linii sînt egali.

Acelaşi procedeu, plecînd de la dezvoltarea determinantului lui $\mathbf{Y}_i$ după elementele unei coloane, va conduce la un rezultat similar, privind egalitatea cofactorilor elementelor oricărei coloane. Deoarece fiecare linie şi coloană are un element comun, cofactorul acestui element este egal cu toţi cofactorii acelei linii şi coloane.

Concluzia este că *toţi cofactorii matricei admitanţă nedefinită sînt egali*. Această proprietate a condus pentru $\mathbf{Y}_i$ la numele de *matricea echicofactor*.

Exemplu. Să ilustrăm printr-un exemplu cum poate fi folosită matricea de admitanţă nedefinită în diferite calcule pentru un circuit. Să considerăm circuitul din fig. 3.23, *a*. Se doreşte să se găsească matricea admitanţelor de scurtcircuit a cuadripolului reprezentat în configuraţia cu bornă comună. Vom face aceasta (1) folosind matricea admitanţă nedefinită a cuadripolului din fig. 3.23, *b*, (2) adăugindu-i o singură latură, (3) suprimînd terminalul 3 şi în final (4) transformînd nodul 4 în nod de referinţă.

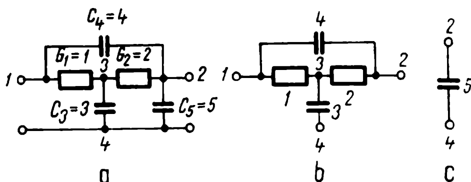


Fig. 3.23. Determinarea admitanţelor în scurtcircuit folosind matricea Y_i.

Pentru determinarea lui $\mathbf{Y}_i$ vom considera iniţial circuitul cu un triport cu bornă comună şi nodul 4 ca nod de referinţă ca în fig. 3.23*b*. Parametrii *y* ai acestui tripol pot fi găsiţi din definiţia lor, de exemplu aplicînd o tensiune porţii din stînga, şi scurtcircuitînd celelalte două porţi ca în fig. 3.24.

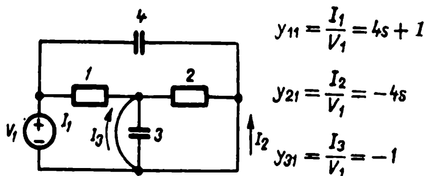


Fig. 3.24. Calculul lui Y_{sc} pentru un triport.

Din această figură pot fi determinați cu ușurință trei din parametrii y. Ceilalți parametrii y sînt găsiți într-un mod similar, iar rezultatul va fi:

$$\mathbf{Y}_{sc} = \begin{bmatrix} 4s+1 & -4s & -1 \\ -4s & 4s+2 & -2 \\ -1 & -2 & 3s+3 \end{bmatrix}$$

Matricea de admitanță nedefinită se găsește simplu adăugînd un rînd și o coloană ale căror elemente sînt determinate cu ajutorul proprietății de anulare a sumei elementelor unui rînd și a unei coloane pentru o matrice $\mathbf{Y}_i$. Rîndul și coloana adăugate corespund laturii *5*. Deoarece aceasta este conectată între terminalele *2* și *4*, vor apare elemente nenule în aceste două rînduri și coloane. Matricea $\mathbf{Y}_i$ va fi:

$$\mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} 4s+1 & -4s & -1 & 0 \\ -4s & 4s+2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 3s+3 & -3s \\ 0 & 0 & -3s & 3s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5s & 0 & -5s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5s & 0 & 5s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4s+1 & -4s & -1 & 0 \\ -4s & 9s+2 & -2 & -5s \\ -1 & -2 & 3s+3 & -3s \\ 0 & -5s & -3s & 8s \end{bmatrix}.$$

Următoarea etapă este suprimarea terminalului *3*.

Pentru aceasta vom schimba între ele rîndurile și coloanele 3 și 4 cu scopul de a trece pe ultima poziție rîndul și coloana 3. Apoi pentru a identifica matricele, ca în relația (41) vom separa pe $\mathbf{Y}_i$ astfel:

$$\mathbf{Y}_i = \left[\begin{array}{ccc:c} 4s+1 & -4s & 0 & -1 \\ -4s & 9s+2 & -5s & -2 \\ 0 & -5s & 8s & -3s \\ \hdashline -1 & -2 & -3s & 3s+3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} \end{bmatrix}.$$

Deci,

$$\mathbf{Y}_{12}\mathbf{Y}_{22}^{-1}\mathbf{Y}_{21} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3s \end{bmatrix} \left[\frac{1}{3s+3}\right] [-1\ -2\ -3s] = \frac{1}{3s+3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3s \\ 2 & 4 & 6s \\ 3s & 6s & 9s^2 \end{bmatrix}.$$

Noua matrice admitanță nedefinită, corespunzătoare circuitului cu nodul *3* suprimat, va fi:

$$\mathbf{Y}_{i\,nou} = \begin{bmatrix} 4s+1 & -4s & 0 \\ -4s & 9s+2 & -5s \\ 0 & -5s & 8s \end{bmatrix} - \frac{1}{3s+3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3s \\ 2 & 4 & 6s \\ 3s & 6s & 9s^2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4s+1-\dfrac{1}{3s+3} & -\left(4s+\dfrac{2}{3s+3}\right) & \dfrac{-3s}{3s+3} \\ -\left(4s+\dfrac{2}{3s+3}\right) & 9s+2-\dfrac{4}{3s+3} & -\left(5s+\dfrac{6s}{3s+3}\right) \\ \dfrac{-3s}{3s+3} & -\left(5s+\dfrac{6s}{3s+3}\right) & 8s-\dfrac{9s^2}{3s+3} \end{bmatrix}$$

În final, terminalul 4 este transformat în bornă comună omițîndu-se ultimul rînd și ultima coloană a matricei Y_i. Matricea y dorită este:

$$Y_{sc} = \begin{bmatrix} 4s + 1 - \dfrac{1}{3s + 3} & -\left(4s + \dfrac{2}{3s + 3}\right) \\ -\left(4s + \dfrac{2}{3s + 3}\right) & 9s + 2 - \dfrac{4}{3s + 3} \end{bmatrix}.$$

S-ar putea spune că o metodă obișnuită ar necesita mai puțină muncă. Este adevărat că au necesitat mai multe etape aici, dar fiecare etapă este aproape banală, multe din ele scriindu-se prin simplă observație. De asemenea, ultimul rînd și, ultima coloană a noii matrice Y_i nu trebuie calculate, aici fiind date numai pentru completarea calculului.

3.7. MATRICEA IMPEDANȚĂ NEDEFINITĂ

După cele învățate despre matricea admitanță nedefinită o curiozitate naturală ne conduce să ne gîndim la o matrice duală, care poate fi numită *matricea impedanță nedefinită.*

Să ne întoarcem la fig. 3.20, în termenii căreia a fost dezvoltată noțiunea de matrice admitanță nedefinită Y_i. Condiția importantă, care ne-a condus la proprietatea anulării sumei elementelor rîndurilor și coloanelor, este faptul că, potrivit legii curenților lui Kirchhoff, suma tuturor curenților de terminal este nulă. Evident, pentru situația duală, va trebui să găsim că, potrivit legii tensiunilor lui Kirchhoff suma unui set de tensiuni este nulă. Tensiunile terminalelor nu pot forma acest set, deoarece legea tensiunilor lui Kirchhoff nu poate fi aplicată decît unui circuit închis, iar tensiunile terminalelor nu pot fi înconjurate de o curbă închisă.

Și totuși, dacă alegem ca variabile — tensiunile între perechile de terminale adiacente (ca în fig. 3.25, *a*) — vedem că ele satisfac legea tensiunilor a lui Kirchhoff. Vor fi tot atîtea variabile — tensiuni cîte terminale sînt.

Pentru circuitele liniare, la care ne referim, aceste variabile — tensiuni pot fi exprimate ca fiind combinații liniare ale curenților de terminale. Însă este mult mai convenabil să definim un alt set de curenți ca în fig. 3.25, *b*, în locul setului de curenți de terminale. Curenții J_k sînt curenții ciclici (de contur) externi între perechile de terminale. Există o relație liniară, simplă, între curenții de contur externi și curenții de terminale: $I_k = J_k - J_{k+1}$.

Astfel, poate fi scrisă o relaţie liniară, care să exprime tensiunile în funcţie de aceşti curenţi de contur, tot aşa de simplu ca şi o relaţie între aceste tensiuni şi curenţii de terminale.

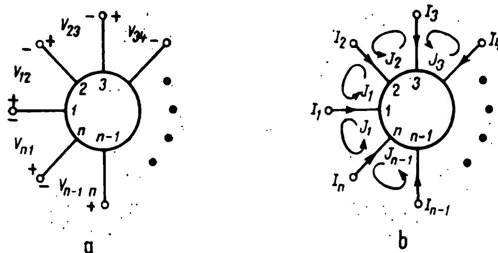


Fig. 3.25. Variabilele matricei impedanţe nedefinită.

Această relaţie va fi:

$$\begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{23} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ J_n \end{bmatrix} \text{ sau } \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{23} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{n1} \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_i \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ J_n \end{bmatrix} \tag{45}$$

Matricea acestor ecuaţii este notată cu $\mathbf{Z}_i$ şi se numeşte *matricea impedanţă nedefinită*. Ca şi în cazul matricii $\mathbf{Y}_i$, este posibil să arătăm că *suma elementelor fiecărui rînd sau a fiecărei coloane a lui $\mathbf{Z}_i$ este egală cu zero.*

În cazul coloanelor aceasta se face adunînd ecuaţiile şi folosind legea tensiunilor lui Kirchhoff. Pentru rînduri, proprietatea se demonstrează anulînd toate tensiunile în afara uneia şi aplicînd o sursă de curent între terminalele asociate tensiunii neanulate. Cele de mai sus presupun scurtcircuitarea împreună a tuturor terminalelor — ceea ce determină: (1) ca ultima tensiune să fie de asemenea nulă (prin aplicarea legii tensiunilor a lui Kirchhoff) şi (2) toţi curenţii de contur externi să fie egali.

Detaliile acestor calcule sînt lăsate cititorului.

Astfel, ca şi în cazul lui $\mathbf{Y}_i$, matricea impedanţă nedefinită este o matrice singulară.

Să ne reamintim că, pentru $(n - 1)$-port cu bornă comună derivat dintr-un n-port prin scurtcircuitarea unui terminal la nodul de referinţă

ca în fig. 3.20, matricea admitanţă nedefinită este legată printr-o relaţie simplă de matricea admitanţelor de scurtcircuit.

Situaţia corespunzătoare este:

Pentru un $(n-1)$-port, derivat dintr-un n-port, la care s-a lăsat în gol o pereche de terminale ca în fig. 3.25, matricea impedanţă nedefinită se află într-o relaţie simplă cu matricea impedanţelor în gol $\mathbf{Z}_{oc}$. (Matricea impedanţelor în gol pentru acest $(n-1)$-port va fi numită matricea impedanţelor în gol a unui circuit *cu contur comun*). De fapt $\mathbf{Z}_i$ se obţine, întîi, prin adăugarea unui rînd matricii $\mathbf{Z}_{oc}$ — fiecare element al acestui rînd fiind suma cu semn schimbat a tuturor elementelor rîndului, apoi prin adăugarea unei coloane matricii rezultate, fiecare element al acestei coloane fiind suma cu semn schimbat a tuturor elementelor coloanei respective.

În cazul matricii $\mathbf{Y}_i$ proprietatea anulării ***sumei elementelor rîndurilor şi coloanelor conduce la proprietatea egalităţii cofactorilor.***

Similar, ***cofactorii matricii impedanţă nedefinită sînt toţi egali.***

Deoarece, deseori, multipolii sînt cu bornă comună, să examinăm relaţia între matricea impedanţelor în gol a unui circuit cu bornă comună şi matricea impedanţă în gol a unui circuit cu contur (ochi) comun. În fig. 3.25 se presupune că terminalul n este borna comună, iar variabilele tensiune pentru descrierea porţilor vor fi tensiunile terminale raportate la nodul de referinţă n. Astfel $V_n = 0$. Deoarece, conform legii curenţilor lui Kirchhoff, suma curenţilor de terminal este zero, unul din curenţi este redundant. Dat fiind că fiecare curent de terminal este diferenţa între doi curenţi de contur externi, curenţii de terminal nu se vor schimba dacă toţi curenţii externi vor fi micşoraţi sau măriţi cu aceeaşi cantitate. Să presupunem că J_n este ales să fie zero. Aceasta este echivalent cu scăderea lui J_n din fiecare curent extern — curenţii de terminal rămînînd neschimbaţi. Din fig. 3.25 putem scrie următoarele:

$$\begin{aligned}
I_1 &= J_1. & \qquad\qquad J_1 &= I_1.\\
I_2 &= J_2 - J_1 = J_2 - I_1, & J_2 &= I_1 + I_2.\\
I_3 &= J_3 - J_2 = J_3 - I_1 - I_2. & J_3 &= I_1 + I_2 + I_3.\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sau} & &\vdots\\
I_{n-1} &= J_{n-1} - J_{n-2} & &\\
&= J_{n-1} - (I_1 + I_2 + \cdots + I_{n-2}) & J_{n-1} &= I_1 + I_2 + \cdots + I_{n-1}.
\end{aligned}$$

Ecuaţiile pentru curenţii J pot fi scrise şi astfel:

$$\mathbf{J} = \mathbf{MI}. \tag{46}$$

unde **M** este o matrice triunghiulară de ordin $(n-1)$.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 1 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 1 & 1 & 1 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 1 & 1 & 1 \cdots 1 \end{bmatrix} \tag{47}$$

Un raţionament analog se aplică tensiunilor. Tensiunea de poartă V_k este tensiunea terminalului k în raport cu cea a terminalului n. Aceste tensiuni de porţi sînt exprimabile ca:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{M}' \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{23} \\ \vdots \\ V_{n-1,\,n} \end{bmatrix}. \tag{48}$$

Detaliile acestui calcul sînt lăsate cititorului. Deoarece $J_n = 0$, ultima coloană din $\mathbf{Z}_i$ în (45), poate fi omisă. Similar, ultimul rînd poate fi omis, deoarece V_{n1} nu apare în (48). În acest fel obţinem matricea impedanţelor în gol a unui circuit cu contur comun, notată cu $\mathbf{Z}_{oc(l)}$. Astfel, folosind (48), (46) şi (45) cu ultima linie şi coloană omise se obţine:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{n1} \end{bmatrix} = \mathbf{M}' \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{23} \\ \vdots \\ V_{n-1,\,n} \end{bmatrix} = \mathbf{M}'\mathbf{Z}_{oc(l)} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{M}'\mathbf{Z}_{oc(l)}\mathbf{M} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{49}$$

(Să ţinem minte că $\mathbf{Z}_{oc(l)}$ aici este $\mathbf{Z}_i$ a lui (45) cu ultimul rînd şi ultima coloană omise).

Ecuaţia (49) leagă tensiunile de poartă de curenţii de poartă. Prin urmare matricea impedanţelor în gol a unui circuit cu bornă comună $\mathbf{Z}_{oc}$ va fi:

$$\mathbf{Z}_{oc} = \mathbf{M}'\mathbf{Z}_{oc(l)}\mathbf{M}, \tag{50a}$$

şi

$$\mathbf{Z}_{oc(l)} = (\mathbf{M}')^{-1}\mathbf{Z}_{oc}\mathbf{M}^{-1}. \tag{50b}$$

Ultima relație rezultă din faptul că matricea triunghiulară cu termenii diagonali nenuli este nesingulară. Legătura, în acest caz, pare a fi mult mai complicată decît în cazul corespunzător legăturii între $\mathbf{Y}_{sc}$ și $\mathbf{Y}_t$. Cunoașterea lui $\mathbf{Z}_t$ (50*a*) permite determinarea lui $\mathbf{Z}_{oc}$ și $\mathbf{Z}_{oc(l)}$. Invers, dîndu-se, pentru un (n — 1)-port cu bornă comună $\mathbf{Z}_{oc}$, cu ajutorul relației (50*b*) se determină $\mathbf{Z}_{oc(l)}$. Din $\mathbf{Z}_{oc(l)}$ se obține $\mathbf{Z}_i$ prin adăugarea unei linii și a unei coloane, folosind proprietatea anulării sumei elementelor liniilor și coloanelor acestei matrice.

3.8. FORMULE TOPOLOGICE PENTRU FUNCȚIILE DE CIRCUIT

Să recapitulăm pe scurt ce s-a făcut în acest capitol.

În primul paragraf am definit funcțiile de circuit ca relații între transformatele Laplace ale răspunsului și excitației circuitului. Acestea pot fi funcții de intrare sau funcții de transfer; dar, în cazul circuitelor liniare și cu constante concentrate, ele vor fi toate funcții raționale de variabilă frecvență complexă s. Expresiile pentru oricare din aceste funcții pot fi găsite rezolvînd ecuațiile la noduri sau pe contur. În toate cazurile funcțiile de circuit pot fi exprimate ca un raport între determinantul matricii admitanțelor la noduri și cofactorii ei sau a matricii impedanțelor pe contur și cofactorii ei. Paragrafele următoare ale acestui capitol au fost dedicate unor discuții asupra diferitelor moduri de descriere a comportării externe a unui circuit. Descrierile de pînă acum conduceau la definirea unor funcții de circuit în diferite condiții impuse terminalelor (impedanțe în gol, admitanțe în scurtcircuit, etc.). Oricare din aceste funcții pot fi evaluate așa cum s-a arătat în primul paragraf. Calculul lor se reduce la calculul unor determinanți și a cofactorilor săi.

Să ne întoarcem acum la găsirea unor procedee simple de evaluare a acestor determinanți. Metodele uzuale de evaluare a acestor determinanți (de exemplu, dezvoltarea după minori sau condensarea pivotală) necesită multiplicarea multor elemente și adunarea acestor produse. În acest proces mulți termeni pot eventual să dispară, dar asta numai după un calcul lung și laborios. Ar fi de un real folos să știm de la început care termeni vor dispare în final. Metoda pe care o vom discuta corespunde acestui scop.

Determinantul matricei admitanțelor la noduri

Vom începe considerînd ecuațiile la noduri $\mathbf{Y}_n(s)\mathbf{V}_n(s) = \mathbf{J}(s)$ unde:

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{AYA}', \tag{51}$$

în care **A** este matricea de incidenţă şi **Y** este matricea admitanţelor pe laturi. În acest paragraf vom restrînge discuţia la cazul circuitelor pasive, reciproce, fără cuplaje mutuale, adică la cazul circuitelor *RLC* fără transformatoare. Ne interesează să evaluăm det (**AYA**'). Pentru aceasta aplicăm teorema Binet-Cauchy, care conduce la relaţia:

$$\det \mathbf{AYA}' = \sum_{\substack{\text{toţi det.}\\ \text{majori}}} \text{produsele det. majori corespunzători lui } (\mathbf{AY}) \text{ şi } \mathbf{A}' \quad (52)$$

Am considerat produsul **AY** ca una din cele două matrici la care se referă teorema.

Vom reaminti cîteva din proprietăţile lui **A** şi **Y**. Matricea admitanţă **Y** a braţelor unui circuit *RLC* fără transformatoare este o matrice diagonală, unde y_j pentru $j = 1, 2, \ldots, b$. vor fi elementele diagonale. Să ne reamintim de asemenea că submatricile nesingulare ale lui **A** corespund arborilor grafului circuitului, iar determinanţii acestor matrici sînt egali cu ± 1.

Matricea **AY** are aceeaşi structură ca şi **A** cu excepţia coloanei j care va fi multiplicată cu y_j. Deci, şi submatricile nesingulare ale produsului **AY** vor corespunde arborilor grafului circuitului, dar în acest caz, valoarea determinanţilor majori nu vor mai fi ± 1 ci va fi egală cu produsul admitanţelor laturilor arborelui corespunzător. Aşa cum s-a discutat în capitolul anterior, submatricea **A**' este pur şi simplu transpusa submatricei **A**. Deci o matrice nesingulară a lui **A**' va avea acelaşi determinant (± 1) ca şi submatricea corespunzătoare a lui **A**. În consecinţă fiecare termen din însumarea (52) va fi produsul admitanţelor tuturor ramurilor arborelui, pe care îl vom numi *produsul admitanţelor arborelui* şi-l vom nota cu $T(y)$.

Deci:

$$\Delta|_y = \det \mathbf{AYA}' = \sum_{\substack{\text{toţi}\\ \text{arborii}}} T(y)$$

$$= \sum_{\substack{\text{toţi}\\ \text{arborii}}} \text{produsele admitanţelor arborelui} \quad (53)$$

Acest rezultat foarte interesant a fost pentru prima dată demonstrat de către Maxwell.

Deci, pentru a calcula determinantul matricei admitanţelor la noduri a unui circuit vom determina mai întîi toţi arborii grafului circuitului, apoi vom multiplica admitanţele braţelor fiecărui arbore, iar în final vom aduna aceste produse pentru toţi arborii. (Pentru simplitate vom spune adesea „produsele arborilor" în loc de „produse ale admitanţelor arborilor").

Pentru a ilustra acest rezultat să considerăm exemplul arătat în fig. 3.26.

Vom presupune că circuitul va fi excitat de o sursă de curent la bornele rezistenţei R_6. Sînt patru noduri în circuit, astfel că fiecare arbore va avea trei ramuri. Arborii circuitului vor fi:

124	134	145	234	245	346	456
125	135	156	235	246	356	
126	136		236			

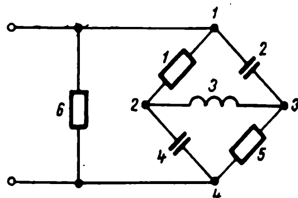


Fig. 3.26. Exemplu pentru evaluarea lui det AYA'.

De notat că, în acest exemplu, determinarea tuturor arborilor nu constituie o dificultate. Deoarece, pentru un circuit cu $n + 1$ noduri, fiecare arbore conţine n ramuri, un procedeu de a determina toţi arborii circuitului constă în a lista toate combinaţiile de b laturi luate cîte n. Dintre acestea se vor elimina acele combinaţii care conţin cel puţin un ochi şi care nu pot forma un arbore.

Întorcîndu-ne la exemplu, odată arborii circuitului aflaţi, se determină produsele admitanţelor arborilor. De fapt acest lucru poate fi făcut astfel ca termenii cu aceleaşi puteri ale lui s să fie scrişi împreună. Rezultatul va fi:

$$\det \mathbf{AYA}' = s^2 C_2 C_4 (G_1 + G_5 + G_6) + s \left[C_2 G_1 (G_5 + G_6) + C_4 G_5 (G_1 + G_6) + \right.$$

$$\left. + \frac{C_2 C_4}{L_3} \right] + G_1 G_5 G_6 + \frac{C_2}{L_3} (G_5 + G_6) + \frac{C_4}{L_3} (G_1 + G_6) + \frac{1}{s L_3} (G_1 G_5 +$$

$$+ G_1 G_6 + G_5 G_6).$$

Cofactori simetrici ai matricei admitanţelor la noduri

Să ne întoarcem acum la cofactorii lui det **AYA'**. Îi vom împărţi în două grupe: cofactor simetrici, cum ar fi Δ_{jj} şi cofactori asimetrici, cum ar fi Δ_{jk}. Vom considera mai întîi cofactorii simetrici. Cofactorul

Δ_{jj} se obține din matricea admitanțelor la noduri prin suprimarea liniei și coloanei j. Același rezultat se obține dacă în $\mathbf{AYA}'$, vom suprima linia j a primei matrici și coloana j a ultimei matrici a produsului. Dar coloana j a matricii $\mathbf{A}'$ este linia j a lui $\mathbf{A}$. Să notăm cu $\mathbf{A}_{-j}$ matricea $\mathbf{A}$ cu rîndul j omis. Astfel:

$$\Delta_{jj} = \det(\mathbf{A}_{-j}\,\mathbf{YA}'_{-j}). \tag{54}$$

Ce semnificație are $\mathbf{A}_{-j}$ pentru circuit? Deoarece fiecare rînd a lui $\mathbf{A}$ corespunde unui nod care nu este nod de referință, omiterea unui rînd corespunde scurtcircuitării nodului respectiv la nodul de referință. Dacă circuitul original era notat cu N, să notăm cu N_{-j} — circuitul care rezultă prin scurtcircuitarea nodului j la nodul de referință. Atunci $\mathbf{A}_{-j}$ este matricea de incidență a circuitului N_{-j}. În consecință:

$$\Delta_{jj} = \det(\mathbf{A}_{-j}\,\mathbf{YA}'_{-j}) = \sum_{\substack{\text{toți} \\ \text{arborii lui } N-j}} \text{produsele admitanțelor arborilor lui } N_{-j}. \tag{55}$$

Această expresie poate fi folosită la determinarea lui Δ_{jj} dar este mult mai utilă pentru a stabili legătura dintre Δ_{jj} și circuitul original N.

Acum N_{-j} are cu un nod mai puțin decît N, deci cu o ramură mai puțin într-un arbore. Un arbore a lui N_{-j} nu poate fi un arbore al lui N și nu poate conține un contur (o buclă) a lui N. Astfel, deoarece un arbore a lui N_{-j} are o ramură mai puțin decît un arbore al lui N, un arbore al lui N_{-j} poate fi conținut într-un arbore al lui N. Să notăm cu T_{-j} un arbore al lui N_{-j} și să-l presupunem conținut în T — care este un arbore a lui N. Evident, T_{-j} este un semigraf a lui T (Aceasta nu contrazice faptul că este o parte a subgrafului lui N_{-j}). Deoarece în T_{-j}, ca un subgraf al lui T_{-j}, nodul j și nodul de referință d sînt scurtcircuitate, nu există nici o cale între ele. Deci nodurile j și d sînt fiecare într-o parte diferită a lui T_{-j} ca subgraf a lui T. O astfel de structură se numește biarbore. Explicit, într-un circuit cu $(n + 1)$ noduri, *un biarbore este un set de* $n - 1$ *laturi care nu formează ochiuri și care separă un arbore al circuitului în două părți conecte.* Produsul admitanțelor brațelor ce constituie un biarbore se numește *produs admitanță a biarborelui* și se notează cu ${}^2T(y)$. Se utilizează indici pentru a indica nodul care este necesar să fie într-o parte diferită a grafului. Astfel ${}^2T_{j,d}(y)$ semnifică un produs admitanță a biarborelui în care nodurile j și d sînt părți diferite ale grafului.

Pentru exemplul din fig. 3.26, circuitul N_{-1} este format prin scurtcircuitarea nodurilor 1 și 4, așa cum este arătat în fig. 3.27. Seturile de laturi notate cu 13, 34, 45 și 24 sînt patru din arborii acestui circuit. Pentru circuitul original N, aceste seturi de laturi au configurațiile arătate în fig. 3.28. Fiecare din acestea sînt un biarbore cu nodurile 1 și 4 în părți diferite. În unele din ele nodurile *1* și *4* sînt noduri izolate, în altele nu sînt.

În afară de acestea, sînt și alți biarbori (12, 15, 23 și 35) în care nodurile *1* și *4* sînt în diferite părți. Toate acestea contribuie la calculul lui Δ_{11}.

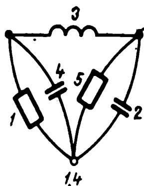


Fig. 3.27. Circuitul N_{-j} corespunzător lui N din fig. 3.26.

Odată cu introducerea conceptului de biarbore, expresia pentru cofactorul Δ_{jj} (55) poate fi rescrisă astfel:

$$\Delta_{jj} = \sum_{\substack{\text{toți}\\ \text{biarborii}}} T_{j.d}(y) = \sum_{\substack{\text{toți}\\ \text{biarborii}}} \text{produsele admitanțelor biarborilor } (j,\ d) \quad (56)$$

unde d este nodul de referință.

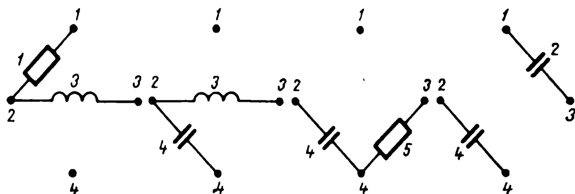


Fig. 3.28. Cîțiva din bi-arborii (*1,4*) ai circuitului N din fig. 3.26.

Avînd formulele pentru Δ și cofactorii simetrici putem evalua funcțiile de intrare ale circuitului. Fie circuitul N din fig. 3.29, considerat pasiv și fără transformatoare și presupus excitat de o sursă de curent.

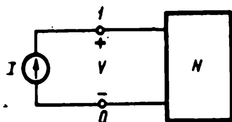


Fig. 3.29. Calculul funcției de intrare.

Să alegem ca nod de referinţă pentru tensiunile de noduri, terminalul cel mai de jos al sursei (notat cu 0). Expresia impedanţei de intrare va fi:

$$Z(s) = \frac{\Delta_{11}(s)}{\Delta(s)}\bigg|_{y}. \tag{57}$$

Substituind pentru Δ şi Δ_{11} expresiile corespunzătoare (53) şi (56) se obţine:

$$Z(s) = \frac{\Sigma^2 T_{1,0}(y)}{\Sigma\, T(y)} = \frac{\Sigma \text{ produsele biarborilor } (1,\ 0)}{\Sigma \text{ produsele arborilor}} \tag{58}$$

Acesta este într-adevăr un rezultat foarte util, deoarece permite evaluarea funcţiilor de intrare a unui circuit simplu şi chiar a unor circuite de o complexitate structurală moderată prin simpla lor inspecţie, fără o analiză extinsă.

Mai mult chiar, rezultatul cuprins în relaţia (58) poate fi aplicat pentru circuite mult mai complexe folosind un calculator digital — căutînd mai întîi toţi arborii şi biarborii circuitului iar apoi formînd produsele necesare.

Să aplicăm formula (58) filtrului trece sus din figura 3.30, pentru care se doreşte să se determine funcţia de intrare.

Sînt patru noduri, deci, trei ramuri într-un arbore şi două laturi într-un biarbore. Arborii şi biarborii (1, 0) vor fi:

Arbori				Biarbori (1,0)		
123	125	145	456	23	25	45
	126	146			26	46
	134	156			34	56
	135	245			35	
	234	246				
		345				

(Latura *1* conectează două noduri de intrare astfel că poate fi eliminată prin definiţie dintr-un biarbore). Se formează acum produsele admitanţă.

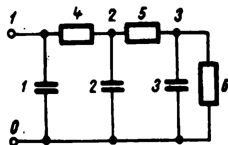


Fig. 3.30. Filtru trece-sus *RC*.

Aceste produse pot fi scrise desigur în orice formă dar putem grupa produsele fiecărui arbore sau biarbore după puterile lui s. Rezultatul va fi:

$$Z(s) = \frac{C_2C_3s^2 + sC_2(G_5 + G_6) + sC_3(G_4 + G_5) + G_4G_5 + G_4G_6 + G_5G_6}{\left\{\begin{array}{l} C_1C_2C_3s^3 + s^2[C_1C_2(G_5 + G_6) + C_1C_3(G_4 + G_5) + C_2C_3G_4] \\ + s[G_4(G_5 + G_6)(C_1 + C_2) + G_5(C_1G_6 + C_3G_4)] + G_4G_5G_6. \end{array}\right\}} \quad (59)$$

Din dezvoltarea precedentă și așa cum a fost ilustrată și de exemplu, formulele topologice pe care le-am descris pot fi numite formule de *efort minim*, căci nu a existat nici o eliminare a vreunui termen — fiecare termen evaluat a apărut în rezultatul final.

Cofactori nesimetrici ai matricei admitanțelor la noduri

Matricea admitanțelor la noduri fiind cunoscută ne rămîne să discutăm cofactorii nesimetrici de forma Δ_{ij}. Acum $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, unde M_{ij} este minorul corespunzător. Pentru a forma pe M_{ij}, vom șterge din matricea admitanțelor la noduri linia i și coloana j. Deci este nevoie să examinăm det $(\mathbf{A}_{-i}\mathbf{Y}\mathbf{A}'_{-j})$. Folosind teorema lui Binet-Cauchy rezultă:

$$(-1)^{i+j}\Delta_{ij} = \det \mathbf{A}_{-i}\mathbf{Y}\mathbf{A}'_{-j}$$

$$= \sum_{\substack{\text{toți det.} \\ \text{majori}}} \text{produsele det. majori coresp. lui } \mathbf{A}_{-i}\mathbf{Y} \text{ și } \mathbf{A}'_{-j}. \quad (60)$$

Ca și în paragraful precedent, determinantul major al matricei $\mathbf{A}_{-i}\mathbf{Y}$ corespunde unui biarbore în care nodurile i și nodul de referință sînt în părți separate ale grafului. Similar, un determinant major al lui $\mathbf{A}_{-j}$ (care este egal cu ± 1) corespunde unui biarbore în care nodurile j și nodul de referință sînt în părți separate ale grafului circuitului. Deoarece, pentru ca să ne intereseze fiecare factor al produsului din (60) trebuie să fie nenul, subcircuitele care corespund elementelor Δ_{ij} trebuie să fie biarbori cu nodurile i și d pe de o parte precum și nodurile j și d pe de altă parte în părți separate ale grafului. Deoarece nu sînt decît două părți într-un biarbore, iar d se află într-una din aceste părți, vom concluziona că ambele noduri i și j, trebuie să fie în aceeași parte. Astfel biarborii cu noduri i și j într-o parte a grafului și nodul de referință în cealaltă parte a grafului vor fi singurii care vor contribui la Δ_{ij}. Astfel de produse calculate pe acești biarbori sînt notate cu ${}^2T_{ij,d}(y)$. Singura rezervă se referă la semn. Dacă $\mathbf{A}_{-j}$ și $\mathbf{A}_{-i}$ au semne opuse, nu există nici o siguranță privind semnul corespunzător determinanților majori pentru

$A_{-i}Y$ și A'_{-j}. Totuși se poate indica semnul produsului prin relația: $(-1)^{i+j}$. Rezultatul final va fi:

$$\Delta_{ij} = \sum {}^2T_{ij.d}(y) = \sum \text{ Produsele admitanțelor biarborilor } (i\ j,\ d). \quad (61)$$

Cu ajutorul acestui rezultat este acum posibil să evaluăm cîteva funcții de transfer. Să considerăm situația din fig. 3.31. Se dorește să se găsească raportul de transfer al tensiunilor $V_{23}(s)/V_1(s)$. Să presupunem aplicată o sursă de curent, cum este arătat în figură, și că nodul 0 a fost ales ca nod de referință.

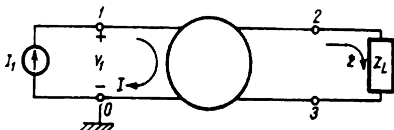


Fig. 3.31. Calculul funcției de transfer.

Ecuațiile la noduri pot fi rezolvate în raport de tensiunile la noduri V_1, V_2 și V_3. Deoarece $V_{23} = V_2 - V_3$ se obține:

$$\frac{V_{23}}{V_1} = \frac{(V_2 - V_3)/I_1}{V_1/I_1} = \frac{(\Delta_{21} - \Delta_{31})}{\Delta_{11}}\bigg|_y =$$

$$= \frac{\sum [{}^2T_{12.0}(y) - {}^2T_{13.0}(y)]}{\sum {}^2T_{1.0}(y)}. \quad (62)$$

Ca un exemplu specific să privim înapoi la circuitul din fig. 3.30. Fie ca tensiunea de ieșire să fie tensiunea de-alungul laturii 5. Elementul ${}^2T_{1.0}(y)$ a fost deja determinat ca fiind numărătorul relației (59), astfel încît ne rămîne să ne concentrăm asupra numărătorului produselor — biarbore corespunzător relației (62). Pentru biarborele care conține ambele noduri *1* și *2*, trebuie să fie prezentă și latura *4*. Latura *1* conectează nodurile *0* și *1*; latura *2* conectează nodurile *0* și *2*. Niciuna din aceste laturi nu poate fi prezentă în ${}^2T_{12.0}(y)$. În mod similar, pentru ca nodurile *1* și *3* să se afle într-o parte conectă a grafului, trebuie să fie prezente și laturile *4* și *5*. Deoarece biarborele are numai două laturi nu există alte produse, astfel încît:

$${}^2T_{12.0}(y) = sC_3G_4 + G_4G_5 + G_4G_6, \quad (63a)$$

$${}^2T_{13.0}(y) = G_4G_5. \quad (63b)$$

Funcția de transfer va fi

$$\frac{V_{23}}{V_1} = \frac{sC_3G_4 + G_4G_6}{C_2C_3s^2 + s[C_2(G_5 + G_6) + C_3(G_4 + G_5)] + G_4G_5 + G_4G_6 + G_5G_6} \quad (64)$$

Poate fi observat aici un element foarte interesant. Există un termen comun în cei doi biarbori în (63) care dispar după substituția în relația (62). Astfel această formulă nu este o formulă de tipul „efortului minim". O altă observație interesantă poate fi făcută comparînd produsele biarbore în (63) cu ${}^2T_{1.0}(y)$, care este numitorul lui (64); ${}^2T_{1.0}(y)$ conține integral pe ${}^2T_{12.0}(y)$ și pe ${}^2T_{13.0}(y)$. Aceste observații motivează discuția care urmează:

Să considerăm un biarbore (j, d) și un nod i. Acest nod trebuie să fie într-o parte a grafului care îl conține fie pe j fie pe d. Astfel suma lui ${}^2Tij,d(y)$ și ${}^2Tj,di(y)$ trebuie să conțină toți termenii conținuți în ${}^2Tj,d(y)$ adică:

$$\sum {}^2T_{j,d}(y) = \sum {}^2T_{ij,d}(y) + \sum {}^2T_{j,di}(y). \quad (65)$$

Această relație poate fi folosită pentru a scrie următoarele identități:

$$\sum {}^2T_{12.0}(y) \equiv \sum {}^2T_{12.03}(y) + \sum {}^2T_{123.0}(y), \quad (66a)$$

$$\sum {}^2T_{13.0}(y) \equiv \sum {}^2T_{13.02}(y) + \sum {}^2T_{123.0}(y). \quad (66b)$$

De notat că ele au termeni comuni. Cînd relațiile sînt înserate în (63) rezultatul devine:

$$\frac{V_{23}}{V_1} = \frac{\sum [{}^2T_{12.03}(y) - {}^2T_{13.02}(y)]}{\sum {}^2T_{1.0}(y)}. \quad (67)$$

În contrast cu (63) aceasta este o formulă de *„minim efort"*, deoarece nodurile *2* și *3* sînt în părți separate ale grafului în ambele produse biarbore la numărător. Acest rezultat pune în evidență și faptul că ***admitanța de sarcină nu poate apare la numărător.***

Ca o ilustrare finală să folosim această formulă pentru a calcula raportul de transfer al tensiunilor V_{23}/V_{14} pentru circuitul din fig. 3.26. În acest exemplu nodul *4* joacă rolul nodului *0* din exemplul precedent. Biarborele (1, 4) a fost prezentat în fig. 3.28. Se poate scrie că:

$$\sum {}^2T_{12.34}(y) = G_1G_5,$$

$$\sum {}^2T_{13.24}(y) = C_4C_2s^2,$$

astfel că:

$$\frac{V_{23}}{V_{14}} = \frac{G_1G_5 - C_4C_2s^2}{s^2C_1C_2 + s(G_1C_2 + C_4G_5) + \left(G_1G_5 + \frac{C_2 + C_4}{L_3}\right) + \frac{G_1G_5}{sL_3}}.$$

Matricea impedanţelor pe contur şi cofactorii ei

Din relaţiile de dualitate ne putem aştepta ca ceea ce a fost făcut pentru matricea admitanţelor la noduri să poată fi de asemenea făcut pentru matricea impedanţelor pe contur. Aceasta este adevărat, aşa cum vom discuta în continuare, cu unele diferenţe caracteristice. Una din aceste diferenţe este că determinanţii submatricilor nesingulare ai matricii pe contur **B** nu sînt în mod necesar egali cu ± 1. Aceşti determinanţi pot avea valoarea ± 1, dacă **B** este o matrice de contur fundamentală. Deci, vom presupune, că **B** este o matrice de contur fundamentală.

Aici punctul de plecare este matricea impedanţelor de contur **BZB′**. la care se aplică teorema Binet-Cauchy.

De data aceasta submatricile nesingulare ale lui **B** corespund *coarborilor* (complimenţii arborilor) în locul arborilor. Vom defini un produs de *impedanţe-coarbore* (complementarele arborilor) ca un produs al impedanţelor coardelor pentru un anume arbore. Vom folosi simbolul $C[T(z)]$ pentru a indica acest produs. Urmînd acelaşi raţionament ca şi în cazul matricei admitanţelor la noduri se găseşte că:

$$\Delta|_z = \det \mathbf{BZB'} = \sum_{\substack{\text{toţi}\\ \text{arborii}}} C[T(z)]$$

$$= \sum_{\substack{\text{toţi}\\ \text{arborii}}} \text{produsele impedanţelor coarborilor.} \tag{68}$$

adică pentru a calcula determinantul Δ trebuie să determinăm toţi arborii din care vom determina toţi coarborii, apoi să multiplicăm toate impedanţele corzilor fiecărui coarbore şi în final să adunăm produsele rezultate.

Fără îndoială că se naşte întrebarea dacă nu există o relaţie între determinanţii matricii impedanţelor de contur şi matricea admitanţelor la noduri. Vom examina în continuare această problemă. Să presupunem că produsul admitanţelor unui arbore este multiplicat cu produsul tuturor impedanţelor laturilor circuitului. Impedanţele ramurilor se vor simplifica cu admitanţele ramurilor rezultînd un produs de impedanţă-coarbore. Făcind acest lucru pentru toate produsele admitanţelor tuturor arborilor

şi adunînd rezultatele vom obţine o sumă a produselor de impedanţă coarbore, sau :

$$\Delta|_z = (z_1 z_2 z_3 \ldots z_l)\Delta|_y. \tag{69}$$

Deoarece matricea impedanţelor laturilor **Z** este o matrice diagonală, produsul impedanţelor din expresia de mai sus este pur şi simplu valoarea determinantului lui **Z**. Astfel acesta poate fi rescris ca :

$$\Delta|_z = (\det \mathbf{Z})\Delta|_y . \tag{70}$$

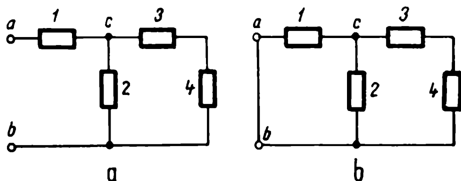


Fig. 3.32. Ilustrarea importanţei condiţiilor de terminaţie.

Aceasta este un rezultat foarte important, care spune că determinanţii de contur şi la noduri, deşi provin din matrici diferite (care, în general au ordine diferite) sînt legaţi într-un nod foarte simplu. În particular dacă se consideră că fiecare *R*, *L* şi *C* sînt într-o latură a circuitului, cei doi determinanţi pot să difere cu cel mult printr-un factor de multiplicare ks^p. Aceasta înseamnă că determinanţii de contur şi la noduri au întotdeauna aceleaşi zerouri exceptînd unele zerouri posibile la $s = 0$; adică se poate spune că frecvenţele naturale nenule ale unui circuit sînt independente de metoda de analiză (pe contur sau la noduri) aleasă. În această formulare, legătura dintre cei doi determinanţi se aplică şi circuitelor care conţin inductanţe mutuale şi transformatoare.

Trebuie subliniat că această relaţie între determinanţi se aplică numai dacă determinanţii se referă la acelaşi circuit. Din acest punct de vedere sînt posibile mari erori. De exemplu, să considerăm situaţia din fig. 3.32, *a*. Să presupunem că o sursă de tensiune se aplică terminalelor *a* şi *b*. Plecînd de la matricea impedanţelor de contur şi considerînd sursa de tensiune ca un scurtcircuit, rezultă circuitul din fig. 3.32, *b* pentru calculul lui $\Delta|_z$. Aceasta are un nod mai puţin şi, în consecinţă, o ramură mai puţin într-un arbore, decît circuitul original. Ar fi o greşeală să ne imaginăm că $\Delta|_y$ pentru circuitul din fig. 3.32, *a* este legat printr-o relaţie de tipul (70) de $\Delta|_z$ pentru circuitul din fig. 3.32, *b*. Dacă primul circuit este notat cu *N*, atunci cel de-al doilea este obţinut prin scurt-

circuitarea nodului a cu b. Aceasta este ceea ce am numit un circuit N_{-a}. Să ne întoarcem la cofactorii lui $\Delta|_z$ şi să considerăm mai întîi cofactorii simetrici de forma $\Delta_{jj} = \det \mathbf{B}_{-j}\,\mathbf{Z}\mathbf{B}'_{-j}$, unde $\mathbf{B}_{-j}$ este matricea obţinută din matricea $\mathbf{B}$ omiţînd rîndul j. Omiterea rîndului j din matricea $\mathbf{B}$ semnifică distrugerea conturului j în circuit. Pentru a distruge un contur, îl vom lăsa pur şi simplu în gol, avînd grijă să nu lăsăm în gol în acelaşi timp şi alte contururi. Acest lucru este posibil dacă conturul j conţine o latură care nu mai este conţinută de nici un alt contur. Circuitul rezultat, cînd conturul este lăsat în gol va avea un contur mai puţin decît circuitul

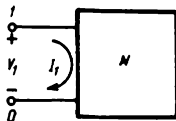


Fig. 3.33. Funcţia de intrare.

original. Determinantul Δ_{jj} este pur şi simplu determinantul matricii impedanţelor de contur a acestui nou circuit. Astfel relaţia (3.68) se aplică pentru evaluarea sa numai că este vorba de un circuit nou cu un contur mai puţin.

Ideile dezvoltate anterior vor deveni mult mai clare dacă le vom utiliza pentru a găsi impedanţa de intrare a circuitului din fig. 3.33.

Să notăm cu N circuitul cînd terminalele sînt lăsate în gol, cu alte cuvinte cînd conturul 1 este deschis. Atunci, aplicînd o sursă de tensiune circuitul rezultat va fi N_{-1} deoarece sursa se comportă ca un scurtcircuit. Aceasta înseamnă că $\Delta|_z$ va fi evaluat cu ajutorul relaţiei (3.68) pentru circuitul N_{-1}. Reamintind că produsele admitanţelor arborilor pentru circuitul N_{-1} sînt produsele admitanţelor biarborilor circuitului N, rezultă că produsele impedanţelor coarborilor pentru N_{-1} sînt ***produsele impedanţelor co-bi-arborilor pentru N.***

Admitanţa de intrare la terminalele circuitului N este dată de relaţia (8) ca fiind $Y_{(s)} = \Delta_{11}/\Delta|_z$, unde Δ_{11} este determinantul circuitului N care rezultă cînd conturul 1 al circuitului N_{-1} este deschis (lăsat în gol). Astfel, deoarece $Z(s) = 1/Y_{(s)}$ vom găsi că:

$$Z(s) = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}\Big|_z = \frac{\sum \text{produsele impedanţelor co-bi-arborilor } (1,0)}{\sum \text{produsele impedanţelor coarborilor}} =$$

$$= \frac{\sum C[{}^2T_{1.0}(z)]}{\sum C[T(z)]}. \tag{71}$$

Notaţia pare dificilă, dar ideea este simplă. Astfel $C[{}^2T_{1.0}(z)]$ este un simbol — pentru anumite operaţii, care se poate citi: găseşte un biarbore

în care nodurile 1 şi 0 sînt în părţi diferite; ia laturile care *nu* sînt în biarbore şi multiplică între ele impedanţele lor. Numărătorul lui (71) este suma unor astfel de produse pentru toţi biarborii (1, 0).

De notat că acest rezultat putea fi anticipat din expresia impedanţei dată de relaţia (58) dedusă din matricea admitanţelor la noduri. Să presupunem că numărătorul şi numitorul acestei expresii sînt multiplicaţi prin det Z. Aşa cum s-a discutat mai sus, fiecare termen, care este compus din produse ale admitanţelor anumitor laturi, este convertit într-un produs al impedanţelor complementarelor acestor laturi. De aici rezultă relaţia (71).

În final să ne întoarcem la cofactorii nesimetrici ai matricii impedanţelor de contur. În consecinţă ne vom întoarce la fig. 3.31 cu schimbarea că va fi aplicată o sursă de tensiune în locul unei surse de curent. Vom presupune că sursa şi sarcina Z_L se găsesc respectiv numai în contururile *1* şi *2*. Toate funcţiile de transfer V_{23}/V_1, V_{23}/I_1, I_2/V_1 şi I_2/I_1 conţin pe Δ_{12} la numărător. Intuitiv ne aşteptăm ca formula topologică a lui Δ_{12z} să fie duala celei obţinute pentru cofactorii corespunzători ai matricei admitanţelor la noduri. Rezultatul este:

$$\Delta_{12} = \sum C\,[^2T_{12,03}(z)] - \sum C\,[^2T_{13.02}(z)], \tag{72}$$

în care complemenţii sînt calculaţi fără sarcina Z_L[1].

Să considerăm ca exemplu, funcţia de transfer a tensiunilor pentru circuitul din fig. 3.31. În termenii ecuaţiilor de contur, această funcţie este dată de relaţia:

$$\frac{V_{23}}{V_1} = Z_L \frac{I_2}{V_1} = Z_L \left.\frac{\Delta_{12}}{\Delta}\right|_z . \tag{73}$$

O expresie pentru acest raport de tensiuni a fost dată anterior în relaţia (67). Să presupunem că numărătorul şi numitorul acelei expresii este multiplicat prin det **Z** pentru circuitul cu conturul 1 deschis. (De ce este folosit det **Z** al acestui circuit particular?) Acum Z_L este un factor al lui det **Z**. Deoarece Y_L nu apărea la numărător, Z_L nu va dispare în nici un termen al numărătorului. Deci va putea fi scos în factor comun. Rezultatul va fi:

$$\frac{V_{23}}{V_1} = \frac{\det \mathbf{Z} \sum [^2T_{12.03}(y) - {}^2T_{13.02}(y)]}{\det \mathbf{Z} \sum {}^2T_{1.0}(y)} =$$

$$= \frac{Z_L \sum \{C\,[^2T_{12.03}(z)] - C\,[^2T_{13.02}(z)]\}}{\sum C\,[^2T_{1.0}(z)]}, \tag{74}$$

[1] Pentru o demonstraţie amănunţită, vezi Seshu şi Reed, op. cit.

unde complemenții de la numărător au fost calculați pentru circuitul fără Z_L. Comparația acestui rezultat cu (73) conduce la formula pentru Δ_{12} dată în (72). Cele de mai sus constituie, de fapt, o demonstrație a acestei formule.

Parametrii diportului

Deoarece, în cazul diportului (cuadripolului), parametrii admitanță in scurtcircuit și parametrii impedanță în gol sînt folosiți frecvent, va fi foarte util să avem formulele topologice pentru evaluarea lor. Vom dezvolta rapid aceste formule, fără a ne opri la examinarea detaliată a tutuor etapelor de calcul.

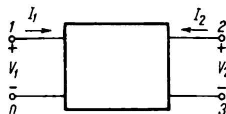


Fig. 3.34. Sensurile de referință ale curenților și tensiunilor utilizate la calculul parametrilor unui diport.

Prototipul unui diport (cuadripol) este arătat în fig. 3.34.

Terminalul 0 este ales ca nod de referință pentru definirea tensiunilor de noduri. De notat că tensiunea de poartă V_2 este diferența între tensiunile de noduri V_{20} și V_{30}. Să presupunem că sînt aplicate la porțile de intrare și ieșire surse de curent. Ecuațiile la noduri vor fi:

$$\mathbf{AYA'} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_{20} \\ V_{30} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ -I_2 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}. \tag{75}$$

În continuare vom rezolva sistemul de mai sus în raport cu tensiunile de noduri V_1, V_{20} și V_{30}

$$V_1 = \frac{1}{\Delta}(\Delta_{11} I_1 + \Delta_{21} I_2 - \Delta_{31} I_2), \tag{76a}$$

$$V_{20} = \frac{1}{\Delta}(\Delta_{12} I_1 + \Delta_{22} I_2 - \Delta_{32} I_2), \tag{76b}$$

$$V_{30} = \frac{1}{\Delta}(\Delta_{13} I_1 + \Delta_{23} I_2 - \Delta_{33} I_2). \tag{76c}$$

Observînd că $V_2 = V_{20} - V_{30}$, ecuaţiile în gol devin:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} - \Delta_{13} \\ \Delta_{12} - \Delta_{13} & \Delta_{22} + \Delta_{33} - 2\Delta_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = Z_{oc}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (77)$$

Pentru a determina matricea admitanţelor în scurtcircuit va trebui să inversăm pe Z_{oc}. Fie Δ_{oc} determinantul lui Z_{oc}. Din relaţia (77) acest determinant este:

$$\Delta_{oc} = \frac{1}{\Delta^2}(\Delta_{11}\Delta_{22} + \Delta_{11}\Delta_{33} - 2\Delta_{11}\Delta_{23} - \Delta_{12}^2 - \Delta_{13}^2 + 2\Delta_{12}\Delta_{13}). \quad (78)$$

Această relaţie poate fi simplificată folosind teorema lui Jacobi[1]), care spune că:

$$\begin{aligned} \Delta_{ii}\Delta_{jj} - \Delta_{ij}^2 &= \Delta\Delta_{iijj}, \\ \Delta_{ii}\Delta_{jk} - \Delta_{ij}\Delta_{ik} &= \Delta\,\Delta_{iijk}, \end{aligned} \quad (79)$$

unde Δ_{iijk} este cofactorul format prin suprimarea rîndurilor i şi j şi a coloanelor i şi k din Δ.

Folosind aceste identităţi, (78) devine:

$$\Delta_{oc} = \frac{1}{\Delta}(\Delta_{1122} + \Delta_{1133} - 2\Delta_{1123}). \quad (80)$$

Cu aceasta inversa lui (77) poate fi acum scrisă ca:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_{1122} + \Delta_{1133} - 2\Delta_{1123}}\begin{bmatrix} \Delta_{22} + \Delta_{33} - 2\Delta_{23} & \Delta_{13} - \Delta_{12} \\ \Delta_{13} - \Delta_{12} & \Delta_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}. \quad (81)$$

Avem formulele topologice pentru toţi cofactorii exceptînd pe aceia cu patru indici. Să definim un *triarbore a unui graf, avînd $n + 1$ noduri, ca un set de trei subgrafe neconecte avînd un total de $n - 2$ laturi şi care nu conţine nici un contur (ochi)*.

Vom nota un tri-arbore cu simbolul ^3T împreună cu indicii care vor indica care noduri sînt în părţi separate ale grafului. Aşa cum a fost arătat că Δ este egal cu suma produselor admitanţelor pentru toţi arborii unui graf şi că Δ_{ij} este egal cu produsele admitanţă bi-arbore de tipul

[1] Vezi, de exemplu, A. C. Aitken „Determinants and Matrices" 9th ed. Interscience Publishers, New York, 1956.

(ij, d) pentru toți bi-arborii de tipul în care i și j sînt într-o parte a grafului, iar d în altă parte, în același nod se poate arăta că:

$$\begin{aligned} \Delta_{1122} &= \sum {}^3T_{1.2.0}(y), \\ \Delta_{1133} &= \sum {}^3T_{1.3.0}(y), \\ \Delta_{1123} &= \sum {}^3T_{1.23.0}(y), \end{aligned} \tag{82}$$

unde: ${}^3T_{1.2.0}(y)$ este produsul admitanțelor tri-arborelui cu nodurile 1, 2 și 0 în părți separate ale grafului, iar ceilalți tri-arbori avînd interpretări similare.
Dar:

$$\begin{aligned} {}^3T_{1.2.0} &= {}^3T_{1.23.0} + {}^3T_{13.2.0} + {}^3T_{1.2.03}, \\ {}^3T_{1.3.0} &= {}^3T_{1.23.0} + {}^3T_{12.3.0} + {}^3T_{1.3.02}. \end{aligned} \tag{83}$$

Folosind ultimele două seturi de ecuații, vom găsi că:

$$\begin{aligned} \Delta_{1122} + \Delta_{1133} - 2\Delta_{1123} &= \sum {}^3T_{1.2.30}(y) + \sum {}^3T_{13.2.0}(y) + \sum {}^3T_{12.3.0}(y) + \\ &+ \sum {}^3T_{1.3.20}(y) \equiv \sum {}^3T(y) \qquad \text{(prescurtat)}. \end{aligned} \tag{84}$$

Înainte de a înlocui formulele topologice pentru cofactori în relația (81) să notăm că este posibil să simplificăm această expresie, știind că:

$$\begin{aligned} \Delta_{22} &= \sum {}^2T_{2.0} = \sum {}^2T_{23.0} + \sum {}^2T_{2.03}, \\ \Delta_{33} &= \sum {}^2T_{3.0} = \sum {}^2T_{23.0} + \sum {}^2T_{3.02}, \\ \Delta_{23} &= \sum {}^2T_{23.0}. \end{aligned}$$

Deci

$$\Delta_{22} + \Delta_{33} - 2\Delta_{23} = \sum {}^2T_{2.03} + \sum {}^2T_{02.3} = \sum {}^2T_{2.3}. \tag{85}$$

Ținînd cont de relațiile de mai sus relațiile (77) și (81) conduc la:

$$\mathbf{Z}_{oc} = \frac{1}{\sum T(y)} \begin{bmatrix} \sum {}^2T_{1.0} & \sum ({}^2T_{12.30} - {}^2T_{13.20}) \\ \sum ({}^2T_{12.30} - {}^2T_{13.20}) & \sum {}^2T_{2.3} \end{bmatrix} \tag{86}$$

$$\mathbf{Y}_{sc} = \frac{1}{\sum {}^3T(y)} \begin{bmatrix} \sum {}^2T_{2.3} & -\sum ({}^2T_{12.30} - {}^2T_{13.20}) \\ -\sum ({}^2T_{12.30} - {}^2T_{13.20}) & \sum {}^2T_{1.0} \end{bmatrix} \tag{87}$$

unde $\sum^3 T(y)$ este definit de (84). De subliniat faptul că numărătorii impedanțelor de transfer și admitanțelor de transfer diferă numai ca semn. Aceasta verifică observația noastră anterioară potrivit căreia aceste funcții au aceleași zerouri — în afara cazurilor în care unele din aceste zerouri au dispărut prin simplificare cu zerourile numitorilor.

Exemplu. Ca o ilustrare, circuitul din fig. 3.30, a fost redesenat ca un cuadripol în fig. 3.35. Să determinăm pe $\mathbf{Y}_{sc}$. Pentru aceasta bi-arborele (1,0) a fost deja calculat în relația (58). Vom repeta aceste relații împreună cu alte relații necesare calculului de față:

bi-arborii (1, 0): 23, 25, 26, 34, 35, 45, 46 și 56
bi-arborii (12, 30): 34 și 46
bi-arborii (13, 20): Niciunul
bi-arborii (2, 3): 12, 13, 14, 16, 24, 34 și 46

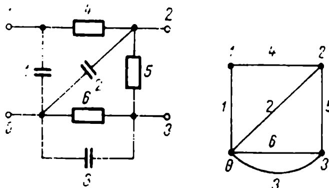


Fig. 3.35. Exemplu de calcul al parametrilor unui diport.

În acest exemplu sînt patru noduri. Astfel că un tri-arbore va avea o singură latură. Tri-arborii vor fi determinați cu ușurință. Ei sînt:

tri-arborii (1, 2, 30): 3 și 6
tri-arborii (13, 2, 0): Niciunul
tri-arborii (12, 3, 0): 4
tri-arborii (1, 3, 20): 2

Numitorul parametrilor admitanțelor în scurtcircuit va fi:

$$\sum^3 T(y) = s(C_2 + C_3) + G_4 + G_6.$$

Parametrii vor fi:

$$y_{11} = \frac{s^2C_1(C_2 + C_3) + s[G_4(C_1 + C_2 + C_3) + C_1G_6] + G_4G_6}{s(C_2 + C_3) + G_4 + G_6},$$

$$y_{12} = y_{21} = \frac{-G_4(sC_3 + G_6)}{s(C_2 + C_3) + G_4 + G_6},$$

$$y_{22} = \frac{s^2C_2C_3 + s[C_2(G_5 + G_6) + C_3(G_4 + G_5)] + G_4G_5 + G_4G_6 + G_5G_6}{s(C_2 + C_3) + G_4 + G_6}.$$

Ca o observație finală vom nota că deși dezvoltarea formulelor topologice a fost făcută în termenii ecuațiilor la noduri sau pe contur, nu am scris aceste ecuații. Dîndu-se un circuit, îi vom enumera arborii, bi-arborii și tri-arborii, iar apoi vom forma produse ale impedanțelor sau

admitanţelor laturilor acestora. Astfel, ceea ce părea o complicaţie nenecesară cînd am scris ecuaţiile pe contur sau la noduri necesitînd multiplicări de matrice pentru determinarea lui **AYA′** şi **BZB′**, s-a dovedit de un real folos căci cu ajutorul teoremei Cauchy-Binet s-au obţinut relaţii matematice ce au condus la formule simple care nu mai necesită operaţiuni cu matrici.

PROBLEME

P1. Pentru circuitul din fig. 3.P.1 să se determine funcţia amplificare de tensiune $V_2(s)/V_1(s)$.

a) folosind ecuaţiile cu variabile mixte;

b) folosind ecuaţiile la noduri, apoi să se exprime curentul I_1 în funcţie de tensiunile corespunzătoare.

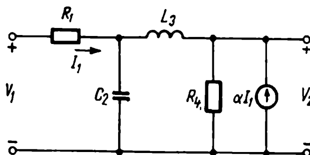


Fig. 3.P.1.

P2. În fig. 3.P.2 este arătat un amplificator împreună cu schema sa echivalentă liniară. Să se găsească expresia impedanţei de ieşire Z_0 pentru ambele cazuri indicate în figură; cînd ieşirea este pe anodul sau pe catodul tubului.

a) Se vor utiliza ecuaţiile la noduri şi reprezentarea cu admitanţe a sursei controlate;

b) Să se repete calculul folosind ecuaţiile de contur;

c) Se vor folosi ecuaţiile cu variabile mixte.

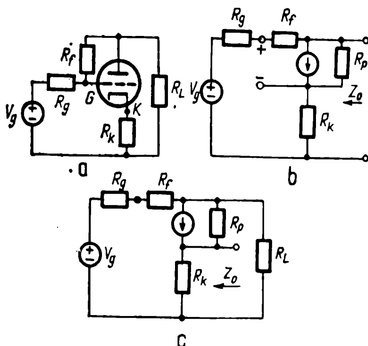


Fig. 3.P.2.

P3. Repetați problema 2 pentru amplificatorul din fig. 3.P.3.

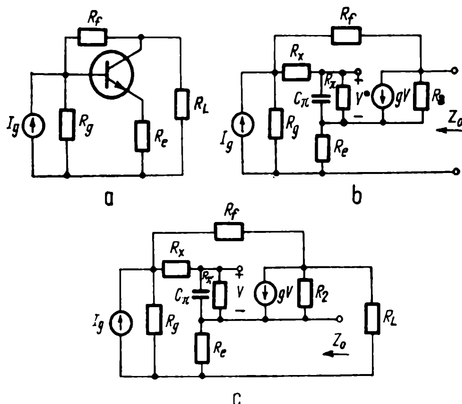


Fig. 3.P.3.

P4. În fig. 3.P.4 este arătat un amplificator diferențial. Se presupune că fiecare tranzistor poate fi reprezentat printr-un circuit echivalent liniar.

Să se găsească valorile lui R_L, R_f și R_e astfel încît tensiunea de ieșire V_0 să fie aproximativ egală cu $K(I_2 - I_1)$ .Folosiți orice set de ecuații potrivit.

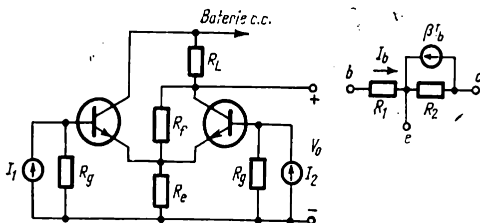


Fig. 3.P.4.

P5. Circuitul din fig. 3.P.5 este un model aproximativ pentru schema echivalentă hibridă în π a unui tranzistor. Să se găsească parametrii *h*.

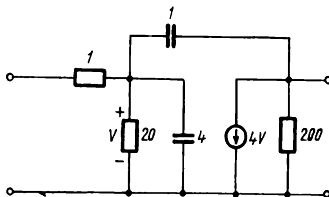


Fig. 3.P.5.

P6. Diportul (cuadripolul) din fig. 3.P.6 reprezintă un convertor negativ potențial.

a) Să se găsească parametrii *h*;

b) Să se determine raportul R_2/R_1 în funcție de β astfel ca $h_{12}h_{21} = 1$.

c) Să se discute valorile rezistențelor lui R_1 și R_2 pentru $\beta = 50$ (De notat că $\beta = 50$ este o valoare ușor realizabilă pentru amplificarea de curent).

d) Este un convertor de negativare al curentului sau a tensiunii?

P7. Diportul din fig. 3.P.7 reprezintă un convertor negativ potențial.

a) Să se calculeze parametrii *h*.

b) Să se determine raportul R_2/R_1 în raport cu β astfel încît $h_{12}h_{21} = 1$.

c) Desenați pentru acest diport un circuit echivalent bazat pe parametrii hibrizi *g*. Determinați valorile tuturor elementelor acestui circuit folosind condiția găsită la punctul *b*).

d) Fie $\beta = 50$. Proiectați circuitul de compensare posibil care conectat în serie sau în paralel la porțile diportului îl va transforma într-un convertor ideal de negativare.

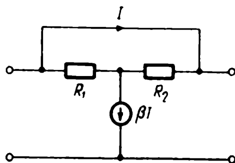


Fig. 3.P.6.

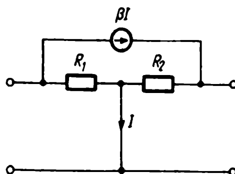


Fig. 3.P.7.

P8. a) Să se determine parametrii h pentru diportul din fig. 3.P.8.

b) Fie $\beta_1 = 1$. Care vor fi valorile lui β, R_2 şi R_1 pentru ca diportul să fie un convertor de negativare ideal?

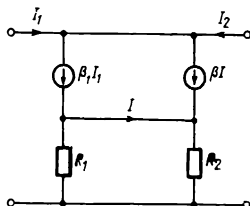


Fig. 3.P.8.

P9. Giratorul din fig. 3.P.9 are terminalul 3 ca terminal comun.

a) Să se determine matricea admitanţelor în scurtcircuit a cuadripolului cu terminalul 1 ca bornă comună.

b) Se va repeta calculul pentru cuadripolul cu terminalul 2 ca bornă comună.

c) Uneori simbolul utilizat pentru girator este cel reprezentat în fig. 3.P.9, *b*. Comentaţi justeţea acestui simbol din punctul de vedere al rezultatelor obţinute la punctele **a)** şi **b)**.

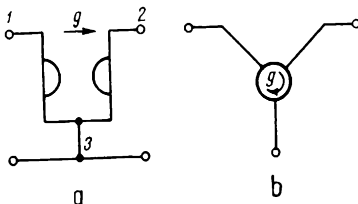


Fig. 3.P.9.

P10. Un circuit nereciproc oarecare poate fi reprezentat ca în fig. 3.P.10, *a*. Să se găsească valoarea rezistenţei R_1 care conectată ca în fig. 3.P.10, *b*, va împiedica transmisiunea inversă (de la dreapta spre stînga).

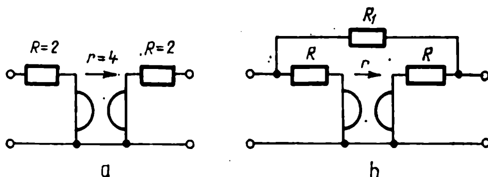


Fig. 3.P.10.

P11. În fig. 3.P.11, este reprezentat un cuadripol terminat pe impedanța de sarcină Z_L. Să se arate că:

$$Z_{21}(s) = \frac{V_2(s)}{I_1(s)} = \frac{z_{21}Z_L}{z_{22} + Z_L},$$

$$Y_{21}(s) = \frac{I_2(s)}{V_1(s)} = \frac{y_{21}Y_L}{y_{22}+Y_L}.$$

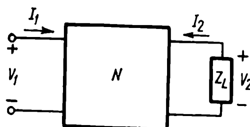


Fig. 3.P.11.

P12. Verificați că pentru un diport det $\mathbf{Y}_{sc} = 1/\det \mathbf{Z}_{oc}$.

P13. Să se arate că diporții din fig. 3.15, *c* și *d* au aceiași parametri impedanță în gol.

P14. Doi diporți N_a și N_b sînt conectați în cascadă ca în fig. 3.P.14. Folosind o analiză directă să se determine admitanța de transfer în scurtcircuit $y_{21}(s)$ a întregului cuadripol în funcție de parametrii de scurtcircuit ai cuadripolilor N_a și N_b.

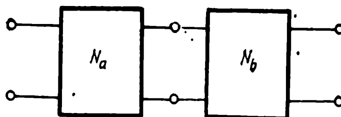


Fig. 3.P.14.

P15. Să se repete problema 14 pentru cazul unui convertor de negativare a tensiunii, intercalat între cuadripolii N_a și N_b ca în fig. 3.P.15.

Fig. 3.P.15.

P16. Fig. 3.P.16 prezintă interconectarea a doi diporţi dintre care unul este un convertor de negativare al curentului. Să se obţină expresia raportului de transfer al tensiunilor $V_2(s)/V_1(s)$, în funcţie de parametrii y ai cuadripolilor N_a şi N_b precum şi de raportul de conversie k al convertorului de negativare. Comparaţi rezultatul cu situaţia cînd convertorul nu este prezent.

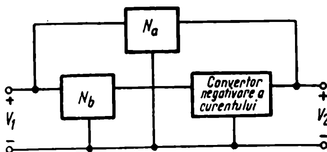


Fig. 3.P.16.

P17. Un transformator ideal este conectat în cascadă cu un diport în două moduri posibile arătate în fig. 3.P.17. Să se scrie parametrii impedanţelor în gol a întregului ansamblu în funcţie de n şi de parametrii z ai diportului.

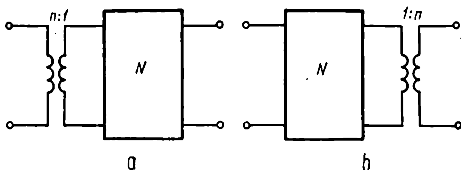


Fig. 3.P.17.

P18. Să se arate că matricea $\mathbf{Y}_{sc}$ a diportului din fig. 3.P.18, *a* (considerînd fiecare tranzistor ca o sursă dependentă de curent ca în fig. 3.P.18, *b*) va fi:

$$\mathbf{Y}_{sc} = \begin{bmatrix} g - G & -(g - G) \\ G & -G \end{bmatrix}$$

unde $G = R_1/R_{e1}R_{e2}$ şi $g = G + 1/R_{e1}$ presupunînd că $R_{e2}/\beta_1 R \ll \beta_2 R_{e2}$. Să se verifice că diportul din fig. 3.P.18, *c* este echivalent cu acest diport.

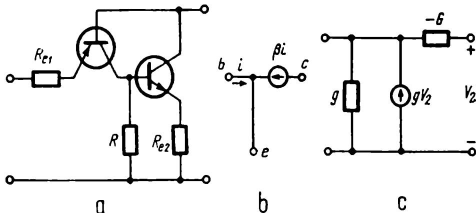


Fig. 3.P.18.

P19. Matricea hibridă *h* a unui diport are una din următoarele forme:

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{Z_1(s)}{Z_2(s)} & 0 \end{bmatrix} \text{ sau } \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{Z_1(s)}{Z_2(s)} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Acest diport este terminat pe o impedanță Z_L.

Să se găsească impedanța la cealaltă poartă. (Acest diport este numit convertor general).

P20. Să se găsească matricele *h* pentru fiecare din circuitele din fig. 3.P.20. (Înlocuiți fiecare tranzistor prin cea mai simplă schemă echivalentă posibilă).

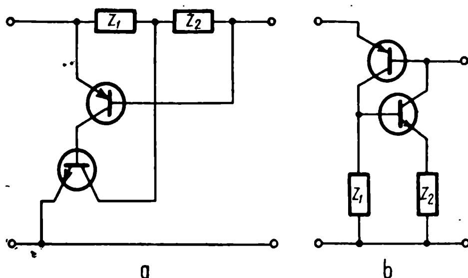


Fig. 3.P.20.

P21. Diportul din fig. 3.P.21 este un convertor general avînd matricea *h* arătată. Să se determine impedanța de intrare *Z*.

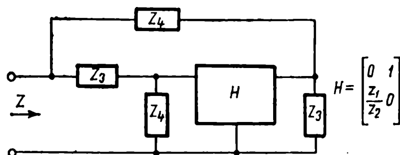


Fig. 3.P.21.

P22. Pentru schema din fig. 3.P.22 arătați ca raportul de transfer al tensiunilor este

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{-y_{21}}{y_{22} + G_1 - (g-1)Y}.$$

De observat că conductanțele G_1, G_2 și G_3 pot fi socotite că aparțin intrării, ieșirii și respectiv impedanței de reacție a cuadripolului care poate fi considerat că are surse controlate ideale).

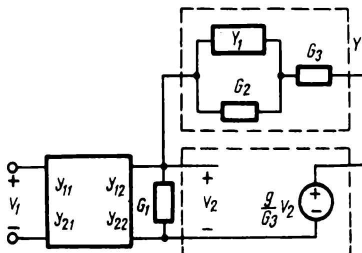


Fig. 3.P.22.

P23. Pentru fiecare din circuitele din fig. 3.P.23 să se determine funcția amplificare de curent în scurtcircuit h_{21}. Se vor folosi parametrii y ai diportului N.

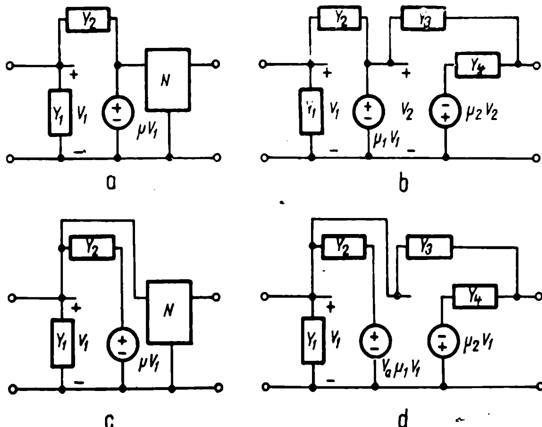


Fig. 3.P.23.

P24. Să se găsească raportul de transfer al tensiunilor pentru cei doi cuadripoli din fig. 3.P.24 în raport cu parametrii y ai diporților N_a și N_b și cu cîștigul amplificatorului μ.

Verificați în cazul diportului din fig. 3.P.24, *b* valoarea limită a acestui raport este $V_2/V_1 = -y_{21b}/y_{21a}$ cînd $\mu \to \infty$.

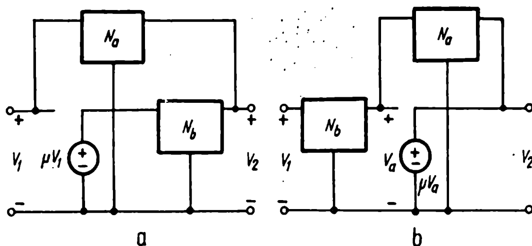
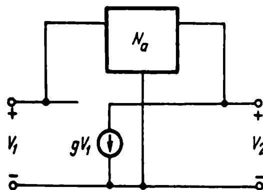


Fig. 3.P.24.

P25. Să se găsească parametrii impedanțelor în gol ai amplificatorului cu reacție din fig. 3.P.25 în funcție de g și parametrii z ai diportului N_a. Valorile limită pentru $g \to \infty$ vor fi:

$$z_{21} \to 1/y_{21a},\ z_{11} \to 0,\ z_{22} \to 0,\ z_{12} \to 0.$$



Fip. 3.P.25.

P26. În fig. 3.P.26, *a* este reprezentat un diport N_c cu cîte o rezistență R conectată în paralel la intrarea și ieșirea sa. Diportul rezultat este notat cu N_b, iar parametrii z ai diportului N_b sînt z_{11b}, z_{12b}, z_{21b} și z_{22b}.

Circuitul N_c după conectarea unei rezistențe R fie serie fie paralel la porțile sale va fi conectat în cascadă cu amplificatorul cu reacție din problema 25 ca în fig. 3.P.26, *b* și 3.P.26, *c*. Să se arate că impedanța de transfer în gol în ambele cazuri este dată de:

$$z_{21} = \frac{z_{21b}}{Ry_{21a}}$$

atunci cînd $g \to \infty$ (N_f semnifică întreaga structură cu ecuație din fig. 3.P.25).

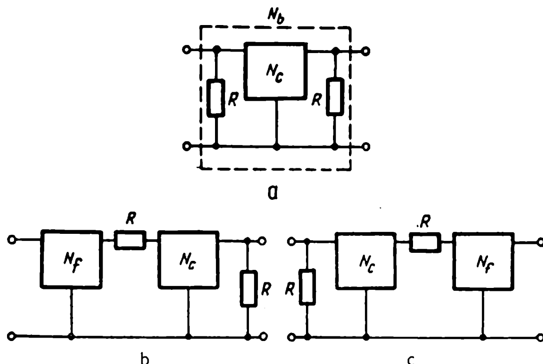


Fig. 3.P.26.

P27. Fie ca un zero de transmisiune a unui diport să fie definit ca un zero al admitanţei de transfer în scurtcircuit $y_{21}(s)$. Să se arate că fie curentul sau tensiunea de ieşire a unui diport terminat ca în fig. 3.P.27 va fi zero, indiferent dacă diportul va fi excitat de un generator de tensiune sau curent şi chiar dacă y_{11} sau y_{22} au un zero la această frecvenţă, care ar conduce la o simplificare în relaţia (25), sau ca z_{21} sau h_{21} sau g_{21} ori toate trei să fie nenule. Comentaţi termenul zero al transmisiunii.

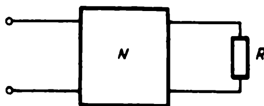


Fig. 3.P.27.

P28. a) Pentru cuadripolii conectaţi în serie-paralel şi paralel-serie din fig. 3.P.28 să se arate că parametrii h şi g ai ansamblului sînt obţinuţi prin adunarea parametrilor h şi respectiv g ai cuadripolilor componenţi.

b) Formulaţi şi demonstraţi condiţiile în care conectarea serie-paralel şi paralel-serie poate fi făcută fără violarea condiţiei ca acelaşi curent care intră/iese dintr-un terminal al unei porţi să iasă/intre în celălalt terminal al porţii.

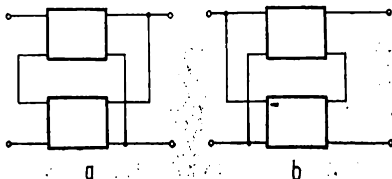


Fig. 3.P.28.

P29. Să se găsească matricea lanț pentru diportul din fig. 3.P.29. Transformatorii sînt perfecți.

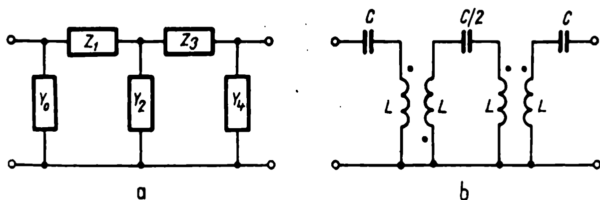


Fig. 3.P.29

P30. Tratați circuitul în T podit din fig. 3.P.30 mai întîi ca o conexiune paralel a doi cuadripoli, apoi ca o conexiune serie a doi cuadripoli, pentru a determina parametrii săi y. (Răspunsurile trebuie să fie aceleași).

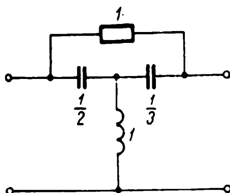


Fig. 3.P.30.

P31. Să se determine parametrii y ai diporților din fig. 3.P.31 descompunîndu-i în mod convenabil în diporți conectați în paralel.

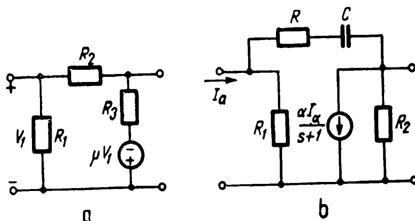


Fig. 3.P.31.

P32. Matricea admitanțelor în scurtcircuit a circuitului în π din fig. 3.P.32 cu terminalul 3 ca bornă comună este:

$$\mathbf{Y}_{sc3} = \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -2 & 4s+2 \end{bmatrix}.$$

Să se determine matricele admitanțelor în scurtcircuit cînd fiecare alt terminal este făcut bornă comună.

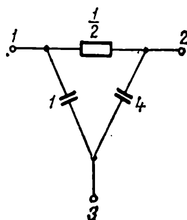


Fig. 3.P.32.

P33. În fig. 3.P.33, *a* este reprezentat un tripol cu terminalul 4 ca bornă comună. Se dă matricea admitanțelor în scurtcircuit a acestei configurații.

Se reconectează acest circuit ca în fig. 3.P.33, *b* astfel că poarta de intrare este terminalele 3 și 2 iar de ieșire între terminalele *1* și *2*. Să se găsească pentru acest circuit matricea admitanțelor în scurtcircuit.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

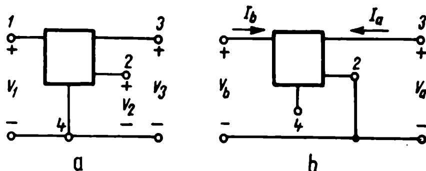


Fig. 3.P.33.

P34. În fig. 3.P.34, *a* este arătat un cuadripol conectat ca un triport cu bornă comună pentru care se dau ecuațiile în scurtcircuit.

Se conectează o capacitate unitară între terminalele 1 şi 2 ca în fig. 3.P.34, *b*.

Să se determine matricea admitanţelor în scurt circuit a circuitului considerat ca un di-port ca în fig. 3.P.34, *b*.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -3 & 6 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

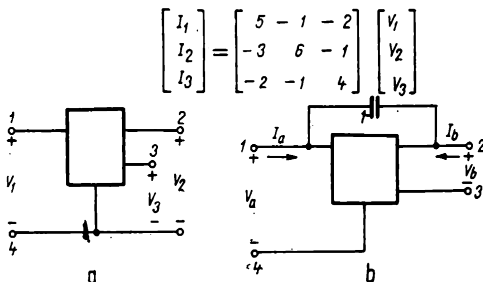


Fig. 3.P.34.

P35. Circuitul *n*-terminal din fig. 3.P.35 este liniar, cu constante concentrate şi invariabil în timp. El este reprezentat de ecuaţia $\mathbf{I} = \mathbf{Y}_i\mathbf{V}$, unde $\mathbf{Y}_i$ este matricea admitanţelor nedefinită, iar curenţii şi tensiunile sînt reprezentate în figură. Se propune să fie reţinute primele *k* borne ca terminale, restul conectîndu-se la masă prin intermediul unor impedanţe ca în fig. 3.P.35 *b*. Fie $\mathbf{Z}$ matricea diagonală a căror elemente diagonale sînt impedanţele $\mathbf{Z}_j$. Să se găsească expresia care leagă noii curenţi de terminale de tensiuni în funcţie de $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Y}_i$ şi submatricele corespunzătoare lor.

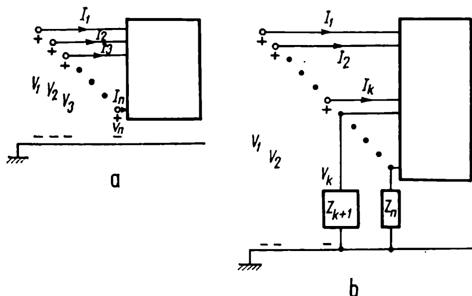


Fig. 3.P.35.

P36. Schema din fig. 3.P.36 este a unui circuit liniar *RLC* fără transformatoare.

Să se determine expresia tensiunii $V(s)$ folosind relațiile topologice între determinantul matricii admitanțelor la noduri și cofactorii săi, luînd nodul 5 ca nod de referință.

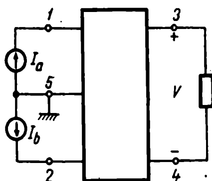


Fig. 3. P. 36.

P37. Circuitul din fig. 3.P.37 este un circuit *RLC* fără transformatoare. Să se găsească expresia tensiunii în funcție de determinantul matricii admitanțelor la noduri și cofactorii săi, specificînd cu grijă structura precisă a circuitului pentru care corespunde această matrice. Scrieți rezultatul în termenii formulelor topologice simplificînd pe cît posibil.

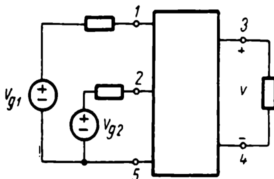


Fig. 3. P. 37.

P38. Discutați modificarea matricei impedanță nedefinită Z_i cînd:

a) două terminale sînt conectate împreună;

b) un terminal este suprimat.

Comparați rezultatele cu $\mathbf{Y}_i$.

P39. Dîndu-se pentru un circuit n-terminal cu $n = 3$ și $n = 4$, matricea impedanță nedefinită, să se găsească matricea impedanțelor în gol a multiportului cu bornă comună ce rezultă cînd terminalul n este făcut bornă comună.

P40. Să se calculeze admitanța de intrare a fiecărui circuit din fig. 3.P.40 folosind formulele topologice. Se va face calculul odată folosind matricea admitanțelor la noduri, iar a doua oară matricea impedanțelor pe contur.

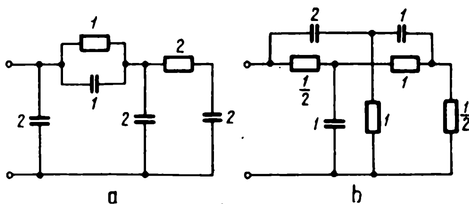


Fig. 3. P. 40.

P41. Pentru circuitul din fig. 3.P.41 să se calculeze admitanţa de intrare la poarta din stînga folosind formulele topologice.

Se va face calculul odată folosind matricea admitanţelor la noduri, iar a doua oară folosind matricea impedanţelor pe contur.

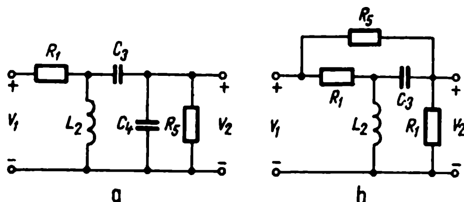


Fig. 3.P.41.

P42. Pentru circuitul din fig. 3.P.41 să se determine raportul de transfer al tensiunilor V_2/V_1 folosind formule topologice.

P43. În cazul unui diport cu bornă comună stabilirea unor formule topologice pentru calculul lui $\mathbf{Y}_{sc}$ şi $\mathbf{Z}_{oc}$ ar fi o deosebită utilitate. Determinaţi aceste formule simplificate.

P44. Pentru circuitul din fig. 3.P.44 să se determine matricea impedanţelor în gol $\mathbf{Z}_{oc}$ folosind formule topologice.

$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$

$C_3 = \frac{3}{4}$

$G_4 = G_5 = \frac{1}{203}$

Fig. 3.P.44.

P45. a) Demonstraţi că impedanţa unui circuit *RLC* fără inductanţe mutuale va avea un pol la $s = 0$ dacă şi numai dacă există o secţiune conţinînd numai capacităţi care separă cele două terminale (ale dipolului).

b) Demonstraţi că o impedanţă va avea un pol la infinit dacă şi numai dacă va exista o secţiune conţinînd numai inductanţe care să separe terminalele dipolului ca şi la punctul a).

P46. a) Demonstraţi că admitanţa unui circuit *RLC* fără inductanţe mutuale va avea un pol la $s = 0$ dacă şi numai dacă există o cale inductivă între terminale.

b) Demonstraţi că admitanţa va avea un pol la infinit dacă şi numai dacă există o cale capacitivă între terminale.

P47. Fie:

$$z_{11} = \frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}{D(s)},$$

$$z_{22} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{D(s)},$$

$$z_{21} = \frac{c_0 + c_1 s + \dots + c_r s^r}{D(s)}$$

parametrii în gol a unui circuit *RLC* fără inductanţe mutuale.

a) Utilizînd formule topologice să se arate că:

$$a_k \geqslant |c_k| \text{ şi } b_k \geqslant |c_k|.$$

Aceasta semnifică că o putere a lui s care este prezentă la numărătorul lui z_{21} trebuie să fie prezentă şi în numărătorii z_{11} şi z_{22}. Mai mult, coeficienţii lui z_{11} şi z_{22} vor fi pozitivi şi mai mari în modul decît coeficienţii corespunzători din z_{21}, care pot fi şi negativi.

b) Ce concluzii se desprind dacă diportul are bornă comună?

c) Presupuneţi că cele trei funcţii date se referă la y_{11}, y_{22} şi $-y_{21}$. Care va fi rezultatul corespunzător?

Aceste condiţii asupra coeficienţilor se numesc condiţiile Fialkow.

P48. a) Să se găsească parametrii admitanţă în scurtcircuit pentru circuitul din fig. 3.P.48 aplicînd direct definiţia acestor parametri. Aparent condiţia lui Fialkow nu este satisfăcută.

b) Să se găsească din nou parametrii, utilizînd formulele topologice şi să se compare cele două răspunsuri. Stabiliţi condiţia care trebuie să fie asigurată încît condiţia lui Fialkow să fie valabilă.

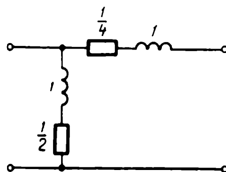


Fig. 3.P.48.

P49. Fie matricea $\mathbf{h}$ a unui tranzistor în conexiunea emitor comun:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

Să se determine matricele $\mathbf{h}$ pentru tranzistorul în conexiunea bază comună şi colector prin intermediul matricei admitanţelor nedefinite.

P50. Schema din fig. 3.P.50 este a unui circuit pasiv reciproc, în care rezistenţa R_k este explicitată. Impedanţa de intrare a circuitului este $Z(s)$. Să presupunem că latura care conţine pe R_k este întreruptă (lăsată în gol), iar terminalele ce iau astfel naştere vor constitui poarta de intrare a diportului ce va avea cea de-a doua poartă tocmai poarta circuitului original. Fie $g_{21k}(s)$ funcţia amplificare de tensiune în sensul invers de transmisiune a acestui diport. Arătaţi că dacă circuitul conţine n rezistenţe:

$$\mathrm{Re}\, Z(j\omega) = \sum_{k=1}^{n} R_k |g_{21k}(j\omega)|^2.$$

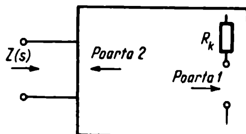


Fig. 3.P.50.

P51. Se consideră diportul N reciproc şi simetric atît electric cît şi structural. Parametrii săi z şi y sînt notaţi respectiv cu: $z_{11} = z_{22}$, z_{12} şi $y_{11} = y_{22}$ şi y_{12}.

Dacă bisecţionăm diportul la linia sa de simetrie structurală vor fi create un număr de două sau mai multe terminale la joncţiunea dintre cele două jumătăţi. Presupunem că niciuna dintre legăturile care leagă aceste terminale nu se încrucişează. Vom considera două cazuri, arătate în fig. 3.P.51, în care aceste terminale sînt lăsate în gol şi respectiv în scurtcircuit. Impedanţa de intrare şi admitanţa de intrare sînt notate cu z_{11h} şi respectiv y_{11h} pentru cele două cazuri, unde indicele h semnifică secţionarea în două a circuitului. Arătaţi că:

$$z_{11h} = z_{11} + z_{12} \text{ şi } \frac{1}{y_{11h}} = z_{11} - z_{12}$$

sau

$$\frac{1}{z_{11h}} = y_{11} + y_{12} \text{ şi } y_{11h} = y_{11} - y_{12}.$$

(*Indicaţie*: Aplicaţi tensiunile $V_1 = V_2 = V$ la terminalele circuitului original pentru a arăta că nici un curent nu va traversa axa de simetrie structurală. Apoi, aplicaţi tensiunile $V_1 = -V_2 = V$ şi arătaţi că tensiunile ce iau naştere la fiecare punct de pe axa de simetrie structurală vor fi egale). Rezultatul este cunoscut sub denumirea de teorema bisecţiei a lui Bartlett.

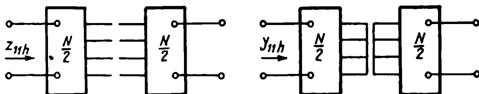


Fig. 3.P.51.

P52. Variabilele curenţi şi tensiuni din ecuaţiile la noduri, pe contur sau la perechi de noduri sînt transformatele Laplace ale unor curenţi şi tensiuni. Soluţia, de exemplu, pentru tensiunea unui nod este dată de relaţia (4):

$$V_k(s) = \sum_i J_i(s) \frac{\Delta_{ik}(s)}{\Delta(s)}$$

Să presupunem acum că sursele de excitaţie sînt toate exponenţiale astfel încît sursa i de curent echivalentă este $I_i e^{j\omega_0 t}$

I_i este un număr complex, numit fazor. Să presupunem că $s_k = j\omega_0$ nu este o frecvenţă naturală a circuitului şi să presupunem că circuitul este iniţial relaxat. Răspunsul în regim forţat corespunzător excitaţiei exponenţiale va fi tot de tip exponenţial, iar componenta în regim forţat a tensiunii la nodul k va fi

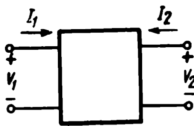
$$v_k(t)_{\text{forţat}} = U_k e^{j\omega_0 t},$$

unde U_k este de asemenea un fazor. Găsiţi expresia lui $U_k(s)$. Comparaţi-o cu expresia lui V_k de mai sus în care caz excitaţia a fost arbitrară.

P53. Un diport are următoarele relaţii hibride $V - I$:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75 & 1 \\ 1 & -10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Să se proiecteze circuitul care plasat în serie sau în paralel la porţile circuitului din fig. 3.P.53 îl transformă pe acesta într-un convertor ideal de negativare.



Fip. 3.P.53.

P54. Repetaţi problema 3.P.53 pentru cazul unui diport avînd următoarele relaţii $V - I$

(a) $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -2 \\ -2 & 2\times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 & 1 \\ 1 & 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 1 \\ 1 & -10^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$

4

Ecuaţii de stare

În capitolul 2 am dezvoltat reprezentările reţelelor electrice prin curenţi de contur, tensiuni la noduri şi variabile mixte. În cazul general, fiecare ecuaţie scalară pe contur sau la nod este o ecuaţie integrodiferenţială de ordinul doi. Pe de altă parte, fiecare ecuaţie scalară cu variabile mixte este de ordinul întîi. În afară de cazul în care se manifestă o grijă deosebită pentru selecţionarea arborilor, unele ecuaţii cu variabile mixte pot conţine integrale şi derivate ale acestor variabile.

Există unele avantaje certe, dacă descrierea reţelei se face astfel încît să rezulte ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi, fără integrale. Într-o exprimare matriceală, rezultatul este o ecuaţie diferenţială vectorială de ordinul intii, care caracterizează comportarea dinamică a reţelei. Cîteva din motivele pentru căutarea unei astfel de reprezentări a reţelei sînt următoarele:

1. Există numeroase cunoştinţe matematice referitoare la rezolvarea unor asemenea ecuaţii şi asupra proprietăţilor soluţiilor lor, care pot fi aplicate direct în acest caz.

2. Reprezentarea este extinsă uşor şi natural la reţele variabile în timp şi neliniare şi este, de fapt, metoda folosită aproape cel mai frecvent pentru caracterizarea unor asemenea reţele.

3. Ecuaţiile diferenţiale de ordinul întîi se programează uşor pentru rezolvarea pe calculator.

În acest capitol vom formula şi rezolva ecuaţiile diferenţiale vectoriale de ordinul întîi care sînt cunoscute ca *ecuaţii de stare*. Ne vom limita aici la reţele liniare, invariabile în timp, care pot fi pasive sau active, reciproce sau nereciproce. În capitolele precedente am luat în considerare numai ecuaţiile cu transformate Laplace. În acest capitol vom reveni asupra ecuaţiilor de bază cu variabile exprimate ca funcţii de timp. Aceasta poate necesita o reorientare în modul dumneavoastră de gîndire; de exem-

plu, dacă în prezentul text vom vedea că o ecuaţie este algebrică, aceasta înseamnă că în ecuaţii nu apar derivate ale variabilelor. În termenii ecuaţiilor cu transformate Laplace, aceasta ar însemna că coeficienţii sînt independenţi de variabila de frecvenţă complexă.

4.1. ORDINUL DE COMPLEXITATE AL UNEI REŢELE (CIRCUITE)

În legătură cu descrierea reţelelor (prin ecuaţii de stare) pe care o vom dezvolta în acest capitol, se vor prezenta unele noţiuni introductive. Numărul de ecuaţii independente scrise folosind legea de curent a lui Kirchhoff (LKC) şi legea de tensiune a lui Kirchhoff (LKV) într-o reţea, n şi respectiv $b - n$, este determinat numai de graful reţelei, nu şi de tipul laturilor. Acelaşi lucru este adevărat pentru numărul variabilelor independente — tensiuni la noduri (n) şi curenţi pe bucle (ochiuri) ($b - n$). Aceste numere nu sînt influenţate de tipul elementelor din laturi (rezistoare, condensatoare sau bobine). Dacă o reţea este pur rezistivă atunci ecuaţiile pe bucle sau la noduri sînt algebrice (fără nici o variaţie în timp); le vom numi ecuaţii *statice*. Dacă există capacităţi şi inductanţe, ecuaţiile vor fi *dinamice*. O problemă importantă este de a determina cîte variabile *dinamice independente* există; sau altfel spus cîte variabile există astfel ca, atunci cînd aceste variabile sînt determinate (ca o funcţie de timp), variabilele care rămîn să poată fi determinate pur algebric.

Se ştie că fiecare capacitate şi fiecare inductanţă introduce o variabilă dinamică, deoarece relaţia $v - i$ corespunzătoare fiecăreia conţine o derivată. Se ştie de asemenea că tensiunile şi curenţii iniţiali dintr-o reţea devin cunoscute, dacă sînt specificate tensiunile iniţiale la bornele capacităţilor şi curenţii iniţiali prin inductanţe. Numărul maxim de condiţii iniţiale care pot fi specificate independent este egal cu numărul de ramuri independente care înmagazinează energie (capacităţi plus inductanţe). Aceasta justifică introducerea noţiunii ordin de complexitate definită astfel:

Ordinul de complexitate al unei reţele este egal cu numărul de condiţii iniţiale independente care pot fi specificate pentru o reţea.

Acesta este de asemenea numărul de constante arbitrare care apar în soluţia generală a ecuaţiilor reţelei. El este egal cu numărul de frecvenţe naturale, luînd în calcul pentru fiecare ordinul său de multiplicitate; de exemplu, să presupunem răspunsul liber al unei reţele de forma

$$w^{f}(t) = A_1 \epsilon^{s_1 t} + (A_2 + A_{3t}) \epsilon^{s_2 t} + A_4 \epsilon^{s_3 t} + A_5 \epsilon^{s_4 t} \qquad (1)$$

Frecvența naturală s_2 este de ordinul de multiplicitate doi; rezultă că numărul total de frecvențe naturale este cinci. Acesta este de asemenea ordinul de complexitate.

Este clar că ordinul de complexitate nu poate depăși numărul de elemente care pot înmagazina energie. Presupunem totuși că există o relație restrictivă între tensiunile pe capacități sau curenții prin bobine. Aceste constrîngeri pot fi determinate de contururi care conțin numai capacități, sau numai capacități și surse de tensiune independente, și secțiuni care conțin numai inductanțe sau numai inductanțe și surse de curent independente [1]).

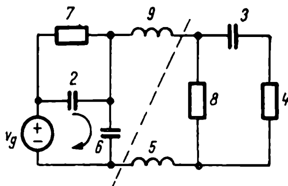


Fig. 4.1. Rețea cu un contur de capacități și o secțiune de inductanțe.

În primul caz, aplicînd LKV pe contur se obține o relație liniară între tensiunile pe capacități, și în al doilea caz, ecuația LKC pentru secțiuni ne va da o relație liniară între curenții inductanțelor. În fig. 4.1 există cinci elemente care pot înmagazina energie. Dar în această rețea există o buclă de capacități care conține două capacități și o sursă de tensiune. Există de asemenea o secțiune de inductanțe care conține două inductanțe. Rezultă că pentru tensiunile pe capacități și pentru curenții prin inductanțe vom avea următoarele relații restrictive:

$$v_2 + v_6 = v_g, \tag{2a}$$

$$i_5 + i_9 = 0 \tag{2b}$$

(cu o orientare adecvată a variabilelor). Aceasta înseamnă că valorile inițiale ale lui v_2 și v_6, și de asemenea valorile inițiale ale lui i_5 și i_9, nu pot fi prescrise independent.

Fiecare relație restrictivă reduce numărul condițiilor inițiale independente cu o unitate. Într-o rețea care are numai componente cu două terminale, ecuațiile corespunzătoare nu pot introduce relații algebrice suplimentare între tensiunile pe capacități și curenții prin inductanțe. Rezultă că:

---

[1] Pentru a evita repetiția, vom folosi termenul „contur de capacități" care înseamnă un contur numai din capacități sau numai capacități și surse de tensiune independente. În același mod vom folosi termenul „secțiune de inductanțe", ceea ce reprezintă o secțiune care conține numai inductanțe sau inductanțe și surse de curent independente.

Ordinul de complexitate al unei reţele RLC este egal cu numărul total de elemente reactive, din care se scade numărul de bucle de capacităţi independente şi numărul de secţiuni de inductanţe independente.

În reţeaua din fig. 4.1 ordinul de complexitate este $5 - 1 - 1 = 3$.

Este interesant de ştiut care este influenţa buclelor care conţin numai inductanţe sau a secţiunilor numai cu capacităţi. Considerăm, de exemplu, reţeaua din fig. 4.2, care conţine o buclă de inductanţe; KVL pe acest contur conduce la

$$L_3\frac{di_3}{dt} + L_5\frac{di_5}{dt} + L_6\frac{di_6}{dt} = \frac{d}{dt}(L_3i_3 + L_5i_5 + L_6i_6) = 0. \quad (3)$$

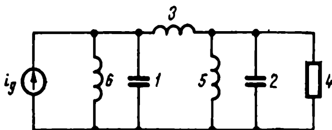


Fig. 4.2. Reţea cu un contur de inductanţe.

Integrala acestei expresii de la 0 la t conduce la

$$L_3i_3(t) + L_5i_5(t) + L_6i_6(t) = L_3i_3(0) + L_5i_5(0) + L_6i_6(0) = K, \quad (4)$$

unde $t = 0$ înseamnă de fapt $0+$. S-ar părea că aceasta reprezintă de asemenea o restricţie asupra curenţilor prin inductanţe. Dar constanta K nu este specificată. De fapt, determinarea ei necesită o relaţie independentă. Aceasta este demonstrată de *principiul conservării liniilor de flux*, care afirmă că $\sum L_j i_j$ pe orice contur închis este continuă. (Acest principiu *nu poate* fi derivat din legile lui Kirchhoff). Condiţia de continuitate impune ca valoarea liniilor de flux puţin înainte de $t = 0$ (adică la $0-$) să fie egal cu valoarea pe care o are imediat după $t = 0$ astfel:

$$K = L_3i_3(0-) + L_5i_5(0-) + L_6i_6(0-). \quad (5)$$

Valorile la $0-$ ale tuturor celor trei curenţi prin inductanţe pot fi specificate indepenent, fără a călca legile lui Kirchhoff; aceste specificaţii vor fixa valoarea la $0+$ a liniilor de flux. Tragem concluzia că o buclă de inductanţe nu reduce numărul de condiţii iniţiale care pot fi specificate independent şi astfel nu influenţează ordinul de complexitate.

O concluzie similară rezultă pentru o secţiune de capacităţi, şi anume că aceasta nu va avea nici o influenţă asupra ordinului de complexitate.

Se poate obţine o ecuaţie similară cu (5) pentru o secţiune de capacităţi cu deosebirea că termenii vor fi de forma $C_j v_j = q_j$ (sarcina). În acest caz, în locul principiului conservării fluxului se foloseşte ***principiul conservării sarcinii***, care, aplicat unei reţele, afirmă că funcţia $\sum C_j v_j = \sum q_j$ pentru orice secţiune este continuă.

Deşi secţiunile de capacităţi şi buclele de inductanţe nu influenţează *numărul* de frecvenţe naturale, ele influenţează valorile frecvenţelor naturale. În fig. 4.2, de exemplu, presupunem că $i_3(t)$ este răspunsul dorit. Este clar că un curent constant poate circula prin bucla de inductanţe. Deci unul din termenii din $i_3(t)$ poate fi o constantă, care corespunde unei frecvenţe naturale $s = 0$. Rezultă că o buclă de inductanţe conduce la o frecvenţă naturală zero. O concluzie similară rezultă pentru o secţiune de capacităţi.

Totuşi, frecvenţele naturale la $s = 0$ sînt oarecum particulare, deoarece în orice caz termenul corespunzător care apare în răspuns depinde de : (1) ce variabilă specifică constituie răspunsul şi (2) localizarea excitaţiei.

În fig. 4.2, dacă răspunsul este $v_3(t)$ şi nu $i_3(t)$, nu va apare un termen constant, deoarece $v_3 = di_3/dt$, şi prin diferenţiere constanta se va elimina. Toate celelalte frecvenţe naturale vor apare în v_3, deoarece derivata unei exponenţiale este proporţională cu acea exponenţială.

Discuţiile anterioare arată că ceea ce este interesant în unele cazuri este numărul de frecvenţe naturale *diferite de zero* şi nu numărul total de frecvenţe naturale. Acesta poate fi obţinut scăzînd din numărul total, numărul de secţiuni de capacităţi şi numărul de bucle de inductanţe. Rezultă că :

Numărul de frecvenţe naturale diferite de zero este egal cu ordinul de complexitate minus numărul de bucle independente de inductanţe şi numărul de secţiuni independente de capacităţi.

Contur de capacităţi
6,7,8,9,10,11

Secţiuni de capacităţi
5,6,7
6,8
5,7,8

Secţiuni de inductanţe
1,2,3
3,4
1,2,4

Contururi de inductanţe,
Niciunul

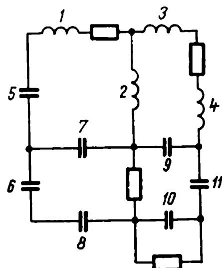


Fig. 4.3. Reţea cu multe degenerări.

Cuvîntul „independent“ atît aici, cît şi în definiţia ordinului de complexitate dat mai sus, este important. Putem justifica aceasta referindu-ne la fig. 4.3. Din trei secţiuni de inductanţe numai două sînt independente; ecuaţia LKC pentru o secţiune se poate obţine din celelalte două. Aceasta este adevărat şi pentru cele trei secţiuni de capacităţi; numai două sînt independente. Deoarece există în total 11 inductanţe şi capacităţi, şi 3 constrîngeri liniare (una pentru conturul de capacităţi şi două pentru secţiunile de inductanţe), ordinul de complexitate şi numărul de frecvenţe naturale este $11 - 3 = 8$. Din aceste frecvenţe naturale, două sînt zero, şi corespund la două secţiuni independente de capacităţi. Există deci $8 - 2 = 6$ frecvenţe naturale diferite de zero.

4.2. CONSIDERAŢII DE BAZĂ ÎN SCRIEREA ECUAŢIILOR DE STARE

Sîntem acum pregătiţi pentru a începe prezentarea ecuaţiilor de stare. Ecuaţiile de bază pe care le putem folosi sînt LKV, LKC şi relaţiile $v - i$. Dintre acestea trebuie aleasă o combinaţie particulară şi un ordin particular. Decizia de alegere se face pe baza unui număr de consideraţiuni :

1. Dorim ca ecuaţiile finale să nu conţină integrale. Integralele apar din substituţia lui $i = \int_0^t v dx/L + i(0)$ pentru un curent prin inductanţă în LKC şi substituirea lui $v = \int_0^t i dx/C + v(0)$ pentru o tensiune pe capacitate în LKV. Nu vom elimina curenţii prin inductanţe şi tensiunile pe capacităţi şi le vom menţine ca variabile.

2. Dorim ca ecuaţiile finale să fie ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi. Derivatele apar din substituirea $v = L di/dt$ pentru tensiunea pe inductanţe în LKV şi $i = C dv/dt$ pentru curentul prin capacitate în LKC. Vom face aceste substituiri, eliminînd astfel curenţii prin capacităţi şi tensiunile pe inductanţe din setul final de variabile.

3. Din cele două variabile referitoare la capacitate, tensiune şi curent, tensiunea este aceea a cărei valoare iniţială poate fi specificată independent într-o reţea — *cu excepţia cazului în care există o buclă de capacităţi*, aşa cum s-a discutat în ultimul paragraf. În mod asemănător, pentru inductanţe, curenţii iniţiali pot fi specificaţi independent — *cu excepţia cazului în care există o secţiune de inductanţe.* Acesta este un motiv în plus pentru a reţine tensiunile pe capacităţi şi curenţii prin inductanţe ca variabile.

4. Toate consideraţiile de mai sus sînt netopologice; ele nu consideră modul de selectare al unui arbore şi ce tipuri de laturi sînt ramuri sau

coarde. Din punct de vedere topologic, se ştie că tensiunile pe ramuri determină toate celelalte tensiuni. Deoarece dorim să avem tensiunile pe capacităţi printre variabilele finale, vom plasa pe cît posibil capacităţile într-un arbore. În mod asemănător, curenţii coardelor constituie o bază pentru toţi curenţii. Deoarece dorim să avem curenţii prin inductanţe ca variabile finale, plasăm inductanţele, pe cît posibil în coarbore.

5. Pînă acum nu am luat în considerare sursele independente ca laturi separate, dar am presupus că ele există totdeauna; le-am inclus însă în laturi existente. Convenţional, revenim asupra acestei proceduri şi vom considera sursele independente ca laturi separate. Deoarece tensiunea unei surse de tensiune este o „cunoscută“, ea nu poate fi determinată din alte tensiuni. Rezultă că o sursă de tensiune nu poate fi o coardă, deoarece atunci tensiunea ei ar fi stabilită în termenii tensiunilor ramurilor. În mod similar, o sursă de curent nu poate fi o ramură, deoarece curentul său nu poate fi stabilit în termenii curenţilor coardelor. Într-o reţea care are o buclă conţinînd numai surse de tensiune independente, una din surse va fi considerată ca o coardă. Aceste surse nu pot fi cu adevărat independente, deoarece tensiunile lor trebuie să satisfacă LKV pe contur. Dacă LKV este respectată, atunci una din surse poate fi o coardă, şi tensiunea ei va fi determinată de alte surse. Consideraţii similare se fac pentru o secţiune care conţine numai surse de curent independente. Presupunem, deci, că reţelele nu au bucle numai cu surse de tensiune independente şi nici secţiuni numai cu surse de curent independente.

Consideraţiile de mai sus ne conduc la următorul mod de abordare a problemei. Definim un *arbore normal* un arbore care are ca ramuri toate sursele de tensiune independente, numărul maxim posibil de capacităţi, numărul minim posibil de inductanţe şi nici o sursă de curent independentă. (Dacă reţeaua nu este conectată, termenul corespunzător este *„arborescenţă normală“*). Pentru simplicitate, ne vom referi mai tîrziu la un arbore normal, revenind uneori la folosirea „arborescenţei normale“ pentru accentuare). Dacă nu există bucle de capacităţi, toate capacităţile vor fi ramuri ale arborelui normal. De asemenea dacă nu există secţiuni de inductanţe, nici o inductanţă nu va fi ramură în arborele normal; ele vor fi toate coarde. Aceasta poate fi demonstrată prin metoda reducerii la absurd. Presupunem că există o coardă de capacitate în absenţa unei bucle de capacităţi. Ambele noduri terminale ale coardei de capacitate cad în arborele normal corespunzător. Dacă această coardă este adăugată la arbore, ea va forma o buclă care, prin ipoteză, nu este o buclă de capacităţi. Dacă din această buclă îndepărtăm o latură necapacitivă, rezultatul va fi un nou arbore care va avea o capacitate mai mult decît precedentul. Această situaţie nu este posibilă, deoarece arborele normal precedent avea prin definiţie numărul maxim de capacităţi. O demonstraţie similară se aplică pentru inductanţe.

Dîndu-se o reţea, selectăm un arbore normal (sau o arborescenţă normală dacă reţeaua nu este conectată). Scriem apoi ecuaţiile LKV pentru buclele *f* şi ecuaţiile LKC pentru secţiunile *f* ale acestui arbore. Folosim relaţiile $v - i$ pe laturi pentru a elimina curenţii prin capacităţi şi tensiunile pe inductanţe, dar rămîne încă în discuţie modul de abordare al variabilelor elementelor rezistive adică, sursele controlate, giratorii şi rezistenţele. Înainte de a trata această problemă în cazul general, să discutăm cîteva exemple cu ajutorul cărora putem stabili concluzii generale.

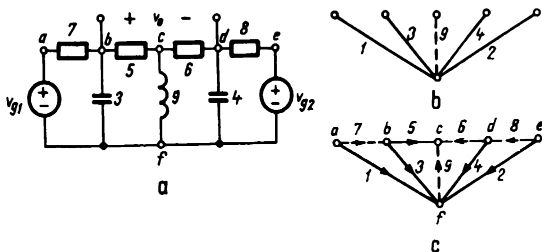


Fig. 4.4. Exemplu ilustrativ pentru scrierea ecuaţiilor de stare.

Considerăm reţeaua din fig. 4.4, *a*. Este de dorit să găsim tensiunea la ieşire $v_0(t)$ cînd se aplică la intrări tensiunile $v_{g_1}(t)$ şi $v_{g_2}(t)$. Există trei elemente reactive şi nici o degenerare. Ordinul de complexitate este deci 3. Există şase noduri şi nouă laturi. (Amintim că cele două surse de tensiune sînt considerate ca laturi separate). Un arbore normal trebuie să conţină ambele surse de tensiune şi ambele capacităţi, nu însă şi inductanţa. Acesta este prezentat în fig. 4.4, *b* unde prin linie plină este arătată o parte a arborelui normal şi linia punctată reprezintă coarda inductanţei.

Este necesară încă o ramură, care trebuie să conecteze nodul *c* la rezistenţă. Este clar că există două posibilităţi care includ laturile rezistive — latura *5* sau *6*. Am ales latura *5* pentru completarea arborelui, aşa cum este arătat în fig. 4.4, *c*. Menţionăm că am numerotat cu primele numere ramurile şi în continuare coardele.

Să scriem ecuaţiile LKC pentru secţiunile *f* şi ecuaţiile LKV pentru buclele *f*. Cu o descompunere obişnuită a elementelor matricei putem scrie :

$$\mathbf{Q}_t \mathbf{i} = [\mathbf{U}\ \mathbf{Q}_l] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_t \\ \mathbf{i}_l \end{bmatrix} = \mathbf{i}_t + \mathbf{Q}_l \mathbf{i}_l = 0, \tag{6a}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = [\mathbf{B}_t\ \mathbf{U}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_t \\ \mathbf{v}_l \end{bmatrix} = \mathbf{B}_t \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_l = \mathbf{0} \tag{6b}$$

sau:

$$\mathbf{i}_t = -\mathbf{Q}_l \mathbf{i}_l, \quad (7a)$$

$$\mathbf{v}_l = -\mathbf{B}_t \mathbf{v}_t. \quad (7b)$$

Menţionăm că deoarece sursele sînt considerate ca laturi separate, părţile din dreapta în (6) sînt **0** şi nu $\mathbf{Qi}_g$ sau $\mathbf{Bv}_g$, aşa cum le utilizasem în scriere. În formă scalară, (7) conduce la următoarele relaţii:

$$i_1 = -i_7 \quad (8a)$$

$$i_2 = -i_8 \quad (8b)$$

$$i_3 = i_6 + i_7 + i_9 \quad (8c)$$

$$i_4 = -i_6 + i_8 \quad (8d)$$

$$i_5 = -i_6 - i_9 \quad (8e)$$

$$v_6 = -v_3 + v_4 + v_5 \quad (8f)$$

$$v_7 = v_1 - v_3 \quad (8g)$$

$$v_8 = v_2 - v_4 \quad (8h)$$

$$v_9 = -v_3 + v_5 \quad (8i)$$

Rămîn de scris relaţiile $v - i$ corespunzătoare componentelor. Presupunem că reţeaua este alimentată la momentul $t = t_0$. Tensiunile surselor v_{g_1} şi v_{g_2} sînt date pentru $t \geqslant t_0$. Sînt date de asemenea curentul iniţial prin inductanţă şi tensiunile iniţiale pe capacităţi; acestea sînt $v_3(t_0)$, $v_4(t_0)$ şi $i_9(t_0)$. Relaţiile $v - i$ ale surselor şi elementelor reactive sînt:

$$v_1 = v_{g1}(t), \quad (9a)$$

$$v_2 = v_{g2}(t), \quad (9b)$$

$$i_3 = C_3 \frac{dv_3}{dt}; \quad (9c)$$

$$i_4 = C_4 \frac{dv_4}{dt}; \quad (9d)$$

$$v_9 = L_9 \frac{di_9}{dt}. \quad (9e)$$

Ecuaţiile scrise pentru rezistenţe sînt de forma $v = Ri$ sau $i = Gv$, dar încă nu am stabilit cum vor fi ele scrise. Din discuţiile anterioare, ştim că dorim să eliminăm curenţii prin capacităţi şi tensiunile pe inductanţe. Vom substitui i_3, i_4 şi v_9 din ultimele trei ecuaţii în ecuaţiile LKC şi LKV corespunzătoare din (8). Aceasta ne conduce la

$$C_3 \frac{dv_3}{dt} = i_6 + i_7 + i_9, \tag{10a}$$

$$C_4 \frac{dv_4}{dt} = - i_6 + i_8, \tag{10b}$$

$$L_9 \frac{di_9}{dt} = - v_3 + v_5. \tag{10c}$$

Există două tipuri de variabile în părţile drepte ale ecuaţiilor: (1) tensiuni pe capacităţi şi curenţi prin inductanţe (v_3 şi i_9) pe care dorim să le menţinem; şi (2) curenţi şi tensiuni corespunzătoare rezistenţelor. Există patru variabile de acest fel, şi anume: v_5, i_6, i_7 şi i_8. Menţionăm că nici una din acestea nu apare în partea stîngă a ecuaţiilor Kirchhoff din (8), spre deosebire de variabilele complementare acestora, care apar. Pentru a exprima aceste variabile complementare în funcţie de unele dorite, putem folosi relaţiile $v - i$ corespunzătoare (9) în (8). Avem acum un ghid pentru scrierea într-o formă convenabilă a acestor relaţii. Acestea sînt:

$$i_5 = G_5 v_5, \tag{11a}$$

$$v_6 = R_6 i_6, \tag{11b}$$

$$v_7 = R_7 i_7, \tag{11c}$$

$$v_8 = R_8 i_8. \tag{11d}$$

Astfel, pentru coarde folosim forma $v = Ri$; şi pentru ramuri $i = Gv$. Dacă folosim aceste relaţii în cele patru ecuaţii corespunzătoare din (8), rezultatul poate fi rescris în următoarea formă:

$$G_5 v_5 + i_6 = - i_9 \tag{12a}$$

$$- v_5 + R_6 i_6 = - v_3 + v_4 \tag{12b}$$

$$R_7 i_7 = v_1 - v_3 \tag{12c}$$

$$R_8 i_8 = v_2 - v_4. \tag{12d}$$

Acestea sînt ecuaţii algebrice pure care exprimă tensiunile şi curenţii pe rezistenţe în următorii termeni: (1) tensiunile surselor, (2) tensiunile pe capacităţi şi (3) curenţii prin inductanţe. Aceste ecuaţii algebrice pot fi uşor rezolvate şi se obţine:

$$v_5 = \frac{1}{1+G_5R_6}v_3 - \frac{1}{1+G_5R_6}v_4 - \frac{R_6}{1+G_5R_6}i_9 \qquad (13a)$$

$$i_6 = -\frac{G_5}{1+G_5R_6}v_3 + \frac{G_5}{1+G_5R_6}v_4 - \frac{1}{1+G_5R_6}i_9 \qquad (13b)$$

$$i_7 = G_7v_1 - G_7v_3 \qquad (13c)$$

$$i_8 = G_8v_2 - G_8v_4 \qquad (13d)$$

În final, aceste ecuaţii pot fi substituite în (10) şi, după o rearanjare a lor, se obţine:

$$C_3\frac{dv_3}{dt} = -\left(G_7 + \frac{G_5}{1+G_5R_6}\right)v_3 + \frac{G_5}{1+G_5R_6}v_4 + \frac{G_5R_6}{1+G_5R_6}i_9 - G_7v_{g1}, \qquad (14a)$$

$$C_4\frac{dv_4}{dt} = \left(\frac{G_5}{1+G_5R_6}\right)v_3 - \left(G_8 + \frac{G_5}{1+G_5R_6}\right)v_4 + \frac{1}{1+G_5R_6}i_9 + G_8v_{g2}, \qquad (14b)$$

$$L_9\frac{di_9}{dt} = \frac{-G_5R_6}{1+G_5R_6}v_3 - \frac{1}{1+G_5R_6}v_4 - \frac{R_6}{1+G_5R_6}i_9. \qquad (14c)$$

Acesta este un set de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi. Să-l scriem în formă matriceală. După împărţirea prin coeficienţii din stînga, rezultatul va fi:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \\ i_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{G_7}{C_3} + \frac{G_5/C_3}{1+G_5R_6}\right) & \frac{G_5/C_3}{1+G_5R_6} & \frac{G_5R_6/C_3}{1+G_5R_6} \\ \frac{G_5/C_4}{1+G_5R_6} & -\left(\frac{G_8}{C_4} + \frac{G_5/C_4}{1+G_5R_6}\right) & \frac{1/C_4}{1+G_5R_6} \\ -\frac{G_5R_6/L_9}{1+G_5R_6} & -\frac{1/L_9}{1+G_5R_6} & -\frac{R_6/L_9}{1+G_5R_6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \\ i_9 \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} -\frac{G_7}{C_3} & 0 \\ 0 & \frac{G_8}{C_4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{g1} \\ v_{g2} \end{bmatrix}. \qquad (15)$$

Aceasta este ecuaţia pe care urmăream să o obţinem. Ea este ecuaţie diferenţială matriceală de ordinul întîi. Este folosită următoarea terminologie:

Vector de stare *Vector de intrare*

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} v_3(t) \\ v_4(t) \\ i_9(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} v_{g1}(t) \\ v_{g2}(t) \end{bmatrix}$$

Elementele vectorului de stare sînt *variabile de stare*. Ne referim la ecuaţia matriceală ca la o *ecuaţie de stare*. Ecuaţia (15) poate fi scrisă condensat în notaţia matriceală astfel:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{e}, \tag{16}$$

unde semnificaţiile matricelor $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ sînt evidente. Aceasta este numită *forma normală* a ecuaţiei de stare. Derivata vectorului de stare este dată ca o combinaţie liniară a vectorului de stare şi a vectorului de intrare sau de excitaţie (Litera „e'' provine de la excitaţie).

Cantităţile de ieşire dorite pot fi variabile de stare sau orice alte variabile din reţea. În cazul nostru ne-am propus ca ieşirea să fie $v_0(t)$ Din reţea se constată că $v_0 = v_3 - v_4$, care poate fi scris în formă matriceală astfel:

$$v_0 = [1 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \\ i_9 \end{bmatrix}$$

sau mai condensat:

$$\mathbf{w}(t) = \mathcal{C}\mathbf{x}, \tag{17}$$

unde $\mathbf{w}$ este *vectorul de ieşire*.

Următoarea etapă va fi să rezolvăm ecuaţiile de stare, problemă care va ocupa o parte importantă în acest capitol. Înainte de aceasta să considerăm un alt exemplu, care va introduce unele aspecte pe care nu le-am întîlnit în ultimul exemplu.

Reţeaua pentru acest exemplu este reprezentată în fig. 4.5. Ea are o buclă de capacităţi (capacităţi şi surse de tensiune). Un arbore normal trebuie să conţină ambele surse de tensiune, dar este clar că nu poate include toate cele trei capacităţi. Am ales arborele care conţine capacităţile 3 şi 4. Arborele normal poate fi completat de oricare din cele trei rezistenţe; am ales aici rezistenţa numărul 5.

Etapa următoare este scrierea ecuaţiilor KCL pentru secţiunile f şi ecuaţiile LKV pentru buclele f în forma lui (7). Rezultă:

$$i_1 = -i_6 - i_7, \tag{18a}$$
$$i_2 = i_6 - i_8, \tag{18b}$$
$$i_3 = i_6 + i_7, \tag{18c}$$
$$i_4 = -i_6 + i_8, \tag{18d}$$
$$i_5 = -i_7 - i_8, \tag{18e}$$
$$v_6 = v_1 - v_2 - v_3 + v_4, \tag{18f}$$
$$v_7 = v_1 - v_3 + v_5, \tag{18g}$$
$$v_8 = v_2 - v_4 + v_5, \tag{18h}$$

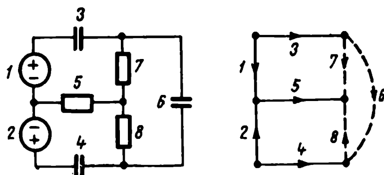


Fig. 4.5. Exemplu ilustrativ de circuit cu contur de capacităţi pentru scrierea ecuaţiilor de stare.

Urmînd raţionamentul din exemplul anterior, vom scrie în continuare ecuaţiile $v - i$ pentru toate capacităţile (singurele elemente reactive în acest caz) astfel încît să putem elimina curenţii în capacităţi din (18) şi să reţinem numai tensiunile pe capacităţi. Dar, din cauza buclelor de capacităţi, nu toate aceste tensiuni sînt independente dinamic. Vom scrie ecuaţiile $v - i$ numai pentru acele capacităţi care sînt în arborele normal. Astfel:

$$i_3 = C_3 \frac{dv_3}{dt}, \tag{19a}$$

$$i_4 = C_4 \frac{dv_4}{dt}, \tag{19b}$$

Introducem acum aceste relaţii în ecuaţiile LKC corespunzătoare din (18) şi obţinem:

$$C_3 \frac{dv_3}{dt} = i_6 + i_7, \tag{20a}$$

$$C_4 \frac{dv_4}{dt} = -i_6 + i_8. \tag{20b}$$

Cele trei variabile din părţile drepte, curentul prin coarda capacităţii i_6 şi curenţii prin coardele rezistenţelor i_7 şi i_8 sînt tratate separat. Ecuaţia LKV pentru v_6 din (18f) este folosită în ecuaţia $v - i$ pentru i_6, ceea ce conduce la:

$$i_6 = C_6 \frac{dv_6}{dt} = C_6 \frac{dv_1}{dt} - C_6 \frac{dv_2}{dt} - C_6 \frac{dv_3}{dt} + C_6 \frac{dv_4}{dt}, \tag{21}$$

care exprimă pe i_6 numai în termenii variabilelor dorite. Rămîn de eliminat din (20) variabilele i_7 şi i_8. Acestea nu apar rezolvate explicit în relaţiile (18). Scriem din nou relaţiile $v - i$ pentru coardele de rezistenţe: $v = Ri$ şi pentru ramură (latura 5): $i = Gv$. Ecuaţiile corespunzătoare din (18) pot fi scrise astfel:

$$G_5 v_5 + i_7 + i_8 = 0 \tag{22a}$$

$$-v_5 + R_7 i_7 = v_1 - v_3 \tag{22b}$$

$$-v_5 + R_8 i_8 = v_2 - v_4 \tag{22c}$$

Acesta este un sistem simplu de ecuaţii algebrice care rezolvat conduce la:

$$v_5 = -\frac{1}{K} v_1 - \frac{R_7 G_8}{K} v_2 + \frac{1}{K} v_3 + \frac{R_7 G_8}{K} v_4, \tag{23a}$$

$$i_7 = \frac{(G_5 + G_8)}{K} v_1 - \frac{G_8}{K} v_2 - \frac{(G_5 + G_8)}{K} v_3 + \frac{G_8}{K} v_4, \tag{23b}$$

$$i_8 = -\frac{G_8}{K} v_1 + G_8 \frac{(1 + G_5 R_7)}{K} v_2 + \frac{G_8}{K} v_3 - G_8 \frac{(1 + G_5 R_7)}{K} v_4, \tag{23c}$$

unde $K = 1 + R_7(G_5 + G_8)$. Ultimele două ecuaţii împreună cu (21), introduse în (20), vor permite eliminarea variabilelor nedorite. După rearanjare, rezultatul în forma matriceală devine:

$$\begin{bmatrix} C_3 + C_6 & -C_6 \\ -C_6 & C_4 + C_6 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(G_5 + G_8)}{K} & \frac{+G_8}{K} \\ \frac{G_8}{K} & -G_8 \frac{(1 + G_5 R_7)}{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \frac{(G_5 + G_8)}{K} & -\frac{G_8}{K} \\ -\frac{G_8}{K} & G_8 \frac{(1 + G_5 R_7)}{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{g1} \\ v_{g2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_6 & -C_6 \\ -C_6 & -C_6 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_{g1} \\ v_{g2} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Rezultatul final este obţinut prin premultiplicarea cu inversa matricei coeficienţilor din stînga. S-a obţinut de asemenea o ecuaţie diferenţială matriceală de ordinul întîi, dar de data aceasta partea dreaptă conţine un termen cu derivata vectorului de intrare, pe lîngă vectorul de intrare.

Pentru un calcul final, presupunem că ieşirile sînt $-i_1$ şi i_2. Aceştia pot fi exprimaţi în termenii curenţilor coardelor i_6, i_7 şi i_8 cu ajutorul ecuaţiilor (18*a*) şi (18*b*). Aceşti curenţi sînt eliminaţi, în final, folosind (21) şi (23). Rezultatul acestor calcule concretizat în ecuaţia la ieşire şi exprimat în forma matriceală va fi:

$$\begin{bmatrix} -i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{(G_5+G_8)}{K} & \dfrac{G_8}{K} \\[2ex] -\dfrac{G_8}{K} & \dfrac{G_8(1+G_5R_7)}{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C_6 & C_6 \\ -C_6 & C_6 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \dfrac{(G_5+G_8)}{K} & -\dfrac{G_8}{K} \\[2ex] \dfrac{G_8}{K} & \dfrac{-G_8(1+G_5R_7)}{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{g1} \\ v_{g2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_6 & -C_6 \\ C_6 & -C_6 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_{g1} \\ v_{g2} \end{bmatrix}. \qquad (25)$$

Derivata lui:

$$\begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

poate fi eliminată folosind (24). Rezultatul algebric detaliat este complicat şi nu este dat aici. Totuşi, este clar că termenii prezentaţi în partea dreaptă a ecuaţiei de ieşire vor fi aceeaşi cu cei prezenţi în partea dreaptă a lui (24).

Ecuaţiile (24) şi (25) pot fi scrise condensat astfel:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}_1\mathbf{e} + \mathcal{B}_2\frac{d\mathbf{e}}{dt}, \qquad (26a)$$

$$\mathbf{w} = \mathcal{C}\mathbf{x} + \mathcal{D}_1\mathbf{e} + \mathcal{D}_2\frac{d\mathbf{e}}{dt}. \qquad (26b)$$

Prima din acestea, este o ecuaţie diferenţială. Odată ce este rezolvată, variabilele de ieşire sînt determinate algebric din a doua. Din punct de vedere al terminologiei aceste două ecuaţii împreună se numesc *ecuaţii de stare*. A doua ecuaţie este numită *ecuaţie de ieşire*. Ne vom ocupa în continuare de rezolvarea acestor ecuaţii.

4.3. REZOLVAREA ÎN DOMENIUL TIMP A ECUAŢIILOR DE STARE

În exemplele din ultimul paragraf am găsit că variabilele de intrare şi de ieşire sînt legate prin ecuaţii de tipul (26). Vom stabili în paragrafele următoare că rezultă astfel de ecuaţii pentru toate reţelele de tipul celor considerate. Se observă că o formă ceva mai simplă se obţine punînd:

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathcal{B}_2\mathbf{e} \tag{27}$$

în (26), care devine:

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \mathcal{A}\bar{\mathbf{x}} + (\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2)\mathbf{e},$$

$$\mathbf{w} = \mathcal{C}\bar{\mathbf{x}} + (\mathcal{D}_1 + \mathcal{C}\mathcal{B}_2)\mathbf{e} + \mathcal{D}_2\frac{d\mathbf{e}}{dt}.$$

Derivata excitaţiei a fost eliminată în prima ecuaţie, dar nu şi în a doua. Pentru simplicitate vom elimina bara şi vom scrie $\mathbf{x}$ în loc de $\bar{\mathbf{x}}$. Mai mult, vom înlocui $\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$ cu $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}_1 + \mathcal{C}\mathcal{B}_2$ cu $\mathcal{D}$, şi $\mathcal{D}_2$ cu $\hat{\mathcal{D}}$. Ecuaţiile pe care le vom trata, vor avea forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{e}, \tag{28a}$$

$$\mathbf{w} = \mathcal{C}\mathbf{x} + \mathcal{D}\mathbf{e} + \hat{\mathcal{D}}\frac{d\mathbf{e}}{dt}. \tag{28b}$$

Dacă prima din aceste ecuaţii care rezultă dintr-o reţea, nu este iniţial în această formă (deoarece ea conţine un termen care implică derivata lui $\mathbf{e}$), transformarea din (27) o va pune în această formă. Chiar cu această transformare, totuşi, se vede că derivata lui $\mathbf{e}$ va fi prezentă în ecuaţia de ieşire afară de cazul cînd $\hat{\mathcal{D}} = 0$. Dacă această condiţie este sau nu adevărată, aceasta depinde de reţeaua dată şi de variabilele considerate ca ieşiri.

Vectorul $\mathbf{x}$ este presupus a fi un vector cu n componente. Numărul de componente în $\mathbf{e}$ va fi în general diferit de n. Astfel, $\mathcal{A}$ este o matrice patrată, dar $\mathcal{B}$ nu este în general patrată.

Ne îndreptăm acum atenţia asupra rezolvării lui (28) pentru $\mathbf{x}(t)$, presupunînd că valorile iniţiale sînt exprimate prin vectorul $\mathbf{x}(t_0)$. În acest scop vom folosi metoda *variaţiei parametrului*. Fie

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{x}_1(t) \tag{29}$$

în care $\mathbf{Y}(t)$ este o matrice patrată de ordinul n care este presupusă a fi nesingulară pentru orice $t \geqslant t_0$ [1]. Introducem această transformare în (28). Rezultatul, după o aranjare convenabilă a termenilor, va fi:

$$\left(\frac{d\mathbf{Y}}{dt} - \mathcal{A}\mathbf{Y}\right)\mathbf{x}_1 = -\mathbf{Y}\frac{d\mathbf{x}_1}{dt} + \mathcal{B}\mathbf{e}. \tag{30}$$

Este clar că rezolvarea este simplificată dacă cantitatea din paranteză este presupusă a fi zero. Aceasta va conduce la o ecuaţie diferenţială matriceală omogenă pentru $\mathbf{Y}$. După ce rezolvăm această ecuaţie, $\mathbf{Y}$ poate fi introdus în partea dreaptă a lui (30). Rezultatul poate fi integrat direct pentru a găsi pe $\mathbf{x}_1$. După ce am găsit $\mathbf{Y}$ şi $\mathbf{x}_1$, se determină $\mathbf{x}$ din (29).

Procedînd în acest fel, se obţin două ecuaţii care rezultă din (30) prin egalarea cu zero a cantităţilor din paranteze.

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} - \mathcal{A}\mathbf{Y}(t) = 0, \tag{31}$$

$$\frac{d\mathbf{x}_1(t)}{dt} = \mathbf{Y}(t)^{-1}\mathcal{B}\mathbf{e}(t). \tag{32}$$

A doua ecuaţie se obţine prin premultiplicarea prin inversa lui $\mathbf{Y}$, care există, deoarece $\mathbf{Y}$ a fost presupus a fi nesingular. Vom amîna temporar rezolvarea primei ecuaţii şi presupunem că a fost obţinută o soluţie. A doua ecuaţie poate fi rezolvată separînd pe $\mathbf{x}_1$ prin integrarea directă de la t_0 la t. Rezultatul va fi

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}(\tau)^{-1}\mathcal{B}\mathbf{e}(\tau)\, d\tau. \tag{33}$$

---

[1] Expunerea în acest capitol este extravagantă în folosirea simbolurilor. Necesitatea depăşeşte mult disponibilităţile. Aceasta ne obligă să folosim un simbol într-un context, cînd el are de fapt o semnificaţie bine definită în altă parte. Astfel, obişnuit prin $\mathbf{Y}$ se înţelege o matrice de admitanţe. Sperăm că folosirea lui aici cu o semnificaţie diferită, nu va conduce la confuzii.

Matricele valorilor inițiale sînt legate prin relația:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{Y}(t_0)\mathbf{x}_1(t_0) \tag{34}$$

Rezultă că condiția inițială pentru (33) este $\mathbf{x}_1(t_0) = \mathbf{Y}(t_0)^{-1}\,\mathbf{x}(t_0)$.

Premultiplicăm acum ambele părți din (33) prin $\mathbf{Y}(t)$. Deoarece integrarea este făcută în raport cu τ, $\mathbf{Y}(t)$ poate fi introdusă sub semnul integralei. Mai mult, deoarece $\mathbf{x}_1(t_0) = \mathbf{Y}(t_0)^{-1}\mathbf{x}(t_0)$, rezultatul va fi:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(t_0)^{-1}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(\tau)^{-1}\mathcal{B}\mathbf{e}(\tau)\,d\tau. \tag{35}$$

Acesta este un rezultat foarte semnificativ din care decurge că pentru rezolvarea lui (28), rezolvăm mai întîi (31), cu o condiție inițială nesingulară, de felul $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{U}$. Calculăm apoi integrala indicată în (35). Totuși, integrantul necesită găsirea în primul rînd a inversei lui $\mathbf{Y}$, care este de fapt o problemă complicată.

Această dificultate poate fi evitată, deoarece $\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(\tau)^{-1}$ este o funcție matriceală de $(t - \tau)$, care așa cum se va vedea curînd, poate fi ușor determinată. Exprimăm simbolic această relație astfel:

$$\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(\tau)^{-1} = \mathbf{\Phi}(t - \tau) \tag{36}$$

Cînd introducem aceasta în (35), rezultatul devine:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t - \tau)\mathcal{B}\mathbf{e}(\tau)\,d\tau. \tag{37}$$

Matricea $\mathbf{\Phi}$ este numită *matricea de tranziție a stărilor*. Numele provine de la aceea că atunci cînd $\mathbf{e} \equiv 0$, tranziția de la „starea" rețelei la momentul t_0, la „starea" la momentul t este caracterizată prin $\mathbf{\Phi}$, așa cum se arată în (37).

Ecuația (37) constituie soluția în domeniul timp a ecuației diferențiale neomogene inițiale din (28). Înainte de rezolvarea completă, este necesar să rezolvăm ecuația omogenă (31).

Rezolvarea ecuației omogene

Considerăm o ecuație diferențială omogenă de ordinul întîi:

$$\frac{dy}{dt} - ay = 0$$

unde a este o constantă şi condiţia iniţială este $y(t_0) = 1$. Soluţia care satisface condiţia iniţială este

$$y(t) = \varepsilon^{\mathcal{A}(t-t_0)},$$

care poate fi verificată prin substituţie directă în ecuaţie. Deoarece forma ecuaţiei matriceale (31) este identică cu aceea a ecuaţiei scalare, este indicat să căutăm o soluţie exponenţială:

$$Y(t) = \varepsilon^{\mathcal{A}(t-t_0)}. \tag{38}$$

Dificultatea este că nu ştim ce semnificaţie are o exponenţială cu o matrice la exponent. O dificultate asemănătoare a fost întîlnită în definirea unei exponenţiale cu un exponent număr complex. Putem defini o exponenţială complexă în termenii dezvoltării în serie de exponenţiale reale. (A se vedea Anexa 2). Vom face acelaşi lucru aici şi definim:

$$\varepsilon^{\mathcal{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}^k t^k}{k!} = U + \mathcal{A}t + \frac{\mathcal{A}^2 t^2}{2!} + \ldots + \frac{\mathcal{A}^k t^k}{k!} + \ldots \tag{39}$$

Deoarece $\mathcal{A}$ este o matrice patrată de ordinul n, $\varepsilon^{\mathcal{A}t}$ este de asemenea o matrice patrată de ordinul n.

Presupunem ca exemplu:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}^2 = \mathcal{A}\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}.$$

Atunci:

$$\varepsilon^{\mathcal{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & -8 \end{bmatrix} \frac{t^3}{6} + \ldots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - t + \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^3}{6} + \ldots & 0 \\ t - \dfrac{3t^2}{2} + \dfrac{7t^3}{6} + \ldots & 1 - 2t + 2t^2 - \dfrac{4t^3}{3} + \ldots \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Se poate arăta că fiecare din elementele matricei $\varepsilon^{\mathcal{A}t}$ converge absolut către o funcţie continuă de t, pentru orice t finit şi uniform, pentru

orice interval finit de timp. Deci, diferenţierea termen cu termen a seriei este permisă. Astfel:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\varepsilon^{\mathcal{A}t}) &= \mathcal{A} + \mathcal{A}^2 t + \frac{\mathcal{A}^3 t^2}{2!} + \frac{\mathcal{A}^4 t^3}{3!} + \ldots \\ &= \mathcal{A}\left(\mathbf{U} + \mathcal{A}t + \frac{\mathcal{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathcal{A}^3 t^3}{3!} + \ldots\right) = \mathcal{A}\,\varepsilon^{\mathcal{A}t};\end{aligned} \tag{41}$$

adică, formula pentru derivarea unei exponenţiale matriceale este aceeaşi ca pentru o exponenţială scalară. Folosind acest rezultat se găseşte că $\mathbf{Y}(t) = \varepsilon^{\mathcal{A}(t-t_0)}$ dat în (38) este soluţia (unică) care satisface (31) şi condiţia iniţială $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{U}$.

Reamintim, că pentru obţinerea lui (32) s-a presupus că $\mathbf{Y}(t)$ este nesingular pentru orice timp finit după t_0. Trebuie să arătăm acum că $\mathbf{Y}(t)$ este de fapt nesingular. Acest lucru nu este dificil. Din definiţia unei exponenţiale matriceale, dată ca o serie, putem scrie:

$$\varepsilon^{-\mathcal{A}t} = \mathbf{U} - \mathcal{A}t + \mathcal{A}^2\frac{t^2}{2!} - \cdots + (-1)^k \mathcal{A}^k \frac{t^k}{k!} + \cdots. \tag{42}$$

Să multiplicăm acum această serie cu seria exponenţialei pozitive din (39). Rezultatul va fi:

$$\varepsilon^{\mathcal{A}t}\varepsilon^{-\mathcal{A}t} = \mathbf{U}. \tag{43}$$

Toţi ceilalţi termeni se anulează. Această multiplicare termen cu termen este permisă datorită convergenţei absolute a celor două serii pentru orice t finit. Rezultatul ne spune că am găsit o matrice ($\varepsilon^{-\mathcal{A}t}$), care, atunci cînd este multiplicată de $\varepsilon^{\mathcal{A}t}$, conduce la o matrice unitate. Prin definiţie ea este inversa lui $\varepsilon^{\mathcal{A}t}$. Rezultă că $\mathbf{Y}(t)$ este nesingular pentru $t \geqslant t_0$.

Este necesar să dăm o expresie explicită pentru matricea de tranziţie a stărilor $\boldsymbol{\Phi}(t-\tau) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(\tau)^{-1}$. Ştim că $\mathbf{Y}(t) = \varepsilon^{\mathcal{A}(t-t_0)}$ şi $\mathbf{Y}(\tau)^{-1} = \varepsilon^{-\mathcal{A}(\tau-t_0)}$; deci

$$\boldsymbol{\Phi}(t-\tau) = \varepsilon^{\mathcal{A}(t-\tau)} \tag{44}$$

şi este, ca şi $\mathbf{Y}(t)$, o matrice exponenţială la care diferă numai variabila de timp scalară. Această relaţie poate fi acum introdusă în (37) şi se obţine:

$$\mathbf{x}(t) = \varepsilon^{\mathcal{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varepsilon^{\mathcal{A}(t-\tau)}\mathcal{B}\mathbf{e}(\tau)\,d\tau. \tag{45}$$

Soluţia este acum completă. Pornind de la o ecuaţie diferenţială vectorială de forma (28), rezolvăm iniţial ecuaţia omogenă (31) impunînd condiţia iniţială $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{U}$. Soluţia este $\varepsilon^{\mathcal{A}(t-t_0)}$. Introducem rezultatul in (45), înlocuim pe t_0 cu τ sub integrală şi calculăm integrala.

O altă metodă de rezolvare

Am tratat rezolvarea ecuaţiilor de stare în cazul general. Într-o situaţie particulară, presupunem că nu există excitaţii ($\mathbf{e} \equiv 0$) sau pentru o reţea dată $\mathcal{B} \equiv 0$. Atunci ecuaţia de stare se reduce la ecuaţia omogenă :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}. \tag{46}$$

Comparînd-o cu (31) se constată că ele au aceeaşi formă. Există totuşi o diferenţă : în timp ce $\mathbf{Y}$ (sau, în mod echivalent, matricea de tranziţie a stărilor Φ) este o matrice patrată, în prezenta ecuaţie, $\mathbf{x}$ este un vector coloană. Printre altele, aceasta înseamnă că valoarea iniţială în acest caz nu poate fi o matrice unitate dar trebuie să fie reprezentată prin vectorul valorilor iniţiale $\mathbf{x}(t_0)$.

Considerînd soluţia generală din (45), soluţia lui (46) poate fi scrisă astfel :

$$\mathbf{x}(t) = \varepsilon^{\mathcal{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0). \tag{47}$$

Aceasta este desigur mult mai simplă decît soluţia generală cînd $\mathcal{B}\mathbf{e} \neq 0$. Ar fi foarte important din acest motiv, dacă, prin unele schimbări de variabile, ar fi posibil să transformăm ecuaţia de stare neomogenă într-una omogenă. Acest lucru ne propunem să studiem în acest paragraf.

Considerăm ecuaţia de stare (28*a*), pe care o repetăm aici :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{e}. \tag{48}$$

Presupunem că există un vector $\mathbf{f}$ care satisface ecuaţia diferenţială

$$\frac{d}{dt}\mathbf{f} = \mathcal{F}\mathbf{f} \tag{49}$$

cu valoarea iniţială $\mathbf{f}(t)_0$ şi care este legată de $\mathbf{e}$ prin relaţia

$$\mathbf{e} = \mathcal{K}\mathbf{f}. \tag{50}$$

În aceste expresii $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{K}$ sînt matrice care urmează a fi determinate. Substituim (50) în (48) şi combinăm ecuaţia rezultată cu (49). Rezultatul poate fi pus în următoarea formă:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}\mathcal{K} \\ 0 & \mathcal{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}, \tag{51}$$

care este omogenă ca şi (46). În consecinţă, soluţia va fi:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{f}(t) \end{bmatrix} = \exp\left\{\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}\mathcal{K} \\ 0 & \mathcal{F} \end{bmatrix}(t - t_0)\right\}\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{f}(t_0) \end{bmatrix} \tag{52}$$

în acelaşi mod în care (47) a fost soluţia lui (46). (Notaţia exp. (u) corespunde lui ε^u). Soluţia pentru $\mathbf{x}(t)$ este dată de primele n elemente ale soluţiei lui $[\mathbf{x}\ \mathbf{f}]'$.

În această metodă de obţinere a unei ecuaţii diferenţiale echivalentă ecuaţiei de stare neomogenă există un inconvenient important. Presupunem că $\mathbf{f}$ este un vector m. Matricea exponenţială din (52) este deci de ordinul $n + m$. În soluţia (45) a ecuaţiei de stare originale, ordinul matricei exponenţiale este n. Deoarece m poate lua cu uşurinţă valori mari, creşterea ordinului exponenţialei matriceale prin m poate avea ca efect depăşirea volumului de calcul necesar rezolvării integralei din (45).

Este posibil să folosim o altă metodă care să ne conducă la o ecuaţie diferenţială omogenă, fără ca ordinul exponenţialei matriceale de calculat să crească. Fie:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathcal{S}\mathbf{f} \tag{53}$$

sau, echivalent:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathcal{S}\mathbf{f}, \tag{54}$$

unde $\mathcal{S}$ este o matrice care trebuie determinată. Substituind (54) în ecuaţia de stare (48) se obţine:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} - \mathcal{S}\frac{d}{dt}\mathbf{f} = \mathcal{A}\mathbf{y} - \mathcal{A}\mathcal{S}\mathbf{f} + \mathcal{B}\mathbf{e}. \tag{55}$$

Substituind (49) în (50) în această ecuaţie şi rearanjînd termenii, se obţine:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{y} + [\mathcal{S}\mathcal{F} - \mathcal{A}\mathcal{S} + \mathcal{B}\mathcal{K}]\mathbf{f}. \tag{56}$$

Dacă se poate găsi un $\mathcal{S}$ care să satisfacă următoarea ecuaţie matriceală, algebrică, liniară

$$\mathcal{A}\mathcal{S} - \mathcal{S}\mathcal{F} = \mathcal{B}\mathcal{K}, \tag{57}$$

atunci (56) devine:

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{y}, \tag{58}$$

care este aceeaşi ecuaţie diferenţială omogenă ca în (46). Soluţia ei este deci:

$$\mathbf{y}(t) = \varepsilon^{\mathcal{A}(t-t_0)}\,\mathbf{y}(t_0), \tag{59}$$

in care:

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) + \mathcal{S}\mathbf{f}(t_0) \tag{60}$$

din definiţia lui $\mathbf{y}$ din (53). Soluţia pentru $\mathbf{x}(t)$ este obţinută prin substituţia lui $\mathbf{y}(t)$ din (59) şi $f(t)$ din (49) în (54).

Soluţia ecuaţiei matriceale din (57) nu este o soluţie ordinară[1]. Deoarece $\mathcal{S}$ va fi o matrice $n \times m$, (57) este echivalentă ecuaţiei algebrice liniare nm pentru nm elementele necunoscute ale lui $\mathcal{S}$.

Exemplu. Pentru ilustrarea acestor două metode de obţinere a unei ecuaţii diferenţiale omogene echivalente, să pornim de la ecuaţia de stare:

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}[2\sin 2t - 3\cos 2t].$$

Este uşor de verificat că:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix}$$

este soluţia ecuaţiei diferenţiale:

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & .2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{f}, \qquad \mathbf{f}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

---

[1] Dacă valorile proprii ale lui $\mathcal{F}$ sînt diferite de acelea ale lui $\mathcal{A}$, soluţia lui $\mathcal{S}$ poate fi exprimată în formă închisă folosind unele rezultate din următorul paragraf. Această soluţie în formă închisă va fi dată în Problema 17. Puteţi găsi o demonstraţie pentru această soluţie în: J. S. Frame, „*Matrix Functions and Applications* — Part. IV"., *IEEE Spectrum*, Vol. I. no. 6, June 1961, p. 123—131. O altă soluţie de formă închisă va fi dată în Problema 35. Demonstraţia acestei soluţii o veţi găsi în: A. Jameson „*Solution of the Equation* **AX** + **XB** = **C** *by Inversion of an* $M \times M$ *or* $N \times N$ *Matrix*", *SIAM Jour. of Applied Mathematics*, Vol. 16, No. 5, Sept. 1968, p. 1020—1023.

Se observă că :

$$\mathbf{e} = (2 \sin 2t - 3 \cos 2t) = [2 \ -3] \begin{bmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} = \mathcal{K}\mathbf{f}.$$

Deci :

$$\mathcal{K} = [2 \quad -3].$$

Matricele $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{F}$ sînt desigur cuprinse în ecuaţia diferenţială pentru **f**. Ecuaţia diferenţială vectorială corespunzătoare lui (51) este deci :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 4 & 2 & -3 \\ -2 & -5 & -2 & 3 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix},$$

Soluţia acestei ecuaţii se scrie acum cu uşurinţă.

Această metodă necesită rezolvarea ecuaţiei matriceale din (57). Deoarece ordinul lui $\mathcal{A}$ este $n = 2$ şi ordinul lui $\mathcal{F}$ este $m = 2$, $\mathcal{S}$ va fi o matrice 2×2. În acest exemplu (57) va fi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Puteţi verifica cu uşurinţă că aceasta este echivalentă următoarei ecuaţii algebrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{21} \\ S_{12} \\ S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

a cărei soluţie este :

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{21} \\ S_{12} \\ S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Folosind aceste valori pentru S_{ij}, matricea $\mathcal{S}$ este

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

astfel, $\mathcal{S}$ există şi soluţiile lui $\mathbf{y}(t)$ şi apoi a lui $\mathbf{x}(t)$, pot fi obţinute prin folosirea acestei metode.

În acest exemplu am transformat ecuaţia matriceală din (57) pentru $\mathcal{S}$ într-o ecuaţie vectorială echivalentă pentru un vector cu aceleaşi elemente ca $\mathcal{S}$. Să indicăm cum se realizează aceasta în general. Fie s_i şi

k_i notaţiile vectorilor coloanei i ai lui $\mathcal{S}$ şi respectiv $\mathcal{X}$. Atunci ecuaţia vectorială este:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \dots & \mathbf{R}_{1m} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{R}_{m1} & \mathbf{R}_{m2} & \mathbf{R}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}\mathbf{k}_1 \\ \mathcal{B}\mathbf{k}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{B}\mathbf{k}_m \end{bmatrix}, \tag{61}$$

unde:

$$\mathbf{R}_{ij} = \delta_{ij}\,\mathcal{A} - f_{ji}\,\mathbf{U} \tag{62}$$

este echivalentă ecuaţiei matriceale (57), în sensul că soluţia lui (61) determină valori pentru toate elementele lui $\mathcal{S}$.

În analiză sînt întîlnite multe funcţii de excitaţie. Există un set standard de excitaţii folosite în analiza unei reţele. Funcţiile sinus şi cosinus din exemplul anterior sînt numai două funcţii din acest set. Alte excitaţii folosite adeseori sînt funcţiile treaptă, rampă, exponenţială, sinusoida amortizată exponenţial. Pentru a elimina necesitatea construirii matricei $\mathcal{F}$ şi a vectorului iniţial corespunzător $\mathbf{f}(0)$ pentru aceste excitaţii standard, am dat în tabelul 4.1 funcţiile $\mathbf{f}(t)$ cel mai adesea folosite şi $\mathcal{F}$ şi $\mathbf{f}(0)$ asociate. Observăm că în acest tabel $t_0 = 0$; procedînd astfel, nu se pierde din generalitate, şi este convenabil să considerăm astfel. Menţionăm de asemenea că constanta α care apare în tabelul 4.1 poate fi zero. Dacă procedăm în felul acesta, elementele lui $\mathbf{f}(t)$ devin simple puteri ale lui t în primul caz şi funcţii sinusoidale şi cosinusoidale în celelalte cazuri.

Tabelul 4.1.

$\mathbf{f}(t)$	$\mathcal{F}$	$\mathbf{f}(0)$
$\begin{bmatrix} \varepsilon^{-\alpha t} \\ t\varepsilon^{-\alpha t} \\ t^2\varepsilon^{-\alpha t} \\ \vdots \\ t^{k-1}\varepsilon^{-\alpha t} \\ t^k\varepsilon^{-\alpha t} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\alpha \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & k & -\alpha \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \varepsilon^{-\alpha t}\sin\omega t \\ \varepsilon^{-\alpha t}\cos\omega t \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\alpha & \omega \\ -\omega & -\alpha \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Deoarece un vector de excitaţie al reţelei poate avea elemente care sînt combinaţii ale elementelor vectorilor e excitaţie standard cu diferite valori pentru α, ω şi k, poate fi util să combinăm mai multe ecuaţii diferenţiale pentru diferiţi vectori de excitaţie standard într-o singură ecuaţie diferenţială.

Pentru a clarifica această problemă, să considerăm un exemplu simplu. Fie:

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} 4 - 3\,\varepsilon^{-2t} \\ 2 - 2t\varepsilon^{-3t} \\ \varepsilon^{-t}\cos t + 4\sin 1{,}5t \end{bmatrix}$$

Elementele lui $\mathbf{e}$ pot fi raportate la funcţiile de excitaţie standard, care apar ca elemente ale lui $\mathbf{f}$, astfel:

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} 4 - 3\varepsilon^{-2t} \\ 2 - 2t\varepsilon^{-3t} \\ \varepsilon^{-t}\cos t + 4\sin 1{,}5\,t \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|cc|cc|cc} 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline \varepsilon^{-2t} \\ \hline \varepsilon^{-3t} \\ t\varepsilon^{-3t} \\ \hline \varepsilon^{-t}\sin t \\ \varepsilon^{-t}\cos t \\ \hline \sin 1{,}5t \\ \cos 1{,}5t \end{array}\right] = \mathcal{K}\,\mathbf{f}(t)$$

Pe baza tabelului 4.1, găsim că există cinci ecuaţii diferenţiale, corespunzînd fiecare cîte unei părţi a vectorului $\mathbf{f}$ din dreapta; ele sînt:

$$\frac{d}{dt}[f_1] = [0][f_1] \qquad [f_1(0)] = [1]$$

$$\frac{d}{dt}[f_2] = [-2][f_2], \qquad [f_2(0)] = [1],$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} f_3(0) \\ f_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_5 \\ f_6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} f_5(0) \\ f_6(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} f_7 \\ f_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1{,}5 \\ -1{,}5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_7 \\ f_8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} f_7(0) \\ f_8(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Putem să le combinăm pentru obţinerea unei ecuaţii diferenţiale vectoriale în $\mathbf{f}(t)$:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} f_1 \\ \cdot\cdot \\ f_2 \\ \cdot\cdot \\ f_3 \\ f_4 \\ \cdot\cdot \\ f_5 \\ f_6 \\ \cdot\cdot \\ f_7 \\ f_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \cdot\cdot \\ f_2 \\ \cdot\cdot \\ f_3 \\ f_4 \\ \cdot\cdot \\ f_5 \\ f_6 \\ \cdot\cdot \\ f_7 \\ f_8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_1(0) \\ \cdots \\ f_2(0) \\ \cdots \\ f_3(0) \\ f_4(0) \\ \cdots \\ f_5(0) \\ f_6(0) \\ \cdots \\ f_7(0) \\ f_8(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot\cdot \\ 1 \\ \cdot\cdot \\ 1 \\ 0 \\ \cdot\cdot \\ 0 \\ 1 \\ \cdot\cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exponenţiala matriceală

Aceste soluţii formale prezintă o dificultate importantă. Exponenţiala matriceală este o soluţie simbolică — ea nu ne spune prea mult. Deşi dezvoltarea în serie a exponenţialei ne conduce la rezultate numerice aproximative, ea nu conduce la o formă închisă. Astfel, în exemplul simplu dat în (40), fiecare element al matricei este o serie infinită, şi nu ştim ce funcţie reprezintă. Este clar, că este necesar să găsim forme închise echivalente exponenţialei $\varepsilon^{\mathscr{A}t}$.

O echivalentă a exponenţialei poate fi găsită folosind transformata Laplace. Pentru simplificare, presupunem timpul iniţial $t_0 = 0$. Dacă luăm transformata Laplace a ecuaţiei omogene din (31), găsim:

$$s\overline{\mathbf{Y}}(s) - \mathscr{A}\overline{\mathbf{Y}}(s) = \mathbf{Y}(0) = \mathbf{U}.$$

unde $\overline{\mathbf{Y}}$ este transformata Laplace a lui $\mathbf{Y}(t)$. Aceasta poate fi scrisă astfel:

$$(s\mathbf{U} - \mathscr{A})\overline{\mathbf{Y}}(s) = \mathbf{U}$$

sau

$$\overline{\mathbf{Y}}(s) = (s\mathbf{U} - \mathscr{A})^{-1}.$$

În final, $\mathbf{Y}(t)$ se obţine luînd transformata inversă. Deoarece am considerat $t_0 = 0$, $\mathbf{Y}(t)$ va fi egal cu $\varepsilon^{\mathscr{A}t}$. Deci

$$\varepsilon^{\mathscr{A}t} = \mathscr{L}^{-1}\{(s\mathbf{U} - \mathscr{A})^{-1}\}. \tag{63}$$

Rezultatul este foarte interesant. Să-l aplicăm la o matrice simplă considerată anterior în (40). Matricea $(s\mathbf{U} - \mathscr{A})$, determinantul şi inversa ei se obţin uşor şi anume:

$$s\mathbf{U} - \mathscr{A} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}, \quad \det(s\mathbf{U} - \mathscr{A}) = (s+1)(s+2),$$

$$(s\mathbf{U} - \mathscr{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}. \quad (64)$$

În ultima etapă s-a făcut o dezvoltare în fracţii parţiale. Transformata inversă a acestei expresii este:

$$\mathscr{L}^{-1}(s\mathbf{U} - \mathscr{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{-t} & 0 \\ \varepsilon^{-t} - \varepsilon^{-2t} & \varepsilon^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Putem face ca exerciţiu dezvoltarea acestei exponenţiale şi să verificăm că rezultatul este acelaşi cu cel din (40).

Transformata Laplace este o modalitate de evaluare a exponenţialei matriceale $\varepsilon^{\mathscr{A}t}$. Dacă ne propunem folosirea transformatei Laplace, putem să o aplicăm asupra ecuaţiilor neomogene iniţiale şi să evităm toate treptele intermediare. Acest procedeu poate fi desigur aplicat, dar se pierd avantajele matematicii matriceale. În consecinţă, pentru găsirea exponenţialei matriceale, avem nevoie de consideraţii suplimentare.

4.4. FUNCŢII DE O MATRICE

Exponenţiala matriceală $\varepsilon^{\mathscr{A}t}$ este o funcţie particulară de o matrice; ea face parte din clasa generală care poate fi numită *funcţie de o matrice*. Se pot învăţa multe lucruri despre funcţia particulară $\varepsilon^{\mathscr{A}t}$ studiind teoria acestei clase generale. Aceasta ne propunem să facem în acest paragraf.

Cele mai simple funcţii de o variabilă scalară ordinară sînt puterile de variabile şi polinoame. Ele sînt de asemenea cele mai simple funcţii de o matrice. Considerăm un polinom $f(s)$ de variabila complexă s:

$$f(s) = s^k + a_{k-1}s^{k-1} + \ldots + a_1 s + a_0.$$

Presupunem că variabila s este înlocuită de o matrice patrată $\mathscr{A}$ de ordinul n. Funcția corespunzătoare va fi un polinom matriceal:

$$f(\mathscr{A}) = \mathscr{A}^k + a_{k-1}\mathscr{A}^{k-1} + \ldots + a_1\mathscr{A} + a_0\mathbf{U}.$$

Generalizarea unui polinom este o serie infinită:

$$f(s) = a_0 + a_1 s + \ldots + a_k s^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k. \tag{65}$$

O astfel de serie poate reprezenta de fapt orice funcție analitică de o variabilă complexă, în domeniul său de convergență. Înlocuind pe s cu $\mathscr{A}$, seria devine

$$f(\mathscr{A}) = a_0\mathbf{U} + a_1\mathscr{A} + a_2\mathscr{A}^2 + \ldots + a_k\mathscr{A}^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathscr{A}^k. \tag{66}$$

Funcția $f(\mathscr{A})$ este de fapt o matrice, ale cărei elemente formează o serie infinită. Această serie matriceală este convergentă dacă fiecare element al seriei este convergent. Nu vom arăta aceasta, dar rezultă că seria matriceală este convergentă dacă valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$ — adică, zerourile polinomului caracteristic, $\det(s\mathbf{U} - \mathscr{A})$ — cad în interiorul cercului de convergență al seriei scalare din (65) [1].

Funcțiile transcendente de o matrice pot fi definite cu ajutorul seriilor infinite. O astfel de funcție este exponențiala, pentru care determinarea seriei a fost deja dată în (39). Determinarea seriei unei funcții de o matrice nu are o valoare prea mare în evaluarea funcției, făcînd excepție o evaluare numerică aproximativă. Mai mult, determinarea unei serii nu va fi adecvată, atunci cînd zerourile polinomului caracteristic nu cad în interiorul cercului de convergență. Din fericire, dacă $f(s)$ este o funcție analitică, care este regulată la zerourile polinomului caracteristic al lui $\mathscr{A}$, atunci $f(\mathscr{A})$ poate fi exprimată ca o funcție polinomială; adică ea este o serie finită. Să vedem cum se explică aceasta.

Teorema Cayley-Hamilton și consecințele ei

Definim un *polinom de anulare* de o matrice $\mathscr{A}$, polinomul $a(s)$, care se anulează cînd s este înlocuit cu $\mathscr{A}$; adică $a(\mathscr{A}) = 0$. Polinomul caracteristic, $d(s) = \det(s\mathbf{U} - \mathscr{A})$, al unei matrice patrate $\mathscr{A}$ este un polinom

---

[1] Pentru demonstrație, se va vedea L. Minsky, *An Introduction to Linear Algebra*, Oxford University, Press, London, 1955, p. 332–334.

de anulare pentru $\mathscr{A}$. Aceasta poate fi făcută plauzibilă observînd că inversa lui $(s\mathbf{U} - \mathscr{A})$ este dată de:

$$(s\mathbf{U} - \mathscr{A})^{-1} = \frac{1}{d(s)} \operatorname{adj}(s\mathbf{U} - \mathscr{A}) \tag{67}$$

sau

$$d(s)\mathbf{U} = (s\mathbf{U} - \mathscr{A}) \operatorname{adj}(s\mathbf{U} - \mathscr{A}). \tag{68}$$

Presupunem acum că s este înlocuit cu $\mathscr{A}$. În partea dreaptă apare un factor $\mathscr{A} - \mathscr{A}$; deci $d(\mathscr{A}) = 0$, şi $d(s)$ este un polinom de anulare. Acest rezultat este cunoscut ca *teorema Cayley-Hamilton.*

Teoremă. *Orice matrice patrată satisface propria ei ecuaţie caracteristică.*

Teorema Cayley-Hamilton ne permite să reducem ordinul unui polinom matriceal de orice ordin (oricît de mare) la unul de ordin care nu depăşeşte $n - 1$, unde n este ordinul matricei. Presupunem că $\mathscr{A}$ este o matrice patrată de ordin 3. Ecuaţia ei caracteristică va avea forma $d(s) = s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3$. Deci, din teorema Cayley-Hamilton rezultă $d(\mathscr{A}) = \mathscr{A}^3 + d_1\mathscr{A}^2 + d_2 \mathscr{A} + d_3\mathbf{U} = 0$ şi $\mathscr{A}^3 = -(d_1\mathscr{A}^2 + d_2\mathscr{A} + d_3\mathbf{U})$. Dînd un polinom de ordin mai mare ca 3, toate puterile de ordinul 3 sau mai mult pot fi înlocuite folosind expresia patratică în $\mathscr{A}$ pentru $\mathscr{A}^3$. Întregul polinom se va reduce la un polinom de ordinul 2.

Ca un rezultat suplimentar, teorema Cayley-Hamilton permite evaluarea inversei unei matrice ca un polinom matriceal. Astfel, dacă ecuaţia caracteristică a unei matrice $\mathscr{A}$ este:

$$d(s) = s^n + d_1 s^{n-1} + \ldots + d_{n-1}s + d_n,$$

atunci

$$d(\mathscr{A}) = \mathscr{A}^n + d_1\mathscr{A}^{n-1} + \ldots + d_{n-1}\mathscr{A} + d_n \mathbf{U} = 0.$$

Dacă ecuaţia este multiplicată prin $\mathscr{A}^{-1}$, ultimul termen devine $d_n\mathscr{A}^{-1}$. Atunci

$$\mathscr{A}^{-1} = -\frac{1}{d_n}(\mathscr{A}^{n-1} + d_1\mathscr{A}^{n-2} + \ldots + d_{n-2}\mathscr{A} + d_{n-1}\mathbf{U}). \tag{69}$$

Această relaţie explicită este valabilă numai cînd zero este o valoare proprie a lui $\mathscr{A}$, astfel că $d(s)$ nu are un factor s şi $d_n \neq 0$.

Ne interesează în principal funcţiile $f(\mathscr{A})$ care nu sînt polinoame; în particular exponenţiale. Cum vom trata astfel de funcţii? Se obţine

o indicaţie folosind din nou polinoamele. Presupunem date două polinoame $p_1(s)$ şi $p_2(s)$, ordinul lui $p_1(s)$ fiind mai mic ca acela al lui $p_2(s)$. Ultimul poate fi împărţit prin primul şi se obţine un cît $q(s)$ şi un rest $r(s)$ al cărui ordin este mai mic cu o unitate decît cel al polinomului divizor $p_1(s)$. Rezultatul, după multiplicarea prin $p_1(s)$ poate fi scris astfel:

$$p_2(s) = q(s)p_1(s) + r(s).$$

Presupunem că în locul polinomului $p_2(s)$ avem o funcţie analitică $f(s)$ şi înlocuim pe $p_1(s)$ cu $a(s)$. În mod analog cu ecuaţia precedentă, ne aşteptăm ca:

$$f(s) = q(s)a(s) + g(s) \tag{70}$$

unde $q(s)$ este o funcţie „cît" analitică, care este regulată la zerourile polinomului $a(s)$ şi unde $g(s)$ este un polinom „rest" al cărui ordin este mai mic decît ordinul lui $a(s)$.

Presupunem că polinomul $a(s)$ este un polinom de anulare pentru matricea $\mathcal{A}$; adică $a(\mathcal{A}) = 0$. Aceasta înseamnă că înlocuind pe s cu $\mathcal{A}$ în (70), obţinem

$$f(\mathcal{A}) = g(\mathcal{A}) \tag{71}$$

unde $f(\mathcal{A})$ este o funcţie şi $g(\mathcal{A})$ este un polinom.

Acesta este un rezultat foarte interesant, deoarece $f(s)$ este o funcţie arbitrară. În termeni precişi, rezultatul anticipat poate fi orice *funcţie de o matrice $\mathcal{A}$ regulată la zerourile polinomului de anulare în $\mathcal{A}$ de ordin care nu depăşeşte ordinul lui $\mathcal{A}$ din care se scade o unitate.*

Rămîne încă de determinat polinomul „rest" $g(s)$. Înainte de a face aceasta, să mai facem unele observaţii în legătură cu polinoamele de anulare. Teorema Cayley-Hamilton ne asigură că o matrice patrată are cel puţin un polinom de anulare. (Aţi putea arăta că aceasta implică existenţa unui număr infinit de polinoame de anulare de acea matrice). Fie un polinom de cel mai mic ordin, avînd coeficientul termenului de gradul cel mai înalt egal cu unu, notat cu $m(s)$, pe care-l vom numi *polinom minimal.*

Un fapt interesant referitor la un polinom minimal este dat de următoarea teoremă:

Teoremă: *Polinomul minimal al oricărei matrice patrate $\mathcal{A}$ este un factor pentru orice polinom de anulare de $\mathcal{A}$.*

Aceasta este uşor de demonstrat. Se dau $a(s)$ şi $m(s)$, unde $m(s)$ nu este de ordin mai mare ca $a(s)$. Putem împărţi pe $a(s)$ prin $m(s)$ şi obţi-

nem un cît $q_1(s)$ și un rest $r_1(s)$ de ordin mai mic ca al lui $m(s)$. După multiplicare cu $m(s)$ obținem:

$$a(s) = q_1(s)m(s) + r_1(s).$$

Înlocuim acum pe s cu $\mathscr{A}$ și observăm că $a(\mathscr{A}) = 0$ și $m(\mathscr{A}) = 0$. Deci $r_1(\mathscr{A}) = 0$. Dar aceasta este o contradicție, afară de cazul în care r_1 este identic zero, deoarece $r_1(\mathscr{A}) = 0$ înseamnă că $r_1(s)$ este un polinom de anulare de ordin mai mic ca al lui $m(s)$. Deci $r_1(s) = 0$ și $m(s)$ este un factor al lui $a(s)$.

Nu este necesar să găsim polinomul minimal în orice caz. În oricare din calculele care trebuie efectuate poate fi folosit polinomul caracteristic $d(s)$, ușor de determinat, care este un polinom de anulare și care poate uneori să fie polinomul minimal corespunzător.

Sîntem pregătiți acum să determinăm polinomul $g(s)$, care poate fi scris astfel:

$$g(s) = g_0 + g_1 s + g_2 s^2 + \ldots + g_{n-1} s^{n-1}, \tag{72}$$

în care coeficienții sînt necunoscuți. Punctul de pornire este (70).

Să ne ocupăm de polinomul caracteristic $d(s)$ al matricei $\mathscr{A}$ care este un polinom de anulare și să rescriem (70) astfel:

$$f(s) = q(s)d(s) + g(s) \tag{73}$$

Valori proprii distincte

Presupunem că valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$ sînt distincte și să scriem pe $d(s)$ în formă factorizată astfel:

$$d(s) = (s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_n) \tag{74}$$

Să evaluăm acum pe (73) pentru fiecare valoare proprie s_i. Deoarece $d(s_i) = 0$, găsim

$$f(s_i) = g(s_i). \tag{75}$$

Există n astfel de relații. Folosind (72) pentru $g(s)$, aceste n relații devin

$$\begin{gathered} g_0 + s_1 g_1 + s_1^2 g_2 + \cdots + s_1^{n-1} g_{n-1} = f(s_1), \\ g_0 + s_2 g_1 + s_2^2 g_2 + \cdots + s_2^{n-1} g_{n-1} = f(s_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_0 + s_n g_1 + s_n^2 g_2 + \ldots + s_n^{n-1} g_{n-1} = f(s_n). \end{gathered} \tag{76}$$

În partea dreaptă a acestor relaţii sînt cantităţi cunoscute, deoarece $f(s)$ este funcţia iniţială dată. Acesta este un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute şi coeficienţi g_i. După rezolvarea acestui sistem de ecuaţii, funcţia $g(s)$ poate fi scrisă direct.

Să ilustrăm această metodă cu ajutorul aceluiaşi exemplu simplu considerat anterior. Pentru $\mathscr{A}$ din (40), polinomul caracteristic a fost dat în (64). Ecuaţiile sînt reproduse şi aici:

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} d(s) &= (s+1)(s+2) \\ s_1 &= -1 \\ s_2 &= -2 \end{aligned}$$

Funcţia matriceală dorită este $\varepsilon^{\mathscr{A}t}$, astfel că $f(s) = \varepsilon^{st}$. Prin substituire în (76) obţinem:

$$g_0 - g_1 = \varepsilon^{s_1 t} = \varepsilon^{-t},$$

$$g_0 - 2g_1 = \varepsilon^{s_2 t} = \varepsilon^{-2t},$$

din care:

$$g_1 = \varepsilon^{-t} - \varepsilon^{-2t},$$

$$g_0 = 2\varepsilon^{-t} - \varepsilon^{-2t}.$$

Deci

$$g(s) = (2\varepsilon^{-t} - \varepsilon^{-2t}) + (\varepsilon^{-t} - \varepsilon^{-2t})\, s.$$

Etapa următoare este să înlocuim pe s cu $\mathscr{A}$ şi să găsim $g(\mathscr{A})$, care este egal cu $f(\mathscr{A})$ (71)

$$f(\mathscr{A}) = g(\mathscr{A}) = (2\varepsilon^{-t} - \varepsilon^{-2t})\mathrm{U} + (\varepsilon^{-t} - \varepsilon^{-2t})\mathscr{A}$$

$$= (2\varepsilon^{-t} - \varepsilon^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (\varepsilon^{-t} - \varepsilon^{-2t}) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Printr-o rearanjare, aceasta devine:

$$\varepsilon^{\mathscr{A}t} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{-t} & 0 \\ \varepsilon^{-t} - \varepsilon^{-2t} & \varepsilon^{-2t} \end{bmatrix},$$

care este în concordanţă cu rezultatul găsit anterior.

Privind din nou setul de ecuaţii din (76), se constată o uniformitate certă în matricea coeficienţilor. Este posibil să rezolvăm ecuaţiile în formă literală şi să folosim avantajele uniformităţii în scrierea matricei pentru a ajunge la un rezultat uşor de interpretat.

Dacă notăm cu Δ determinantul şi Δ_{ij} cofactorul (i, j) al matricei coeficienţilor din (76), soluţia pentru g_i poate fi scrisă

$$g_{i-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{ji}}{\Delta} f(s_j).$$

Polinomul $g(s)$ poate fi scris acum, folosind aceşti coeficienţi, astfel:

$$g(s) = \sum_{i=1}^{n} g_{i-1}s^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} s^{i-1}\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{ji}}{\Delta} f(s_j)\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{j1}}{\Delta} f(s_j) + s\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{j2}}{\Delta} f(s_j)\right\} + \ldots + s^{n-1}\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{jn}}{\Delta}\right\} f(s_j),$$

sau

$$g(s) = \sum_{j=1}^{n} \left\{\frac{\Delta_{j1}}{\Delta} + \frac{s\Delta_{j2}}{\Delta} + \frac{s^2\Delta_{j3}}{\Delta} + \ldots + \frac{s^{n-1}\Delta_{jn}}{\Delta}\right\} f(s_j).$$

Problema care trebuie rezolvată în ultima etapă este rearanjarea termenilor avînd în vedere valorile lui $f(s_j)$ şi nu puterile lui s.

Deoarece ecuaţiile (76) sînt toate similare, trebuie să fie posibil să scriem acest rezultat într-o formă mai simplă. Rezolvarea a fost dată de Lagrange făcînd să treacă un polinom de gradul $n - 1$ prin n puncte. Aceasta este numită *formula de interpolare a lui Lagrange şi* transformă suma dintre paranteze într-un produs, după cum urmează:

$$g(s) = \sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \frac{s - s_k}{s_j - s_k}\right) f(s_j). \tag{77}$$

(Verificaţi acest lucru). Folosind această expresie, $g(\mathscr{A})$ este obţinută cu uşurinţă. În final, deoarece $f(\mathscr{A}) = g(\mathscr{A})$, obţinem

$$f(\mathscr{A}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \frac{\mathscr{A} - s_k \mathbf{U}}{s_j - s_k}\right) f(s_j). \tag{78}$$

Folosind acest rezultat se poate face o observaţie foarte interesantă. Dîndu-se o matrice $\mathscr{A}$, valorile proprii s_i sînt unic determinate de $\mathscr{A}$.

Deci, fiecare din parantezele din (78) este o funcție numai de $\mathscr{A}$ și este independentă de funcția specifică $f(s)$ considerată. Odată ce cantitatea dintre paranteze este determinată, orice funcție de matrice poate fi determinată prin evaluarea funcției la valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$. Menționăm că această problemă va fi din nou tratată ulterior într-un caz mai general.

Valori proprii multiple

Dacă valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$ nu sînt distincte și există valori multiple, este necesară o modificare a acestui procedeu. Fie:

$$d(s) = (s - s_1)^{r_1} (s - s_2)^{r_2} \dots (s - s_l)^{r_l}, \tag{79}$$

unde multiplicitățile sînt evident r_i pentru valoarea proprie de ordinul i.

Să considerăm acum diferențiala lui (73), după care vom evalua rezultatul pentru $s = s_k$. Exceptînd derivatele produsului $q(s)\, d(s)$, derivatele lui f și g vor fi egale. Astfel:

$$\frac{d^j f(s)}{ds^j} = \frac{d^j g(s)}{ds^j} + \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{d^{j-1} q(s)}{ds^{j-1}} \frac{d^i d(s)}{ds^i}. \tag{80}$$

Ce se întîmplă cu suma cînd $s = s_k$?

Dacă ordinul derivatei este mai mic decît ordinul de multiplicitate al valorii proprii s_k (adică, dacă $j < r_k$), atunci din (79) este clar că $d^i d(s)/ds^i = 0$ pentru $s = s_k$ și pentru $i \leqslant j$. Aceasta înseamnă că toți termenii de sub semnul de însumare se anulează, și astfel

$$\frac{d^j g(s)}{ds^j} = \frac{d^j f(s)}{ds^j} \text{ pentru } s = s_k \tag{81}$$

și pentru ordinele de derivare $j = 0,1,2, \dots, (r_k - 1)$; aceasta este valabil pentru derivatele de orice ordin mai mic cu unu decît multiplicitatea lui s_k. Această ecuație este o generalizare a lui (75) și o include. Numărul de relații obținute este egal cu acela al valorilor proprii, cînd fiecare valoare proprie este calculată în raport cu ordinul ei de multiplicitate. Deoarece $g(s)$ în (72) are de asemenea mulți coeficienți, ei pot fi determinați folosind (81). Astfel, primele r_1 relații evaluate pentru $s = s_1$ vor fi:

$$\begin{aligned}
g_0 + s_1 g_1 + s_1^2 g_2 + \dots + s_1^{n-1} g_{n-1} &= f(s_1) \\
g_1 + 2 s_1 g_2 + \dots + (n-1) s_1^{n-2} g_{n-1} &= f^{(1)}(s_1) \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
(r_1 - 1)!\, g_{r_1 - 1} + \dots + \frac{(n-1)!}{(n-r_1)!} s_1^{n-r_1} g_{n-1} &= f^{(r_1 - 1)}(s_1).
\end{aligned}$$

Seturi similare de ecuaţii vor rezulta pentru fiecare valoare proprie distinctă. Rezultatul complet prezentat în formă matriceală va fi:

$$\begin{bmatrix} 1 & s_1 & s_1^2 & \cdots & s_1^{r_1} & \cdots & s_1^{n-1} \\ 0 & 1 & 2s_1 & \cdots & r_1 s_1^{r_1-1} & \cdots & (n-1)s_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (r_1-1)! & \cdots & \frac{(n-1)!}{(n-r_1)!} s_1^{n-r_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & s_2 & s_2^2 & \cdots & s_2^{r_2} & \cdots & s_2^{n-1} \\ 0 & 1 & 2s_2 & \cdots & r_2 s_2^{r_2-1} & \cdots & (n-1) s_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (r_2-1)! & \cdots & \frac{(n-1)!}{(n-r_2)!} s_2^{n-r_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & s_k & s_k^2 & \cdots & s_k^{r_k} & \cdots & s_k^{n-1} \\ 0 & 1 & 2s_k & \cdots & r_k s_k^{r_k-1} & \cdots & (n-1) s_k^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (r_k-1)! & \cdots & \frac{(n-1)!}{(n-r_k)!} s_k^{n-r_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(s_1) \\ f^{(1)}(s_1) \\ f^{(2)}(s_1) \\ \vdots \\ f^{(r_1-1)}(s_1) \\ \cdots \\ f(s_2) \\ f^{(1)}(s_2) \\ f^{(2)}(s_2) \\ \vdots \\ f^{(r_2-1)}(s_2) \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ f(s_k) \\ f^{(1)}(s_k) \\ f^{(2)}(s_k) \\ \vdots \\ f^{(r_k-1)}(s_k) \end{bmatrix} \tag{82}$$

Aceasta este o expresie complicată; ea este dată din dorinţa de a prezenta cazul cel mai general. Cazurile reale vor avea rareori o astfel de generalitate, şi ecuaţiile reale vor fi în general mult mai simple ca acestea. În orice caz, coeficienţii g_i sînt obţinuţi cu ajutorul acestei ecuaţii matriceale. Aceasta este generalizarea pentru valori proprii multiple ale lui (76) care se aplică pentru valori proprii simple.

Ca un exemplu de determinare a unei funcţii $f(\mathscr{A})$ cînd $\mathscr{A}$ are valori proprii multiple, fie $f(s) = \varepsilon^{st}$ şi

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad d(s) = \begin{vmatrix} s+2 & -1 & -3 \\ 0 & s+3 & 0 \\ 0 & -2 & s+2 \end{vmatrix}$$

$$= (s+2)^2(s+3).$$

Să luăm $s_1 = -2$ şi $s_2 = -3$; multiplicităţile sînt $r_1 = 2$ şi $r_2 = 1$. Să folosim $d(s)$ ca polinomul de anulare pentru determinarea lui $g(s)$. Pentru acest exemplu (82) devine:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^{-2t} \\ t\varepsilon^{-2t} \\ \varepsilon^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

deoarece $df(s_1)/ds = t\varepsilon^{s_1 t} = t\varepsilon^{-2t}$. Soluţia pentru g este găsită uşor prin inversiune, astfel:

$$\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon^{-2t} \\ t\varepsilon^{-2t} \\ \varepsilon^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^{-2t} \\ t\varepsilon^{-2t} \\ \varepsilon^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3\varepsilon^{-2t} + 6t\varepsilon^{-2t} + 4\varepsilon^{-3t} \\ -4\varepsilon^{-2t} + 5t\varepsilon^{-2t} + 4\varepsilon^{-3t} \\ -\ \varepsilon^{-2t} + \ t\varepsilon^{-2t} + \varepsilon^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Cunoscînd g_0, g_1 şi g_2 obţinem $g(s) = g_0 + g_1 s + g_2 s^2$ astfel:

$$g(s) = (-3\varepsilon^{-2t} + 6t\varepsilon^{-2t} + 4\varepsilon^{-3t}) + (-4\varepsilon^{-2t} + 5t\varepsilon^{-2t} + 4\varepsilon^{-3t})s + (-\varepsilon^{-2t} + t\varepsilon^{-2t} + \varepsilon^{-3t})s^2,$$

sau după o rearanjare a termenilor:

$$g(s) = (-3 - 4s - s^2)\,\varepsilon^{-2t} + (6 + 5s + s^2)t\varepsilon^{-2t} + (4 + 4s + s^2)\varepsilon^{-3t}.$$

Următoarea etapă este formarea lui $g(\mathscr{A})$ prin înlocuirea lui s cu $\mathscr{A}$:

$$g(\mathscr{A}) = (-3\mathrm{U} - 4\mathscr{A} - \mathscr{A}^2)\varepsilon^{-2t} - (6\mathrm{U} + 5\mathscr{A} + \mathscr{A}^2)t\varepsilon^{-2t} + (4\mathrm{U} + 4\mathscr{A} + \mathscr{A}^2)\varepsilon^{-3t}.$$

Calculele de efectuat după introducerea lui $\mathscr{A}$ sînt pur aritmetice. Rezultatul final este obţinut din (71): $f(\mathscr{A}) = g(\mathscr{A})$ conduce la:

$$\varepsilon^{\mathscr{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon^{-2t} + \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t\varepsilon^{-2t} + \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \varepsilon^{-3t}.$$

Aceasta completează exemplul. (Puteţi verifica dacă această ecuaţie rezultă din cea imediată anterioară prin înlocuirea lui $\mathscr{A}$.

Matricea constituantă

Să considerăm ecuaţia (82). Această ecuaţie poate fi rezolvată în coeficienţii g_i care sînt apoi înlocuiţi în polinomul $g(s)$, ca în cazul (76). Din nou rearanjăm termenii astfel încît să fie puse în evidenţă elementele

vectorului din dreapta lui (82) mai degrabă decît puterile lui s.Expresia rearanjată poate fi scrisă astfel:

$$\begin{aligned}
g(s) = {} & K_{11}(s) f(s_1) + K_{12}(s) \frac{f^{(1)}(s_1)}{1!} + K_{13}(s) \frac{f^{(2)}(s_1)}{2!} \\
& \qquad + \ldots + K_{1r_1}(s) \frac{f^{(r_1-1)}(s_1)}{(r_1-1)!} \\
& + K_{21}(s) f(s_2) + K_{22}(s) \frac{f^{(1)}(s_2)}{1!} + K_{23}(s) \frac{f^{(2)}(s_2)}{2!} \\
& \qquad + \ldots + K_{2r_2}(s) \frac{f^{(r_2-1)}(s_2)}{(r_2-1)!} \\
& + \ldots \\
& + K_{k1}(s) f(s_k) + K_{k2}(s) \frac{f^{(1)}(s_k)}{1!} + K_{k3}(s) \frac{f^{(2)}(s_k)}{2!} \\
& \qquad + \ldots + K_{kr_k}(s) \frac{f^{(r_k-1)}(s_k)}{(r_k-1)!}
\end{aligned} \tag{83}$$

K_{ij} a fost ales astfel încît coeficienţii derivatelor să fie împărţiţi de termenii factoriali (aceasta pentru o convenţie ulterioară). Cînd valorile proprii sînt de o multiplicitate singulară, această expresie complicată se reduce la prima coloană, care este (77).

Etapa următoare este înlocuirea lui s cu $\mathscr{A}$. Reamintind că $g\,\mathscr{A}() = f(\mathscr{A})$ şi obţinem acum:

$$\begin{aligned}
f(\mathscr{A}) = {} & K_{11}(\mathscr{A}) f(s_1) + K_{12}(\mathscr{A}) \frac{f^{(1)}(s_1)}{1!} + \ldots + K_{1r_k}(\mathscr{A}) \frac{f^{(r_1-1)}(s_1)}{(r_1-1)!} \\
& + \ldots \\
& + K_{k1}(\mathscr{A}) f(s_k) + K_{k2}(\mathscr{A}) \frac{f^{(1)}(s_k)}{1!} + \ldots + K_{kr_k}(\mathscr{A}) \frac{f^{(r_1-1)}(s_k)}{(r_k-1)!}
\end{aligned} \tag{84}$$

presupunînd că funcţiile $f^i(s)$ nu sînt singulare, pentru $s = s_i$. Coeficienţii $K_{ij}(\mathscr{A})$ din (84) sînt matrice, care sînt adesea notate K_{ij}. Ele sînt numite *matrice constituante* de $\mathscr{A}$ şi depind numai de $\mathscr{A}$, nu şi de funcţia $f(s)$. Aceasta poate fi observată din (82). Elementele diferite de zero ale matricei coeficienţilor sînt proporţionale cu diferite puteri ale valorilor

proprii ale lui $\mathscr{A}$. $K_{ij}(s)$ este o combinație liniară de cofactori ai acestei matrice a coeficienților. Deoarece valorile proprii și deci intrările matricei coeficienților depind numai de $\mathscr{A}$, rezultatul este verificat. Acest rezultat este foarte important. Înseamnă că matricele constituante $K_{ij}(\mathscr{A})$ ale unei matrice patrate $\mathscr{A}$ pot fi determinate, odată și pentru totdeauna, independent de orice funcție specifică. Pentru orice funcție dată f, expresia din (84) poate fi formată simplu prin evaluarea diferitelor derivate de f la valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$.

Pînă acum singura cale pe care o știm de găsire a matricelor constituante cînd $\mathscr{A}$ are valori proprii multiple este să scriem (82) și să rezolvăm pentru coeficienții g_i, să-i introducem în $g(s)$, și apoi să rearanjăm rezultatul în forma lui (83). Ar trebui să avem în vedere metode mai simple și din fericire cercetarea se preocupă de aceasta.

Cînd valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$ sînt simple, avem desigur la dispoziție formula de interpolare Lagrange. Avem nevoie de ceva similar pentru valorile proprii multiple.

Matricea rezolvantă

Deoarece matricele constituante $K_{ij} = K_{ij}(\mathscr{A})$ nu depind de funcția specifică f, dacă găsim o funcție simplă pentru care (84) poate fi scrisă, atunci K_{ij} astfel determinate vor fi aceleași pentru orice funcție. Succesul acestui mod de abordare depinde de găsirea unei funcții convenabile.

Considerăm funcția $f(s') = 1/(s - s') = (s - s')^{-1}$, unde s' este o variabilă complexă care joacă rolul avut anterior de s; de exemplu s' este variabila care va fi înlocuită prin $\mathscr{A}$. Cu riscul confuziei, noi am folosit simbolul s pentru o altă variabilă complexă. Am fi putut folosi un alt simbol, să zicem z, în locul lui s, dar algebra a fost făcută astfel din dorința de a obține în final o ecuație care conține pe s. Trebuie evitată confuzia de a ne gîndi la „z" cînd vedem „s" în această dezvoltare. Dacă luăm derivatele în raport cu s', obținem:

$$\frac{f^{j-1}(s_i)}{(j-1)!} = \frac{1}{(s - s_i)^j}, \tag{85}$$

unde s_i sînt valori particulare pentru s'. Substituim acum (85) în (84) și inlocuim pe s' prin $\mathscr{A}$ în $f(s') = (s - s')^{-1}$. Rezultatul va fi $(s\mathbf{U} - \mathscr{A})^{-1}$ în termeni ai matricelor constituante. Folosind (67) aceasta poate fi scris:

$$(s\mathbf{U} - \mathscr{A})^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{U} - \mathscr{A})}{d(s)}. \tag{86}$$

Numărătorul părţii drepte este o matrice a căror elemente sînt polinoame în s, deoarece ele sînt cofactori ai matricei $(s\mathbf{U} - \mathscr{A})$. Deoarece fiecare element al numărătorului este împărţit prin $d(s)$ întreaga expresie este o matrice de funcţii raţionale. Se poate face o dezvoltare în fracţii parţiale a părţii drepte şi se obţine:

$$(s\mathbf{U} - \mathscr{A})^{-1} = \frac{\mathbf{K}_{11}}{(s - s_1)} + \frac{\mathbf{K}_{12}}{(s - s_1)^2} + \ldots + \frac{\mathbf{K}_{1r_1}}{(s - s_1)_{r_1}}$$
$$+ \ldots$$
$$+ \frac{\mathbf{K}_{k1}}{(s - s_k)} + \frac{\mathbf{K}_{k2}}{(s - s_k)^2} + \ldots + \frac{\mathbf{K}_{krk}}{(s - s_k)_{rk}}. \qquad (87)$$

Ţinînd seama de (85), această expresie este exact de forma lui (84), şi anticipaţia noastră în utilizarea aceloraşi simboluri $K_{ij} = K_{ij}(\mathscr{A})$ pentru coeficienţii acestei dezvoltări în fracţii parţiale, ca şi pentru matricele constituante este justificată. Adică, matricele constituante sînt matrice de coeficienţi în dezvoltarea în fracţii parţiale a lui $(s\mathbf{U} - \mathscr{A})^{-1}$. Matricea $(s\mathbf{U} - \mathscr{A})^{-1}$ este numită ***matricea rezolvantă.***

Dîndu-se o matrice $\mathscr{A}$ şi o funcţie $f(s)$, determinarea lui $f(\mathscr{A})$ în forma lui (84) este făcută prin dezvoltarea matricei rezolvante $(s\mathbf{U} - \mathscr{A})^{-1}$ în fracţii parţiale. Coeficienţii dezvoltării (care sînt reziduuri dacă valorile proprii sînt simple) sînt matrice constituante.

Să facem o ilustrare cu ajutorul exemplului considerat mai sus. Fie $f(s) = \varepsilon^{st}$ şi

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad (s\mathbf{U} - \mathscr{A}) = \begin{bmatrix} s+2 & -1 & -3 \\ 0 & s+3 & 0 \\ 0 & -2 & s+2 \end{bmatrix}.$$

Pentru găsirea inversei lui $s\mathbf{U} - \mathscr{A}$, este necesar să calculăm determinantul şi cofactorii săi. După determinarea acestora obţinem:

$$(s\mathbf{U} - \mathscr{A})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} (s+2)(s+3) & (s+8) & 3(s+3) \\ 0 & (s+2)^2 & 0 \\ 0 & 2(s+2) & (s+2)(s+3) \end{bmatrix}}{(s+2)^2(s+3)}.$$

Fie $s_1 = -2$ și $s_2 = -3$. Dezvoltarea în fracții parțiale ne conduce la:

$$(s\mathbf{U}-\mathscr{A})^{-1} = \frac{\overset{\mathbf{K}_{11}}{\begin{bmatrix}1 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}}}{s+2} + \frac{\overset{\mathbf{K}_{12}}{\begin{bmatrix}0 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}}{(s+2)^2} + \frac{\overset{\mathbf{K}_{21}}{\begin{bmatrix}0 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}}}{s+3}.$$

În final, aceste matrice constituante sînt folosite în (84) pentru a obține exponențiala matriceală.

$$\varepsilon^{\mathscr{A}t} = \mathbf{K}_{11}\varepsilon^{-2t} + \mathbf{K}_{12}t\varepsilon^{-2t} + \mathbf{K}_{21}\varepsilon^{-3t}.$$

Acest rezultat este în concordanță cu cel obținut anterior.

Algoritmul matricei rezolvante

Să ne reamintim procedeul de determinare a matricelor constituante. Este necesar mai întîi să determinăm valorile proprii, etapă necesară pentru orice altă metodă. Este necesar apoi să inversăm matricea $(s\mathbf{U}-\mathscr{A})$, ceea ce am făcut prin determinarea cofactorilor acestei matrice. Dar acest lucru devine complicat pentru un n mare. Este necesar în final să dezvoltăm în fracții parțiale matricea rezolvantă $(s\mathbf{U}-\mathscr{A})^{-1}$. Orice contribuție pentru reducerea volumului de calcule va fi bine venită. Se cunoaște un astfel de algoritm pe care noi îl vom numi *algoritmul matricei rezolvante* [1].

Observăm din (86) că matricea rezolvantă este exprimată în termenii polinomului caracteristic la numitor și ai matricei adjuncte $(s\mathbf{U}-\mathscr{A})$ la numărător. Elementele acestei matrice sînt polinoame în s. Putem să ne concentrăm asupra puterilor lui s și să scriem această matrice ca o sumă de matrice, cîte una pentru fiecare putere a lui s. Fie

$$\operatorname{adj}(s\mathbf{U}-\mathscr{A}) = \mathbf{P}(s) = \mathbf{P}_0 s^{n-1} + \mathbf{P}_1 s^{n-2} + \ldots + \mathbf{P}_{n-2}s + \mathbf{P}_{n-1}, \tag{88}$$

$$d(s) = s^n + d_1 s^{n-1} + \ldots + d_{n-1}s + d_n. \tag{89}$$

Multiplicarea lui (86) prin $d(s)(s\mathbf{U}-\mathscr{A})$ conduce la

$$(s\mathbf{U}-\mathscr{A})\mathbf{P}(s) = d(s)\mathbf{U}, \tag{90}$$

[1]) Referiri anterioare la acest algoritm pot fi găsite în: J. M. Sourian, „*Une méthode pour la Décomposition spectrale à inversion des matrices*", Compt. Rend., Vol. 227, pp. 1010—1011, 1948; D. K. Fadeev and I. S. Sominskii, „*Collection of Problems on Higher Algebra*", 2nd ed. (in Russian), Gostekhizdat, Moscow, 1949; J. S. Frame, „*A Simple Recursion Formula for Inverting a Matrix*", Bul. An. Math., Soc. Vol. 55, p. 1015, 1949. H. F. Fettis, „*A Method for obtaining the characteristic Equation of a Matrix and Computing the Associated Model Columns*", Quart. Appl. Math., Vol. 8, pp 206—212, 1950.

care, după inversarea lui (88) şi (89), devine

$$(\mathbf{P}_0 s^n + \mathbf{P}_1 s^{n-1} + \ldots + \mathbf{P}_{n-1} s)$$
$$-(\mathscr{A}\mathbf{P}_0 s^{n-1} + \mathscr{A}\mathbf{P}_1 s^{n-2} + \ldots + \mathscr{A}\mathbf{P}_{n-1}) =$$
$$= \mathbf{U}s^n + d_1\mathbf{U}s^{n-1} + \ldots + d_n\mathbf{U}.$$

Egalarea coeficienţilor puterilor corespondente ale lui s din cele două părţi, conduce la

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_0 &= \mathbf{U}, \\
\mathbf{P}_1 &= \mathscr{A}\mathbf{P}_0 + d_1\mathbf{U}, \\
\mathbf{P}_2 &= \mathscr{A}\mathbf{P}_1 + d_2\mathbf{U}, \\
&\vdots \\
\mathbf{P}_k &= \mathscr{A}\mathbf{P}_{k-1} + d_k\mathbf{U}, \\
&\vdots \\
\mathbf{P}_{n-1} &= \mathscr{A}\mathbf{P}_{n-2} + d_{n-1}\mathbf{U}, \\
0 &= \mathscr{A}\mathbf{P}_{n-1} + d_n\mathbf{U}.
\end{aligned} \tag{91}$$

Este clar că dacă cunoaştem coeficienţii d_i ai polinomului caracteristic, aceste ecuaţii ne permit să determinăm matricele $\mathbf{P}_i$. Desigur, coeficienţii d_i pot fi determinaţi prin evaluarea determinantului $(s\mathbf{U} - \mathscr{A})$. Vom arăta acum că aceasta nu este chiar o necesitate.

Luînd urma matricelor pentru ambele părţi din (90) găsim că

$$s \operatorname{tr} \mathbf{P}(s) - \operatorname{tr} [\mathscr{A}\mathbf{P}(s)] = nd(s). \tag{92}$$

Vom arăta acum că tr $[\mathbf{P}(s)]$ este egală cu derivata lui $d(s)$. Scriem pe $d(s)$ astfel

$$d(s) = \sum_{j=1}^{n} (s\delta_{ij} - a_{ij})\, \Delta_{ij}, \tag{93}$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker, $(s\delta_{ij} - a_{ij})$ este un element al lui $(s\mathbf{U} - \mathscr{A})$, şi Δ_{ij} este cofactorul lui $(s\delta_{ij} - a_{ij})$. Vom folosi relaţia (25) din Capitolul 1, unde s-a discutat derivata unui determinant. S-a arătat că pentru o matrice arbitrară $\mathbf{B}(s) = [b_{kj}(s)]$

$$\frac{d}{ds} \det \mathbf{B}(s) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{db_{ij}}{ds}\, \Delta_{ij}. \tag{94}$$

În prezentul caz, determinantul este $d(s) = \det(s\mathbf{U} - \mathscr{A})$. Folosind (94) obținem

$$\frac{d}{ds}[d(s)] = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{d(s\delta_{ij}-a_{ij})}{ds}\Delta_{ij}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}\,\Delta_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\Delta_{ii} \tag{95}$$

$$= \mathrm{tr}[\mathrm{adj}\,(s\mathbf{U} - \mathscr{A})] = \mathrm{tr}\,\mathbf{P}(s).$$

Folosind această relație, putem înlocui pe $\mathrm{tr}\,\mathbf{P}(s)$ în (92) și obținem, după rearanjare,

$$s\frac{d}{ds}[d(s)] - nd(s) = \mathrm{tr}\,[\mathscr{A}\mathbf{P}(s)]. \tag{96}$$

În final, înlocuim expresiile $\mathbf{P}(s)$ și $d(s)$ din (88) și (89) în această ecuație și obținem:

$$(ns^n - (n-1)\,d_1s^{n-1} + (n-2)\,d_2s^{n-2} + \ldots + d_{n-1}s) -$$

$$- (ns^n + nd_1s^{n-1} + \ldots + nd_n) =$$

$$= s^{n-1}\,\mathrm{tr}\,(\mathscr{A}\mathbf{P}_0) + s^{n-2}\mathrm{tr}\,(\mathscr{A}\mathbf{P}_1) + \ldots + s\,\mathrm{tr}\,(\mathscr{A}\mathbf{P}_{n-2}) + \mathrm{tr}\,(\mathscr{A}\mathbf{P}_{n-1}).$$

Egalăm coeficienții acelorași puteri ale lui s din ambele părți și găsim soluțiile pentru coeficienții d_i:

$$\begin{aligned}
d_1 &= -\,\mathrm{tr}\,(\mathscr{A}\mathbf{P}_0),\\
d_2 &= -\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(\mathscr{A}\mathbf{P}_1),\\
d_3 &= -\,\tfrac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,(\mathscr{A}\mathbf{P}_2),\\
&\;\vdots\\
d_k &= -\,\frac{1}{k}\,\mathrm{tr}\,(\mathscr{A}\mathbf{P}_{k-1}),\\
&\;\vdots\\
d_n &= -\,\frac{1}{n}\,\mathrm{tr}\,(\mathscr{A}\mathbf{P}_{n-1}).
\end{aligned} \tag{97}$$

Acest set de expresii pentru coeficienţii d_k, împreună cu (91) pentru matricele $\mathbf{P}_k$, constituie un algoritm, cu un număr finit de etape, pentru calculul matricei rezolvante, $(s\mathbf{U} - \mathscr{A})^{-1}$. Le vom scrie din nou, parte cu parte, arătînd succesiunea etapelor:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}_0 = \mathbf{U} && \to d_1 = -\operatorname{tr}(\mathscr{A}),\\
&\mathbf{P}_1 = \mathscr{A} + d_1\mathbf{U} && \to d_2 = -\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathscr{A}\mathbf{P}_1).,\\
&\mathbf{P}_2 = \mathscr{A}\mathbf{P}_1 + d_2\mathbf{U} && \to d_3 = -\tfrac{1}{3}\operatorname{tr}(\mathscr{A}\mathbf{P}_2),\\
&\quad\vdots \qquad \vdots && \quad \vdots \qquad \vdots\\
&\mathbf{P}_k = \mathscr{A}\mathbf{P}_{k-1} + d_k\mathbf{U} && \to d_{k+1} = -\frac{1}{k+1}\operatorname{tr}(\mathscr{A}\mathbf{P}_k),\\
&\quad\vdots \qquad \vdots && \quad \vdots \qquad \vdots\\
&\mathbf{P}_{n-1} = \mathscr{A}\mathbf{P}_{n-2} + d_{n-1}\mathbf{U} && \to d_n = -\frac{1}{n}\operatorname{tr}(\mathscr{A}\mathbf{P}_{n-1}),\\
&\qquad 0 = \mathscr{A}\mathbf{P}_{n-1} + d_n\mathbf{U} \text{ (restricţie).}
\end{aligned}
\tag{98}
$$

Ultima ecuaţie a acestui set poate fi folosită ca o restricţie, deoarece toate componentele sale au fost deja determinate în etapele anterioare. Dacă ecuaţia nu este satisfăcută, atunci a fost o eroare (sau mai multe).

O problemă importantă care priveşte algoritmul matricei rezolvante este faptul că toate etapele incluse sînt operaţii numerice pure: variabila s nu apare. În consecinţă, deşi se pare că există o mare cantitate de operaţii aritmetice matriceale, algoritmul poate fi uşor programat pe un calculator.

Un rezultat parţial al algoritmului este o evaluare a inversei lui $\mathscr{A}$ cînd zero nu este o valoare proprie a lui $\mathscr{A}$. În acest caz $d_n = d(0) \neq 0$. Din (86), $(s\mathbf{U} - \mathscr{A})^{-1} = \mathbf{P}(s)/d(s)$. Punînd $s = 0$ se obţine $-\mathscr{A}^{-1} = \mathbf{P}(0)/d(0)$, sau

$$\mathscr{A}^{-1} = -\frac{\mathbf{P}_{n-1}}{d_n}. \tag{99}$$

Pentru a ilustra algoritmul matricei rezolvante, considerăm din nou exemplul tratat anterior. Etapele algoritmului sînt următoarele:

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$d_1 = -\,\mathrm{tr}\,\mathscr{A} = (2 + 3 + 2) = 7.$$

$$\mathbf{P}_1 = \mathscr{A} + 7\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathscr{A}\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} -10 & 8 & 9 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

$$d_2 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(\mathscr{A}\mathbf{P}_1) = 16,$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathscr{A}\,\mathbf{P}_1 + 16U = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathscr{A}\,\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix},$$

$$d_3 = -\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,(\mathscr{A}\,\mathbf{P}_2) = 12.$$

Ca o restricție, se găsește că $\mathscr{A}\mathbf{P}_2 + 12\mathbf{U} = 0$. Se poate scrie acum matricea rezolvantă:

$$(s\mathbf{U} - \mathscr{A})^{-1} = \frac{\mathbf{U}s^3 + \mathbf{P}_1 s + \mathbf{P}_2}{s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} s^2 + 5s + 6 & s + 8 & 3s + 9 \\ 0 & s^2 + 4s + 4 & 0 \\ 0 & 2s + 4 & s^2 + 5s + 6 \end{bmatrix}}{s^2 + 7s^2 + 16s + 12}.$$

În ultima etapă, rezultatul a fost rearanjat într-o singură matrice. Comparăm acest rezultat cu soluția anterioară. Deoarece zero nu este o valoare proprie a lui $\mathscr{A}$, (99) conduce la un rezultat colateral:

$$\mathscr{A}^{-1} = -\frac{1}{d_3}\mathbf{P}_2 = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Menționăm că algoritmul dă polinomul caracteristic $\tilde{c}(s)$ în formă dezvoltată. Pentru a găsi matricea constituentă mai este necesar (1)

să factorizăm $d(s)$ pentru a găsi valorile proprii şi (2) să obţinem o dezvoltare în fracţii parţiale. Algoritme de calcul pentru prima din acestea sînt accesibile direct [1]).

Polinoame rezolvante

Referitor la (84), ne amintim că matricele constituante $\mathbf{K}_{ij}$ depind numai de $\mathscr{A}$, nu şi de o funcţie specifică. Aşa cum am menţionat anterior, dacă aceste matrice pot fi evaluate pentru anumite funcţii specifice, rezultatul astfel obţinut va fi bun pentru orice altă funcţie. Am găsit o funcţie care conduce la matricea rezolvantă $(s\mathrm{U} - \mathscr{A})^{-1}$, cu ajutorul căreia se pot evalua matricele constituante. Vom discuta acum un set de funcţii care pot face de asemenea acest lucru.

Considerăm un set de funcţii $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s)$, fiecare fiind un polinom. Fiecare din aceste polinoame poate fi folosit în (84) şi va conduce la o ecuaţie în care necunoscutele sînt matricele constituante. Vor exista atîtea ecuaţii, cîte necunoscute sînt. În formă matriceală aceste ecuaţii se scriu astfel:

$$\begin{bmatrix} f_1(s_1) & \dfrac{f_1^{(1)}(s_1)}{1!} & \cdots & \dfrac{f_1^{(r_1-1)}(s_1)}{(r_1-1)!} & \vdots & f_1(s_2) & \cdots & \dfrac{f_1^{(r_k-1)}(s_k)}{(r_k-1)!} \\ f_2(s_1) & \dfrac{f_2^{(1)}(s_1)}{1!} & \cdots & \dfrac{f_2^{(r_1-1)}(s_1)}{(r_1-1)!} & \vdots & f_2(s_2) & \cdots & \dfrac{f_2^{(r_k-1)}(s_k)}{(r_k-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(s_1) & \dfrac{f_n^{(1)}(s_1)}{1!} & \cdots & \dfrac{f_n^{(r_1-1)}(s_1)}{(r_1-1)!} & \vdots & f_n(s_2) & \cdots & \dfrac{f_n^{(r_k)-1}(s_k)}{(r_k-1)!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} \\ \mathbf{K}_{12} \\ \vdots \\ \mathbf{K}_{1r_1} \\ \cdots \\ \mathbf{K}_{21} \\ \vdots \\ \mathbf{K}_{kr_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathscr{A}) \\ \\ f_2(\mathscr{A}) \\ \vdots \\ f_n(\mathscr{A}) \end{bmatrix} \tag{100}$$

Numim această ecuaţie, *ecuaţia rezolvantă*. Deşi elementele vectorului sînt matrice patrate de ordinul n, aceste matrice sînt tratate ca o singură cantitate cînd este interpretată multiplicarea matricei date. Astfel, cînd se realizează multiplicarea matricei, se obţin termeni în care o matrice

---

[1]) Algoritmul diferenţei citurilor este una din cele mai cunoscute metode de determinare a zerourilor unui polinom. Algoritmul este descris în: P. Henrici, *Elements of Numerical Analysis*, John Wiley, New York, 1964, Chap. 8.

este multiplicată printr-un scalar — o operaţie perfect valabilă; de exemplu, în primul rînd al produsului,

$$f_1(s_1)\mathbf{K}_{11} + \frac{f_1^{(1)}(s_1)}{1!}\mathbf{K}_{12} + \ldots + \frac{f_1^{(r_1-1)}(s_1)}{(r_1-1)!}\mathbf{K}_{1r_1} + \\ + f_1(s_2)\mathbf{K}_{21} + \ldots + \frac{f_1^{(r_k-1)}(s_k)}{(r_k-1)!}\mathbf{K}_{kr_k} \tag{101}$$

matricea $\mathbf{K}_{21}$ este multiplicată prin scalarul $f_1(s_2)$.

Dacă este acceptat acest mod de abordare, matricea coeficienţilor din (100) trebuie să fie nesingulară şi uşor de inversat. Apare o problemă de alegere a unui set corespunzător de polinoame care vor fi numite *polinoame rezolvante.*

Cel mai simplu polinom este o putere de s. Astfel, un set posibil de polinoame rezolvante este:

$$f_i(s) = s^{i-1} \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{102}$$

Decît să scriem expresia generală în acest caz, presupunem de exemplu, că polinomul caracteristic este $d(s) = (s - s_1)^2 \,.\, (s - s_2)^2$. Atunci $n = 4$ şi $f_1 = 1$, $f_2 = s$, $f_3 = s^2$ şi $f_4 = s^3$. Deci (100) devine

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 1 & s_2 & 1 \\ s_1^2 & 2s_1 & s_2^2 & 2s_2 \\ s_1^3 & 3s_1^2 & s_2^3 & 3s_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} \\ \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} \\ \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathscr{A} \\ \mathscr{A}^2 \\ \mathscr{A}^3 \end{bmatrix}. \tag{103}$$

Este clar că elementele vectorului din partea dreaptă sînt uşor de determinat în acest caz, dar că inversa matricei va necesita eforturi considerabile, mai ales cînd n este mult mai mare.

Pentru o ilustrare mai explicită să considerăm exemplul dat anterior în care:

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} d(s) &= (s+2)^2(s+3), \\ s_1 &= -2, \\ s_2 &= -3. \end{aligned} \tag{104}$$

Cu polinoamele rezolvante alese în concordanţă cu (102), obţinem pentru (100)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} \\ \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathscr{A} \\ \mathscr{A}^2 \end{bmatrix}.$$

Inversăm această ecuaţie şi obţinem

$$\begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \\ K_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 6 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \mathscr{A} \\ \mathscr{A}^2 \end{bmatrix}$$

care în formă dezvoltată dă:

$$\begin{aligned} K_{11} &= -3U - 4\mathscr{A} - \mathscr{A}^2, \\ K_{12} &= 6U + 5\mathscr{A} + \mathscr{A}^2, \\ K_{21} &= 4U + 4\mathscr{A} + \mathscr{A}^2. \end{aligned} \tag{105}$$

Rezolvarea completă a problemei se obţine prin introducerea lui $\mathscr{A}$ şi $\mathscr{A}^2$ în aceste ecuaţii şi verificarea obţinerii aceloraşi matrice constituante ca mai înainte.

O altă alegere a setului de polinoame este următoarea:

$$\begin{aligned} f_1(s) &= 1, \\ f_2(s) &= (s - s_1), \\ f_3(s) &= (s - s_1)^2, \\ &\vdots \\ f_{r_1+1}(s) &= (s - s_1)^{r_1}, \\ f_{r_1+2}(s) &= (s - s_1)^{r_1}(s - s_2), \\ &\vdots \\ f_{r_1+r_2+1}(s) &= (s - s_1)^{r_1}(s - s_2)^{r_2}, \\ f_{r_1+r_2+2}(s) &= (s - s_1)^{r_1}(s - s_2)^{r_2}(s - s_3), \\ &\vdots \\ f_n(s) &= (s - s_1)^{r_1}(s - s_2)^{r_2} \dots (s - s_k)^{r_k - 1}, \end{aligned} \tag{106}$$

unde s_i sînt valori proprii. În acest caz evaluarea lui $f_i(\mathscr{A})$ va necesita un efort mare, dar matricea (100) va fi uşor de inversat. Considerăm din nou cazul particular în care $d(s) = (s - s_1)^2(s - s_2)^2$. Atunci:

$$\begin{aligned} f_1(s) &= 1, & f_1(\mathscr{A}) &= U, \\ f_2(s) &= (s - s_1), & f_2(\mathscr{A}) &= (\mathscr{A} - s_1U), \\ f_3(s) &= (s - s_1)^2, & f_3(\mathscr{A}) &= (\mathscr{A} - s_1U)^2, \\ f_4(s) &= (s - s_1)^2(s - s_2), & f_4(\mathscr{A}) &= (\mathscr{A} - s_1U)^2(\mathscr{A} - s_2U), \end{aligned}$$

şi (100) devine:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & (s_2 - s_1) & 1 \\ 0 & 0 & (s_2 - s_1)^2 & 2(s_2 - s_1) \\ 0 & 0 & 0 & (s_2 - s_1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} \\ \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} \\ \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathscr{A} - s_1\mathbf{U} \\ (\mathscr{A} - s_1\mathbf{U})^2 \\ (\mathscr{A} - s_1\mathbf{U})^2(\mathscr{A} - s_2\mathbf{U}) \end{bmatrix} \tag{107}$$

În acest caz matricea coeficienţilor este superior triunghiulară şi poate fi uşor inversată. Aceasta este în general adevărată pentru această selectare a polinoamelor rezolvante.

Pentru exemplul tratat anterior, dat în (104), ecuaţia rezolvantă devine:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} \\ \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathscr{A} + 2\mathbf{U} \\ (\mathscr{A} + 2\mathbf{U})^2 \end{bmatrix}$$

care poate fi inversată direct obţinînd:

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{U} - (\mathscr{A} + 2\mathbf{U})^2 = -3\mathbf{U} - 4\mathscr{A} - \mathscr{A}^2.$$

$$\mathbf{K}_{12} = (\mathscr{A} + 2\mathbf{U}) + (\mathscr{A} + 2\mathbf{U})^2 = 6\mathbf{U} + 5\mathscr{A} + \mathscr{A}^2.$$

$$\mathbf{K}_{21} = (\mathscr{A} + 2\mathbf{U})^2 = 4\mathbf{U} + 4\mathscr{A} + \mathscr{A}^2.$$

Comparînd aceste ultime relaţii cu (105) găsim că ele sînt identice.

În acest paragraf am tratat un număr de metode de evaluare a funcţiei de o matrice. Fiecare metodă are anumite avantaje şi dezavantaje. Unele se aplică mai uşor la matrice de ordin redus; altele sînt adecvate pentru evaluarea numerică cu ajutorul calculatorului. Ceea ce este important este să se determine expresiile în formă închisă echivalente pentru funcţia $\varepsilon^{\mathscr{A}t}$, care constituie soluţia unei ecuaţii de stare omogenă.

4.5. FORMULAREA SISTEMATICĂ A ECUAŢIILOR DE STARE

Să trecem în revistă pe scurt rezultatele obţinute pînă acum în acest capitol. Am început prin a considera ordinul de complexitate al unei reţele. Am găsit că numărul de variabile independente dinamice pentru reţelele

RLC este egal cu numărul de elemente reactive, din care se scade numărul contururilor de capacităţi şi numărul secţiunilor de inductanţe. Pentru o reţea care conţine componente multiterminale (surse comandate, etc.) pot fi introduse constrîngeri algebrice adiţionale, între tensiunile pe capacităţi şi curenţii prin inductanţe, reducîndu-se astfel ordinul de complexitate. Noi presupunem aici că în toate cazurile, ordinul de complexitate este acelaşi cu cel calculat pentru o reţea *RLC*. Dacă reiese că presupunerea este falsă pentru o reţea particulară, atunci va fi imposibil de obţinut ecuaţiile în forma dorită, folosind metoda pe care o vom descrie. Se va da un exemplu pentru verificare.

În continuare, am definit un arbore normal al unui graf, ca unul care conţine numărul maxim de capacităţi şi numărul minim de inductanţe ca şi toate sursele de tensiune independente, însă nici o sursă de curent independentă. Am arătat cu ajutorul exemplelor că poate fi scris un sistem de ecuaţii de reţea, care să aibe ca variabile tensiunile ramurilor de capacităţi şi curenţii coardelor de inductanţe dintr-un arbore normal. Ecuaţiile au forma generală :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathscr{A}\mathbf{x} + \mathscr{B}_1\mathbf{e} + \mathscr{B}_2\frac{d\mathbf{e}}{dt}, \tag{108a}$$

$$\mathbf{w} = \mathscr{C}\mathbf{x} + \mathscr{D}_1\mathbf{e} + \mathscr{D}_2\frac{d\mathbf{e}}{dt}. \tag{108b}$$

Prin transformarea $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \mathscr{B}_2\mathbf{e}$, acestea pot fi reduse la :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathscr{A}\mathbf{x} + \mathscr{B}\mathbf{e}, \tag{109a}$$

$$\mathbf{w} = \mathscr{C}\mathbf{x} + \mathscr{D}\mathbf{e} + \hat{\mathscr{D}}\frac{d\mathbf{e}}{dt}, \tag{109b}$$

unde :

$$\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 + \mathscr{A}\mathscr{B}_2,\ \mathscr{D} = \mathscr{D}_1 + \mathscr{C}\mathscr{B}_2 \text{ şi } \hat{\mathscr{D}} = \mathscr{D}_2.$$

Ecuaţia (109*a*) este forma normală a ecuaţiei de stare; $\mathbf{x}$ este vectorul de stare, şi elementele sale sînt variabilele de stare. În realitate, vectorul de stare din ultima pereche de ecuaţii este o combinaţie liniară a „vectorului de stare" iniţial (cu tensiunile ramurilor de capacităţi şi curenţii contururilor de inductanţe ca variabile) şi vectorul sursă $\mathbf{e}$. Chiar cu această transformare, ecuaţia a doua din pereche — ecuaţia de ieşire — poate să conţină încă termenul $d\mathbf{e}/dt$. Vom stabili pe scurt condiţiile în

care va apare aceasta. Pentru mai multă exactitate, ne vom referi la prima ecuație din fiecare pereche ca la *ecuația de stare* și la a doua ecuație a fiecărei perechi ca la *ecuația de ieșire.* Cele două ecuații vor forma *ecuațiile de stare.*

În continuare ne-a preocupat rezolvarea ecuației de stare și aceasta a fost făcută prin găsirea în primul rînd a unei soluții pentru ecuația omogenă (cu e = 0).

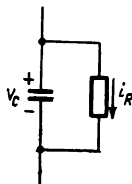


Fig. 4.6.

Simbolic această soluție implică exponențiala matricială $\varepsilon^{\mathcal{A}t}$, astfel că am căutat să determinăm metode de evaluare a acestor funcții de o matrice. Odată ce exponențiala matricială este evaluată, vectorul de stare este găsit din (45). Vom amîna considerațiile următoare de evaluare a acestei integrale și consecințele ei pentru capitolul următor.

Trebuie să găsim o formă de scriere a ecuațiilor de stare (109) pentru o rețea dată și să arătăm că este generală. Să observăm pentru început că este posibil să alegem ca variabile de stare, unele variabile care nu sînt tensiuni pe capacități și curenți prin inductanțe.

În fig. 4.6 de exemplu, trebuie aleasă ca variabilă de stare curentul prin rezistență i_R, și nu tensiunea pe capacitate — deoarece v_c este direct proporțional cu i_R.

Considerații topologice

Prima etapă constă în selectarea unui arbore normal (sau arborescență normală). În general acesta nu este unic. Dacă nu există degenerări (contururi de capacități sau secțiuni de inductanțe), cel puțin elementele reactive vor fi atribuite în mod unic la arborele sau coarborele normal — dar nu și elementele rezistive. Totuși, cînd există degenerări, va fi necesară o alegere chiar pentru elementele reactive.

În concordanță cu convenția noastră obișnuită în scrierea unei matrice de contururi sau secțiuni, numerotăm mai întîi ramurile și apoi coardele. Vom face aici o convenție mai detaliată de numerotare a laturilor și adop-

tăm următoarea ordine în interiorul celor două categorii de ramuri şi coarde:

Ramuri	*Coarde*
1. Ramuri de surse de tensiune	1. Coarde de capacităţi
2. Ramuri de capacităţi	2. Coarde de rezistenţe
3. Ramuri de rezistenţe	3. Coarde de inductanţe
4. Ramuri de inductanţe	4. Coarde de surse de curenţi

Menţionăm că termenii „ramură de rezistenţă" şi „coardă de rezistenţă" includ laturi de multiterminale ca: giratori şi surse comandate a căror relaţii $v - i$ sînt algebrice ca la o rezistenţă. Nu impunem o ordonare specială în numerotarea unor astfel de laturi, dar ele sînt incluse printre laturile care reprezintă rezistenţe. Această numerotare a laturilor conduce la o separare a vectorilor de curent şi tensiune după cum urmează:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_t \\ \mathbf{v}_l \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{v}_{Rt} \\ \mathbf{v}_{Lt} \end{bmatrix} \text{ şi } \mathbf{v}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Cl} \\ \mathbf{v}_{Rl} \\ \mathbf{v}_{Ll} \\ \mathbf{v}_J \end{bmatrix}, \tag{110a}$$

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_t \\ \mathbf{i}_l \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{i}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_E \\ \mathbf{i}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Rt} \\ \mathbf{i}_{Lt} \end{bmatrix} \text{ şi } \mathbf{i}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{Cl} \\ \mathbf{i}_{Rl} \\ \mathbf{i}_{Ll} \\ \mathbf{i}_J \end{bmatrix}, \tag{110b}$$

unde, de exemplu, $\mathbf{v}_{Ct}$ este vectorul tensiunilor ramurilor de capacităţi şi $\mathbf{v}_{Rl}$ este vectorul curenţilor coardelor de rezistenţă. Nu am mai folosit indicele t corespunzător ramurilor (twigs) în scrierea lui $\mathbf{v}_E$ şi $\mathbf{i}_E$, şi nici a indicelui l corespunzător coardei (link) în scrierea lui $\mathbf{i}_J$ şi $\mathbf{v}_J$, deoarece sursele de tensiune sînt totdeauna ramuri şi sursele de curent sînt totdeauna coarde.

Următoarea etapă este scrierea ecuaţiilor LKV pentru contururile f şi ecuaţiile LKC pentru secţiunile f, ca în (6) şi (7). Ele sînt repetate mai jos:

$$\mathbf{Qi} = 0, \text{ sau } \mathbf{i}_t = -\mathbf{Q}_l\mathbf{i}_l, \tag{111a}$$

$$\mathbf{Bv} = \mathbf{0}, \text{ sau } \mathbf{v}_l = -\mathbf{B}_t\mathbf{v}_t = \mathbf{Q}_l'\mathbf{v}_t, \tag{111b}$$

descompunerea obişnuită fiind: $\mathbf{Q} = [\mathbf{U}\ \mathbf{Q}_l]$, $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_t\ \mathbf{U}]$. Ultima etapă de calcul rezultă din $\mathbf{B}_t = -\mathbf{Q}'_l$. Dacă introducem aici vectorii de curenţi şi tensiuni descompuşi în concordanţă cu (110), trebuie descompusă şi matricea $\mathbf{Q}_l$ în mod corespunzător, adică în 4 linii şi coloane. Fiecare linie a lui $\mathbf{Q}$ corespunde unei secţiuni f definite de o ramură a arborelui

normal. Coloanele corespund coardelor. Dacă aranjăm coloanele şi liniile în ordinea convenţională stabilită mai sus, $\mathbf{Q}_l$ trebuie să ia forma

$$\begin{array}{ll} & \text{coarde} \rightarrow \quad C \quad R \quad L \quad J \\ & \text{ramuri} \downarrow \end{array}$$

$$\mathbf{Q}_l = \begin{array}{c} E \\ C \\ R \\ L \end{array}\begin{bmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{bmatrix}$$

Dacă există o coardă de capacitate, existenţa ei va fi determinată de existenţa unui contur de capacităţi. Deoarece nu există rezistenţe şi inductanţe într-un astfel de contur, coloana C care corespunde unei coarde de capacităţi nu poate avea o intrare diferită de zero în liniile care corespund ramurilor R şi L; adică, intrările din prima coloană şi liniile trei şi patru trebuie să fie zero. În mod similar, dacă există o ramură de inductanţe, ea va fi determinată de existenţa unei secţiuni de inductanţe. De asemeni nu pot exista rezistenţe şi capacităţi într-o astfel de secţiune, linia corespunzătoare ramurilor de inductanţe nu poate avea intrări diferite de zero în coloanele care corespund coardelor C şi R. Deci $\mathbf{Q}_l$ poate fi scris astfel:

coarde →
ramuri ↓

$$\mathbf{Q}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{EC} & \mathbf{Q}_{ER} & \mathbf{Q}_{EL} & \mathbf{Q}_{EJ} \\ \mathbf{Q}_{CC} & \mathbf{Q}_{CR} & \mathbf{Q}_{CL} & \mathbf{Q}_{CJ} \\ 0 & \mathbf{Q}_{RR} & \mathbf{Q}_{RL} & \mathbf{Q}_{RJ} \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}_{LL} & \mathbf{Q}_{LJ} \end{bmatrix}. \tag{112}$$

Cînd introducem aceasta în ecuaţiile Kirchhoff din (111), rezultatul poate fi dezvoltat iar ca mai jos:

$$\mathbf{i}_E = -\mathbf{Q}_{EC}\mathbf{i}_{Cl} - \mathbf{Q}_{ER}\mathbf{i}_{Rl} - \mathbf{Q}_{EL}\mathbf{i}_{Ll} - \mathbf{Q}_{EJ}\mathbf{i}_J \tag{113a}$$

$$\mathbf{i}_{Ct} = -\mathbf{Q}_{CC}\mathbf{i}_{Cl} - \mathbf{Q}_{CR}\mathbf{i}_{Rl} - \mathbf{Q}_{CL}\mathbf{i}_{Ll} - \mathbf{Q}_{CJ}\mathbf{i}_J \tag{113b}$$

$$\mathbf{i}_{Rt} = -\mathbf{Q}_{RR}\mathbf{i}_{Rl} - \mathbf{Q}_{RL}\mathbf{i}_{Ll} - \mathbf{Q}_{RJ}\mathbf{i}_J \tag{113c}$$

$$\mathbf{i}_{Lt} = -\mathbf{Q}_{LL}\mathbf{i}_{Ll} - \mathbf{Q}_{LJ}\mathbf{i}_J \tag{113d}$$

$$\mathbf{v}_{Cl} = \mathbf{Q}'_{EC}\mathbf{v}_E + \mathbf{Q}'_{CC}\mathbf{v}_{Ct} \tag{113e}$$

$$\mathbf{v}_{Rl} = \mathbf{Q}'_{ER}\mathbf{v}_E + \mathbf{Q}'_{CR}\mathbf{v}_{Ct} + \mathbf{Q}'_{RR}\mathbf{v}_{Rt} \tag{113f}$$

$$\mathbf{v}_{Ll} = \mathbf{Q}'_{EL}\mathbf{v}_E + \mathbf{Q}'_{CL}\mathbf{v}_{Ct} + \mathbf{Q}'_{RL}\mathbf{v}_{Rt} + \mathbf{Q}'_{LL}\mathbf{v}_{Lt} \tag{113g}$$

$$\mathbf{v}_J = \mathbf{Q}'_{EJ}\mathbf{v}_E + \mathbf{Q}'_{CJ}\mathbf{v}_{Ct} + \mathbf{Q}'_{RJ}\mathbf{v}_{Rt} + \mathbf{Q}'_{LJ}\mathbf{v}_{Lt} \tag{113h}$$

Pentru a ilustra această divizare să ne întoarcem la exemplul considerat anterior în acest capitol. Din fig. 4.4 matricea $\mathbf{Q}_l$ este:

$$\mathbf{Q}_l = \begin{array}{c} \\ E \\ \\ C \\ \\ R \end{array} \overset{\qquad R \qquad\qquad L}{\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{Q}_{ER} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{Q}_{EL} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ , \mathbf{Q}_{CR} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & \mathbf{Q}_{CL} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{RR} = [1 \quad 0 \quad 0], & \mathbf{Q}_{RL} = [1]. \end{array}$$

Deoarece nu există ramuri de inductanțe, coarde de capacități, sau surse de curent în rețea, matricea $\mathbf{Q}_l$ apare într-o formă simplificată.

Eliminarea variabilelor nedorite

Pînă în acest punct, discuția a fost făcută pe considerente topologice. Trebuie să ne întoarcem acum la relațiile $v - i$. Să scriem în primul rînd aceste ecuații pentru elementele reactive; astfel:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Cl} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{v}_{Cl} \end{bmatrix} \tag{114a}$$

și

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Lt} \\ \mathbf{v}_{Ll} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{tt} & \mathbf{L}_{tl} \\ \mathbf{L}_{lt} & \mathbf{L}_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{Lt} \\ \mathbf{i}_{Ll} \end{bmatrix}. \tag{114b}$$

În aceste expresii $\mathbf{C}_t$ și $\mathbf{C}_l$ sînt matricele ramurilor și coardelor de capacități; ambele sînt diagonale. Deoarece pot exista inductanțe mutuale, pot apare cuplaje între ramuri și coarde de inductanțe tot așa de bine ca și între ramurile de inductanțe și între coardele de inductanțe. Nu este necesar deci ca matricele de inductanțe să fie diagonale. ($\mathbf{L}_{tl}$ și $\mathbf{L}_{lt}$ nu sînt chiar patrate), dar $\mathbf{L}_{tt}$ și $\mathbf{L}_{ll}$ sînt simetrice și $\mathbf{L}_{tl} = \mathbf{L}'_{lt}$. Menționăm că menținînd matricele de capacități și inductanțe sub semnul derivatei, aceste expresii se aplică tot așa de bine rețelelor variabile în timp.

Variabilele care pot interesa sînt $\mathbf{v}_{Ct}$ și $\mathbf{i}_{Ll}$; toate celelalte trebuie eliminate. Pentru capacități, aceasta înseamnă eliminarea lui $\mathbf{i}_{Ct}$, $\mathbf{v}_{Cl}$ și

$\mathbf{i}_{Ct}$. Să începem această operaţiune prin scrierea lui (113b) după cum urmează:

$$\mathbf{i}_{Ct} + \mathbf{Q}_{CC}\mathbf{i}_{Cl} = [\mathbf{U} \quad \mathbf{Q}_{CC}]\begin{bmatrix}\mathbf{i}_{Ct}\\ \mathbf{i}_{Cl}\end{bmatrix} \tag{115}$$
$$= -\mathbf{Q}_{CR}\mathbf{i}_{Rl} - \mathbf{Q}_{CL}\mathbf{i}_{Ll} - \mathbf{Q}_{CJ}\mathbf{i}_J$$

În partea stîngă, introducem relaţia $v - i$ pentru capacităţi din 114). Aceasta devine:

$$[\mathbf{U} \;\; \mathbf{Q}_{CC}]\begin{bmatrix}\mathbf{i}_{Ct}\\ \mathbf{i}_{Cl}\end{bmatrix} = [\mathbf{U} \quad \mathbf{Q}_{CC}]\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\mathbf{C}_t & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{Ct}\\ \mathbf{v}_{Cl}\end{bmatrix}$$
$$= \frac{d}{dt}[\mathbf{U} \quad \mathbf{Q}_{CC}]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_t & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{Ct}\\ \mathbf{Q}'_{CC}\mathbf{v}_{Ct} + \mathbf{Q}'_{EC}\mathbf{v}_E\end{bmatrix}$$
$$= \frac{d}{dt}[\mathbf{U} \quad \mathbf{Q}_{CC}]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_t & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{Q}'_{CC}\end{bmatrix}\mathbf{v}_{Ct} \tag{116}$$
$$+ \frac{d}{dt}[\mathbf{U} \quad \mathbf{Q}_{CC}]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_t & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{Q}'_{EC}\end{bmatrix}\mathbf{v}_E.$$

Următoarele etape rezultă din substituirea lui $\mathbf{v}_{Cl}$ din (113e). Pentru simplificare definim:

$$\mathscr{C} = [\mathbf{U} \quad \mathbf{Q}_{CC}]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_t & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{Q}'_{CC}\end{bmatrix} = \mathbf{C}_t + \mathbf{Q}_{CC}\mathbf{C}_l\mathbf{Q}'_{CC}, \tag{117}$$

care este egală cu $\mathbf{C}_t$ dacă nu există contururi de capacităţi, şi

$$\hat{\mathscr{C}} = -[\mathbf{U} \quad \mathbf{Q}_{CC}]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_t & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{Q}'_{EC}\end{bmatrix} = -\mathbf{Q}_{CC}\mathbf{C}_l\mathbf{Q}'_{EC}, \tag{118}$$

care este matricea zero cînd nu există contururi care să conţină numai capacităţi *şi* surse de tensiune independente. Prin introducerea ultimelor două ecuaţii în (115), obţinem:

$$\frac{d}{dt}(\mathscr{C}\mathbf{v}_{Ct}) = -\mathbf{Q}_{CR}\mathbf{i}_{Rl} - \mathbf{Q}_{CL}\mathbf{i}_{Ll} - \mathbf{Q}_{CJ}\mathbf{i}_J + \frac{d}{dt}(\hat{\mathscr{C}}\mathbf{v}_E). \tag{119}$$

Mai există încă o variabilă nedorită aici, $\mathbf{i}_{Rl}$, dar înainte de a discuta eliminarea ei, să ajungem la un rezultat similar pentru inductanţe.

Începem această operaţiune prin scrierea lui (113g) astfel:

$$\mathbf{v}_{Ll} - \mathbf{Q}'_{LL}\mathbf{v}_{Lt} = [\mathbf{U} \quad -\mathbf{Q}'_{LL}]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{Ll}\\ \mathbf{v}_{Lt}\end{bmatrix} = \mathbf{Q}'_{EL}\mathbf{v}_E + \mathbf{Q}'_{CL}\mathbf{v}_{Ct} + \mathbf{Q}'_{RL}\mathbf{v}_{Rt}. \quad (120)$$

În această relaţie vom introduce de asemenea relaţiile $v - i$ din (114). Partea stîngă a acestei relaţii devine:

$$[\mathbf{U} \quad -\mathbf{Q}'_{LL}]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{Ll}\\ \mathbf{v}_{Lt}\end{bmatrix} = [\mathbf{U} - \mathbf{Q}'_{LL}]\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\mathbf{L}_{ll} & \mathbf{L}_{lt}\\ \mathbf{L}_{tl} & \mathbf{L}_{tt}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{i}_{Ll}\\ \mathbf{i}_{Lt}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[[\mathbf{U} - \mathbf{Q}'_{LL}]\begin{bmatrix}\mathbf{L}_{ll} & \mathbf{L}_{lt}\\ \mathbf{L}_{tl} & \mathbf{L}_{tt}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{i}_{Ll}\\ -\mathbf{Q}_{LL}\mathbf{i}_{Ll} - \mathbf{Q}_{LJ}\mathbf{i}_J\end{bmatrix}\right].$$

$$= \frac{d}{dt}[\mathbf{U} - \mathbf{Q}'_{LL}]\begin{bmatrix}\mathbf{L}_{ll} & \mathbf{L}_{lt}\\ \mathbf{L}_{tl} & \mathbf{L}_{tt}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{U}\\ -\mathbf{Q}_{LL}\end{bmatrix}\mathbf{i}_{Ll} \quad (121)$$

$$+ \frac{d}{dt}[\mathbf{U} - \mathbf{Q}'_{LL}]\begin{bmatrix}\mathbf{L}_{ll} & \mathbf{L}_{lt}\\ \mathbf{L}_{tl} & \mathbf{L}_{tt}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ -\mathbf{Q}_{LJ}\end{bmatrix}\mathbf{i}_J.$$

Următoarea etapă constă în înlocuirea lui $\mathbf{i}_{Lt}$ din (113). Pentru simplificare, definim:

$$\mathscr{L} = [\mathbf{U} - \mathbf{Q}'_{LL}]\begin{bmatrix}\mathbf{L}_{ll} & \mathbf{L}_{lt}\\ \mathbf{L}_{tl} & \mathbf{L}_{tt}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{U}\\ -\mathbf{Q}_{LL}\end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{L}_{ll} - \mathbf{L}_{lt}\mathbf{Q}_{LL} - \mathbf{Q}'_{LL}\mathbf{L}_{tl} + \mathbf{Q}'_{LL}\mathbf{L}_{tt}\mathbf{Q}_{LL}, \quad (122)$$

care este egală cu $\mathbf{L}_{ll}$ atunci cînd nu există secţiuni de inductanţe, şi

$$\hat{\mathscr{L}} = -[\mathbf{U} - \mathbf{Q}'_{LL}]\begin{bmatrix}\mathbf{L}_{ll} & \mathbf{L}_{lt}\\ \mathbf{L}_{tl} & \mathbf{L}_{tt}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ -\mathbf{Q}_{LJ}\end{bmatrix} = -\mathbf{Q}'_{LL}\mathbf{L}_{tt}\mathbf{Q}_{LJ} + \mathbf{L}_{lt}\mathbf{Q}_{LJ}, \quad (123)$$

$$= (\mathbf{L}_{lt} - \mathbf{Q}'_{LL}\mathbf{L}_{tt})\mathbf{Q}_{LJ}$$

care este matricea zero, dacă nu există secţiuni care să conţină numai inductanţe *şi* surse de curent independente. Introducînd ultimele două ecuaţii în (120), se obţine:

$$\frac{d}{dt}(\mathscr{L}\mathbf{i}_{Ll}) = \mathbf{Q}'_{CL}\mathbf{v}_{Ct} + \mathbf{Q}'_{RL}\mathbf{v}_{Rt} + \mathbf{Q}'_{EL}\mathbf{v}_E + \frac{d}{dt}(\hat{\mathscr{L}}\mathbf{i}_J). \quad (124)$$

Aceasta este duala lui (119). Ea conţine de asemeni variabila nedorită $\mathbf{v}_{Rt}$, tot aşa cum (119) conţine pe $\mathbf{i}_{Rl}$.

Pentru a continua procesul de eliminare va fi necesar să exprimăm relaţiile $v - i$ ale laturilor rezistive în termenii acestor două variabile $\mathbf{i}_{Rl}$ şi $\mathbf{v}_{Rt}$ (curenţii coardelor de rezistenţe şi tensiunile ramurilor de rezistenţe). Vom presupune că relaţiile $v - i$ pe laturile de rezistenţe pot fi scrise astfel:

$$\mathbf{i}_{Rl} = \mathbf{G}_{ll}\mathbf{v}_{Rl} + \mathbf{G}_{lt}\mathbf{i}_{Rt}, \qquad (125a)$$

$$\mathbf{v}_{Rt} = \mathbf{G}_{tl}\mathbf{v}_{Rl} + \mathbf{G}_{tt}\mathbf{i}_{Rt} \qquad (125b)$$

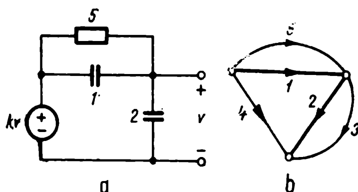


Fig. 4.7. Exemplu numeric.

Aceasta este una din formele parametrilor hibrizi [1]). Ea este diferită de aceea din capitolul 2 pentru ecuaţiile de variabile mixte. Pentru reţelele *RLC*, matricele $\mathbf{G}_{ll}$ şi $\mathbf{G}_{tt}$ vor fi diagonale, şi $\mathbf{G}_{lt}$ şi $\mathbf{G}_{tl}$ vor fi matrici zero. Mai general, nu este necesar ca vreuna din matrici să fie diagonală, ele pot fi toate diferite de zero. Aceasta nu ne asigură că pentru o reţea dată, există ecuaţii de forma (125); dacă ele nu există, metoda dezvoltată aici nu este aplicabilă. Aceasta nu înseamnă că nu există ecuaţii de stare, ci doar că această metodă nu este bună în acest caz.

Ca un exemplu simplu, să considerăm reţeaua din fig. 4.7. Arborele normal include numai două din capacităţi. Laturile de rezistenţe ale grafului sînt toate coarde, iar relaţiile lor $v - i$ au forma

$$i_3 = 0,$$

$$v_4 = kv_3 = kv_2,$$

$$i_5 = C_5 v_5.$$

1) Putem folosi relaţiile $v - i$, pe laturile de rezistenţe şi într-o altă formă decît a parametrilor hibrizi (aceea a parametrilor y, a parametrilor z, sau a parametrilor *ABCD*). Lăsăm aceste alte posibilităţi de reprezentare a relaţiilor $v - i$ pe laturile rezistive, ca un exerciţiu pentru dumneavoastră.

Ecuaţia a doua ne împiedică să scriem o ecuaţie de forma lui (125). Aceasta din cauza sursei de tensiune comandată de tensiunea pe o capacitate, care introduce o restricţie algebrică suplimentară între tensiunile pe capacităţi, reducînd în felul acesta ordinul de complexitate. Aceasta înseamnă că arborele normal trebuie să conţină numai o singură capacitate. Putem scrie ecuaţia de stare pentru această reţea, cu un efort foarte mic, demonstrînd că:

$$\frac{dv_2}{dt} = - \frac{G_5}{C_1 + C_2/(1-k)} v_2.$$

Întorcîndu-ne acum la problema eliminării lui i_{Rl} şi $\mathbf{v}_{Rt}$ din (119) şi (124), putem folosi pentru aceasta, relaţiile $v - i$ din (125) şi relaţiile topologice din (113*c*) şi (113*f*).

După ce ultimele două sînt substituite în primele două şi termenii rearanjaţi, rezultatul va fi:

$$(\mathbf{U} + \mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}_{RR})\mathbf{i}_{Rl} - \mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}'_{RR}\mathbf{v}_{Rt} =$$

$$= \mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}'_{CR}\mathbf{v}_{Ct} - \mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}_{RL}\mathbf{i}_{Ll} + \mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}'_{ER}\mathbf{v}_{E} - \mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}_{RJ}\mathbf{i}_{J}, \quad (126a)$$

$$\mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}_{RR}\mathbf{i}_{Rl} + (\mathbf{U} - \mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}'_{RR})\mathbf{v}_{Rt} =$$

$$= \mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}'_{CR}\mathbf{v}_{Ct} - \mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}_{RL}\mathbf{i}_{Ll} + \mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}'_{ER}\mathbf{v}_{E} - \mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}_{RJ}\mathbf{i}_{J}. \quad (126b)$$

Acestea sînt o pereche de ecuaţii algebrice vectoriale de două variabile i_{Rl} şi v_{Rt}. Ele vor avea o soluţie dacă următoarele matrice au inverse:

$$(\mathbf{U} + \mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}_{RR}) \quad (127a)$$

şi

$$\mathcal{X}_1 = (\mathbf{U} - \mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}'_{RR}) + \mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}_{RR}(\mathbf{U} + \mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}_{RR})^{-1}\mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}'_{RR} \quad (127b)$$

sau

$$(\mathbf{U} - \mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}'_{RR}) \quad (128a)$$

şi

$$\mathcal{X}_2 = (\mathbf{U} + \mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}_{RR}) + \mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}'_{RR}(\mathbf{U} - \mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}'_{RR})^{-1}\mathbf{G}_{ll}\mathbf{Q}_{RR}. \quad (128b)$$

Rămîne ca un exerciţiu pentru dumneavoastră să verificaţi aceasta.

Dacă aceste inverse nu există, nu putem aplica această metodă. Presupunem că ele există, şi că (126) poate fi rezolvat pentru $\mathbf{i}_{Rl}$ şi $\mathbf{v}_{Rt}$.

După ce substituim soluţiile în ecuaţiile pentru derivatele lui $\mathscr{C}\mathbf{v}_{Ct}$ şi $\mathscr{L}\mathbf{i}_{Ll}$ în (119) şi (124), expresiile care rezultă sînt extrem de complicate şi neinteresante.

Este clar, totuşi, că există termeni care implică variabilele de stare $\mathbf{v}_{Ct}$ şi $\mathbf{i}_{Ll}$, sursele $\mathbf{v}_E$ şi $\mathbf{i}_J$ şi derivatele lor. Nu vom intra în detalii, ci vom indica forma finală.

$$\frac{d}{dt}(\mathscr{C}\,\mathbf{v}_{Ct}) = [-\mathscr{Y}\;\mathscr{H}]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{Ct}\\ \mathbf{i}_{Ll}\end{bmatrix} + [-\hat{\mathscr{Y}}\;\hat{\mathscr{H}}]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_E\\ \mathbf{i}_J\end{bmatrix} + \frac{d}{dt}[\hat{\mathscr{C}}\;\mathbf{0}]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_E\\ \mathbf{i}_J\end{bmatrix}, \qquad (129a)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathscr{L}\,\mathbf{i}_{Ll}) = [\mathscr{G}\;-\mathscr{Z}]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{Ct}\\ \mathbf{i}_{Ll}\end{bmatrix} + [\hat{\mathscr{G}}\;-\hat{\mathscr{Z}}]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_E\\ \mathbf{i}_J\end{bmatrix} + \frac{d}{dt}[\mathbf{0}\;\hat{\mathscr{L}}]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_E\\ \mathbf{i}_J\end{bmatrix} \qquad (129b)$$

Simbolurile folosite pentru matrice au fost alese ţinînd seama de dimensiuni. Astfel $\mathscr{Y}$ şi $\hat{\mathscr{Y}}$ exprimă raportul între un vector de curent şi un vector de tensiune; astfel are dimensiuni de admitanţă. $\mathscr{H}$ şi $\mathscr{G}$ sînt fără dimensiuni; ele corespund matricelor hibride h şi matricelor hibride g. În această formă, ecuaţiile se aplică la fel de bine reţelelor variabile în timp ca şi la reţelele invariabile în timp. De asemenea, ele pot fi generalizate simplu pentru reţelele neliniare. Menţionăm că pentru a ajunge la aceste ecuaţii, am folosit toate relaţiile $v - i$ şi toate relaţiile topologice (Kirchhoff) din (113) cu excepţia primei şi ultimei ecuaţii, referitoare la curenţii surselor de tensiune şi tensiunile surselor de curent. Acestea două vor fi folosite pentru determinarea variabilelor de ieşire, presupunînd că toate elementele $\mathbf{i}_{ll}$ şi $\mathbf{v}_J$ sînt variabile de ieşire.

De fapt, vom stabili că, odată ce ecuaţia de stare şi soluţia ei sînt accesibile, toate celelalte variabile pot fi exprimate în termenii variabilelor de stare $\mathbf{v}_{Ct}$ şi $\mathbf{i}_{Ll}$, variabilelor $\mathbf{v}_E$ şi $\mathbf{i}_J$ ale surselor, şi derivatelor ultimelor, ca în (109). Verificarea acestei afirmaţii poate fi făcută analizînd ecuaţiile obţinute anterior. Lăsăm această verificare ca un exerciţiu pentru dumneavoastră.

Avînd în vedere (129) şi modul în care oricare din variabilele de ieşire este exprimată în termenii variabilelor de stare, rămîne de clarificat o problemă şi anume că derivatele tensiunilor surselor vor apare numai atunci cînd există un contur de capacităţi — şi chiar numai atunci cînd acest contur include o sursă de tensiune, ceea ce face pe $\hat{\mathscr{C}} = -\mathbf{Q}_{cc}\mathbf{C}_t\mathbf{Q}'_{EC}$ diferită de zero. În mod similar, derivatele curenţilor surselor vor apare numai atunci cînd există o secţiune de inductanţe — şi numai cînd această secţiune include o sursă de curent, ceea ce face ca $\hat{\mathscr{L}} = -\mathbf{Q}'_{LL}\mathbf{L}_{ll}\mathbf{Q}_{LJ} + -\mathbf{L}_{lt}\mathbf{Q}_{LJ}$ să fie diferită de zero. Numai în aceste cazuri, derivatele variabilelor asociate surselor pot apare în ecuaţia de stare.

Rețele invariabile în timp

Să ne limităm acum la rețele invariabile în timp. În acest caz, (129) poate fi rescris în forma :

$$\begin{bmatrix} \mathscr{C} & 0 \\ 0 & \mathscr{L} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Ll} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathscr{Y} & \mathscr{H} \\ \mathscr{G} & -\mathscr{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Ll} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -\hat{\mathscr{Y}} & \hat{\mathscr{H}} \\ \hat{\mathscr{G}} & -\hat{\mathscr{Z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{E} \\ \mathbf{i}_{J} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathscr{C}} & 0 \\ 0 & \hat{\mathscr{L}} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{E} \\ \mathbf{i}_{J} \end{bmatrix}. \tag{130}$$

În final, presupunînd că $\mathscr{C}$ și $\mathscr{L}$ sînt matrice nesingulare, obținem :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathscr{A}\mathbf{x} + \mathscr{B}_1 \mathbf{e} + \mathscr{B}_2 \frac{d\mathbf{e}}{dt}, \tag{131}$$

unde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Ll} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{E} \\ \mathbf{i}_{J} \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} \mathscr{C}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathscr{L}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathscr{Y} & \mathscr{H} \\ \mathscr{G} & -\mathscr{Z} \end{bmatrix}, \tag{132}$$

$$\mathscr{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathscr{C}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathscr{L}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\hat{\mathscr{Y}} & \hat{\mathscr{H}} \\ \hat{\mathscr{G}} & -\hat{\mathscr{Z}} \end{bmatrix}, \tag{133}$$

$$\mathscr{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathscr{C}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathscr{L}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathscr{C}} & 0 \\ 0 & \hat{\mathscr{L}} \end{bmatrix}. \tag{134}$$

Acesta este rezultatul dorit. Ceea ce s-a făcut aici, are ca scop să prezinte o metodă de a ajunge la o ecuație diferențială vectorială de ordinul întîi, pentru o rețea dată, în forma din (131). Totuși, nu am obținut formule pentru matricele $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}_1$ și $\mathscr{B}_2$ în termenii matricelor parametrilor de laturi și submatricelor $\mathbf{Q}_l$, deoarece aceste formule ar fi extrem de complicate și imposibil de utilizat. Rezultatul depinde foarte mult de existența inversei matricelor (127) și (128) și matricelor $\mathscr{C}$ și $\mathscr{L}$. Din nefericire, nu se cunosc niște condiții necesare și suficiente, simple, care să ne spună cînd există aceste inverse și cînd se poate aplica acest procedeu.

Rețele RLC

Există totuși o clasă de rețele — rețelele *RLC* invariabile în timp pentru care metoda dată mai sus este totdeauna aplicabilă. Este util să terminăm dezvoltarea pentru această clasă, deoarece rezultatele pot fi scrise explicit și sînt de o generalitate mare.

Prima simplificare apare în relațiile $v - i$ ale laturilor de rezistențe din (125). Nu vor exista termeni de cuplare în matricele parametrilor. Deci $\mathbf{G}_{tl}$ și $\mathbf{G}_{lt}$ sînt ambele matrici nule, iar matricele $\mathbf{G}_{ll}$ și $\mathbf{G}_{tt}$ sînt diagonale, deci nesingulare. Să notăm din nou aceste matrice în concordanță cu dimensiunile elementelor lor; $\mathbf{G}_{ll}$ este dimensional conductanță, și $\mathbf{G}_{tt}$ este rezistență. Notăm:

$$\mathbf{G}_{ll} = \mathbf{G}_l = \mathbf{R}_l^{-1}$$

$$\mathbf{G}_{tt} = \mathbf{R}_t = \mathbf{G}_t^{-1}$$

din care:

$$\mathbf{i}_{Rl} = \mathbf{G}_l \, \mathbf{v}_{Rl}, \tag{135a}$$

$$\mathbf{v}_{Rt} = \mathbf{R}_t \, \mathbf{i}_{Rt}. \tag{135b}$$

Ecuațiile (126) se reduc la:

$$\mathbf{i}_{Rl} - \mathbf{G}_l \mathbf{Q}'_{RR} \mathbf{v}_{Rt} = \mathbf{G}_l \mathbf{Q}'_{CR} \mathbf{v}_{Ct} + \mathbf{G}_l \mathbf{Q}'_{ER} \mathbf{v}_E, \tag{136a}$$

$$\mathbf{R}_t \mathbf{Q}_{RR} \mathbf{i}_{Rl} + \mathbf{v}_{Rt} = - \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_{RL} \mathbf{i}_{Ll} - \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_{RJ} \mathbf{i}_J. \tag{136b}$$

Condițiile de existență a unei soluții se reduce la existența inversei $\mathscr{K}_1$ și $\mathscr{K}_2$ care devin:

$$\mathscr{K}_1 = \mathbf{U} + \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_{RR} \mathbf{G}_l \mathbf{Q}'_{RR}, \tag{137a}$$

$$\mathscr{K}_2 = \mathbf{U} + \mathbf{G}_l \mathbf{Q}'_{RR} \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_{RR}. \tag{137b}$$

Definim:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_t + \mathbf{Q}_{RR} \mathbf{G}_l \mathbf{Q}'_{RR}, \tag{138a}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_l + \mathbf{Q}'_{RR} \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_{RR}, \tag{138b}$$

astfel incît $\mathscr{K}_1 = \mathbf{R}_t \mathbf{G}$ și $\mathscr{K}_2 = \mathbf{G}_l \mathbf{R}$. Rezultă că $\mathscr{K}_1$ și $\mathscr{K}_2$ vor fi nesingulare dacă $\mathbf{G}$ și $\mathbf{R}$ sînt nesingulare. Este ușor de arătat că $\mathbf{R}$ și $\mathbf{G}$ pot fi inter-

pretate ca matricele parametrilor contururilor și nodurilor și sînt în consecință nesingulare. Acceptînd acest fapt aici, tragem concluzia că totdeauna există o soluție pentru (136). Rezolvăm acum această ecuație pentru $\mathbf{i}_{Rl}$ și $\mathbf{v}_{Rt}$ și înlocuim în (119) și (124). Detaliile procedeului sînt neinteresante și nu vor fi date aici. Rezultatul va fi

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \mathscr{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathscr{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Ll} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathscr{Y} & \mathscr{H} \\ \mathscr{G} & -\mathscr{Z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Ll} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{\mathscr{Y}} & \hat{\mathscr{H}} \\ \hat{\mathscr{G}} & -\hat{\mathscr{Z}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{E} \\ \mathbf{i}_{J} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \hat{\mathscr{C}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathscr{L}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{E} \\ \mathbf{i}_{J} \end{bmatrix}, \tag{139}$$

unde :

$$\mathscr{Y} = \mathbf{Q}_{CR}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}'_{CR}, \quad \mathscr{H} = -\mathbf{Q}_{CL} + \mathbf{Q}_{CR}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}'_{RR}\mathbf{R}_l\mathbf{Q}_{RL},$$
$$\mathscr{Z} = \mathbf{Q}'_{RL}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q}_{RL}, \quad \mathscr{G} = \mathbf{Q}'_{CL} - \mathbf{Q}'_{RL}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q}_{RR}\mathbf{G}_l\mathbf{Q}'_{CR} = -\mathscr{H}' \tag{140}$$

și

$$\hat{\mathscr{Y}} = \mathbf{Q}_{CR}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}_{ER}, \quad \hat{\mathscr{H}} = -\mathbf{Q}_{CJ} + \mathbf{Q}_{CR}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}'_{RR}\mathbf{R}_l\mathbf{Q}_{RJ},$$
$$\hat{\mathscr{Z}} = \mathbf{Q}'_{RL}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q}_{RJ}, \quad \hat{\mathscr{G}} = \mathbf{Q}'_{EL} - \mathbf{Q}'_{RL}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q}_{RR}\mathbf{G}_l\mathbf{Q}'_{ER}. \tag{141}$$

Menționăm că matricea $\mathscr{G}$ în cazul rețelelor reciproce este transpusa negativă a lui $\mathscr{H}$, rezultat la care ne-am fi așteptat. Forma lui (139) este aceeași cu aceea a lui (129) pentru rețeaua generală. Diferența constă în faptul că în cazul de față am explicitat expresiile pentru matricele coeficienților vectorilor de stare și de surse.

Acum, într-o rețea *RLC* invariantă în timp, $\mathscr{C}$ și $\mathscr{L}$ vor fi matrice diagonale invariante în timp. Deci, inversele lor există și (139) poate fi rescris în forma dorită.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Ll} \end{bmatrix} = \mathscr{A}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Ll} \end{bmatrix} + \mathscr{B}_1\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{E} \\ \mathbf{i}_{J} \end{bmatrix} + \mathscr{B}_2\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{E} \\ \mathbf{i}_{J} \end{bmatrix}, \tag{142}$$

unde $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}_1$ și $\mathscr{B}_2$ sînt cele indicate în (132), (133) și (134).

Simplitatea aparentă a acestei ecuații finale maschează operații matriciale laborioase care trebuiesc efectuate asupra matricelor $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}_1$ și $\mathscr{B}_2$. Pentru comoditatea referirii, rezultatele importante sînt concentrate în tabelul 4.2.

Tabelul 4.2

Relații topologice		coarde → C R L J; ramuri ↓ $\mathbf{Q} = [\mathbf{U}\ \mathbf{Q}_l] \quad \mathbf{Q}_l = \begin{matrix} E \\ C \\ R \\ L \end{matrix}\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{EC} & \mathbf{Q}_{ER} & \mathbf{Q}_{EL} & \mathbf{Q}_{EJ} \\ \mathbf{Q}_{CC} & \mathbf{Q}_{CR} & \mathbf{Q}_{CL} & \mathbf{Q}_{CJ} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{RR} & \mathbf{Q}_{RL} & \mathbf{Q}_{RJ} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{LL} & \mathbf{Q}_{LJ} \end{bmatrix}$
Relații tensiune curent		$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Cl} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \mathbf{C}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{v}_{Cl} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ll} \\ \mathbf{v}_{Lt} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ll} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_{tt} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{Ll} \\ \mathbf{i}_{Lt} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{Rl} \\ \mathbf{v}_{Rt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Rl} \\ \mathbf{i}_{Rt} \end{bmatrix}$
Rețele RLC	Matrice de parametri	$\mathscr{C} = \mathbf{C}_t + \mathbf{Q}_{CC}\mathbf{C}_l\mathbf{Q}'_{CC}$ $\quad \hat{\mathscr{C}} = -\mathbf{Q}_{CC}\mathbf{C}_l\mathbf{Q}'_{EC}$ $\mathscr{L} = \mathbf{L}_{ll} + \mathbf{Q}'_{LL}\mathbf{L}_{tt}\mathbf{Q}_{LL}$ $\quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_l = \mathbf{Q}'_{RR}\mathbf{R}_l\mathbf{Q}_{RR}$ $\hat{\mathscr{L}} = -\mathbf{Q}'_{LL}\mathbf{L}_{tt}\mathbf{Q}_{LJ}$ $\quad \mathbf{G} = \mathbf{G}_t + \mathbf{Q}_{RR}\mathbf{G}_l\mathbf{Q}'_{RR}$
	Matricele multiportului rezistiv	$\mathscr{Y} = \mathbf{Q}_{CR}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}'_{CR}$, $\quad \mathscr{H} = -\mathbf{Q}_{CL} + \mathbf{Q}_{CR}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}'_{RR}\mathbf{R}_t\mathbf{Q}_{RL}$ $\mathscr{Z} = \mathbf{Q}'_{RL}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q}_{RL}$, $\quad \mathscr{G} = \mathbf{Q}'_{CL} - \mathbf{Q}'_{RL}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q}_{RR}\mathbf{G}_l\mathbf{Q}'_{CR} = -\mathscr{H}'$ $\hat{\mathscr{Y}} = \mathbf{Q}_{CR}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}'_{ER}$ $\quad \hat{\mathscr{H}} = -\mathbf{Q}_{CJ} + \mathbf{Q}_{CR}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}'_{RR}\mathbf{R}_t\mathbf{Q}_{RJ}$ $\hat{\mathscr{Z}} = \mathbf{Q}'_{RL}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q}_{RJ}$, $\quad \hat{\mathscr{G}} = \mathbf{Q}'_{EL} - \mathbf{Q}'_{RL}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q}_{RR}\mathbf{G}_l\mathbf{Q}'_{ER}$
Ecuația de stare	$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathscr{A}\mathbf{x} + \mathscr{B}_1\mathbf{e} + \mathscr{B}_2\frac{d\mathbf{e}}{dt}$	$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Ll} \end{bmatrix}$, $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{i}_J \end{bmatrix}$, $\mathscr{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathscr{C}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathscr{L}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\mathscr{C}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathscr{L}} \end{bmatrix}$ $\mathscr{A} = \begin{bmatrix} \mathscr{C}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathscr{L}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\mathscr{Y} & \mathscr{H} \\ \mathscr{G} & -\mathscr{Z} \end{bmatrix}$ $\quad \mathscr{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathscr{C}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathscr{L}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\hat{\mathscr{Y}} & \hat{\mathscr{H}} \\ \hat{\mathscr{G}} & -\hat{\mathscr{Z}} \end{bmatrix}$

Matrice de parametrii pentru rezistenţe RCL

Cu ocazia diverselor etape de calcul efectuate în scopul obţinerii ecuaţiei finale au fost introduse un număr de matrice ca $\mathscr{C}$, **R** şi $\mathscr{Y}$. Pentru simplificarea notaţiei se pot da interpretări relativ simple acestor matrice, interpretări pe care le vom schiţa acum.

Să considerăm pentru început matricele de parametrii **R**, **G**, $\mathscr{C}$, $\mathscr{L}$. Deşi aici ne preocupă ecuaţiile de stare, temporar ne vom îndrepta atenţia asupra matricei impedanţelor în gol $\mathbf{Z}_m = \mathbf{BZB}'$, unde **Z** este matricea impedanţelor laturilor obţinută după ce am îndepărtat sursele, înlocuind sursele de tensiune v prin scurtcircuite şi sursele de curent i prin circuite în gol. Să rearanjăm liniile şi coloanele lui **Z** în următoarea ordine : ramuri de C, R şi L; apoi coarde de L, R şi C. Matricea impedanţelor laturilor poate fi scrisă după cum urmează :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s}\mathbf{C}_t^{-1} & & & & & \\ & \mathbf{R}_t & & & \bigcirc & \\ & & s\mathbf{L}_{tt} & & & \\ & \bigcirc & & s\mathbf{L}_{ll} & & \\ & & & & \mathbf{R}_l & \\ & & & & & \frac{1}{s}\mathbf{C}_l^{-1} \end{bmatrix}.$$

În continuare descompunem pe **B** în forma obişnuită $[\mathbf{B}_t\ \mathbf{B}_l]$. Apoi descompunem pe $\mathbf{B}_t = (-\mathbf{Q}'_l)$ în concordanţă cu descompunerea lui $\mathbf{Q}_l$ din (112) ţinînd seama că acum liniile şi coloanele corespunzătoare surselor lipsesc. Acum, din cauza ordinei în care sînt aranjate elementele în Z, $\mathbf{B}_l = \mathbf{U}$ dar obţinem o rearanjare a coloanelor lui **U**. Astfel, descompunerea lui **B** devine :

$$\begin{array}{cc} \text{coarde} & \begin{array}{cccccc} \multicolumn{3}{c}{\text{ramuri}} & \multicolumn{3}{c}{\text{coarde}} \\ C & R & L & L & R & C \end{array} \\ \mathbf{B} = \begin{array}{c} C \\ R \\ L \end{array} & \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}'_{CC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U} \\ -\mathbf{Q}'_{CR} & -\mathbf{Q}'_{RR} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q}'_{CL} & -\mathbf{Q}'_{RL} & \mathbf{Q}'_{LL} & \mathbf{U} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{array}$$

Este formată acum matricea impedanţelor buclelor. Aceasta va fi o expresie foarte complicată. Detaliile vor fi lăsate ca exerciţiu pentru dumneavoastră. Folosind matricea impedanţelor buclelor putem scrie matricea parametrilor buclelor (rezistenţe şi inductanţe). Cînd acest lucru este făcut constatăm că :

1. $\mathbf{R} = \mathbf{R}_l + \mathbf{Q}_{RR} \mathbf{R}_t \mathbf{Q}$ este o submatrice a matricei buclelor de rezistenţe pentru contururile *f* definite de coardele de rezistenţă pentru un arbore normal, cu toate sursele îndepărtate.

2. $\mathscr{L} = \mathbf{L}_{ll} + \mathbf{Q}'_{LL} \mathbf{L}_{tt} \mathbf{Q}_{LL}$ este o submatrice a matricei buclelor de inductanţe pentru buclele *f* definite de coardele de inductanţe pentru un arbore normal, cu toate sursele îndepărtate.

Într-un mod analog, prin formarea matricei admitanţelor perechilor de noduri $\mathbf{QYQ'}$ şi printr-o partitionare ca mai sus se va găsi:

1. $\mathscr{C} = \mathbf{C}_t + \mathbf{Q}_{CC}\mathbf{C}_l \mathbf{Q}'_{CC}$ este o submatrice a matricei secţiunilor de capacităţi pentru secţiunile *f* definite de ramurile capacităţilor pentru un arbore normal, cu toate sursele îndepărtate.

2. $\mathbf{G} = \mathbf{G}_t + \mathbf{Q}_{RR} \mathbf{G}_l \mathbf{Q}'_{RR}$ este o submatrice a matricei secţiunilor de conductanţe pentru secţiunile *f* definite de ramurile de conductanţe dintr-un arbore normal, cu toate sursele îndepărtate.

Cu aceste interpretări este posibil să evaluăm aceste matrice de parametri — evitînd multiplicările de matrice implicate — numai prin inspectarea reţelei după un arbore normal.

Pentru ilustrare, considerăm exemplul din fig. 4.4. În acest exemplu, $\mathscr{L}$ este dat direct de $[L_9]$. Pentru a găsi pe $\mathbf{R}$, menţionăm că coardele de rezistenţe sînt laturile 6, 7, 8. Bucla *f*, definită de coarda 6, de exemplu, conţine pe R_5 şi R_6. Nu există rezistenţe comune buclelor *f* formate de laturile 6, 7 şi 8. Deci R este

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_5 + R_6 & 0 & 0 \\ 0 & R_7 & 0 \\ 0 & 0 & R_8 \end{bmatrix}.$$

De asemenea, pentru $\mathbf{G}$, există o singură secţiune *f* definită de o ramură de conductanţe, şi anume ramura 5. Această secţiune conţine pe G_5 şi G_6. Deci $\mathbf{G} = [G_5 + G_6]$. În sfîrşit, pentru $\mathscr{C}$ există două secţiuni *f* definite de ramuri de capacităţi (laturile 3 şi 4) şi ele nu conţin alte capacităţi. Deci:

$$\mathscr{C} = \begin{bmatrix} C_3 & 0 \\ 0 & C_4 \end{bmatrix}.$$

Acest exemplu este prea simplu pentru a permite o ilustrare semnificativă. Să găsim matricea $\mathscr{C}$ pentru exemplul din fig. 4.5. Aici există de asemenea două secţiuni *f* definite de ramuri de capacităţi (laturile 3 şi 4). De data aceasta, fiecare secţiune conţine două capacităţi, şi C_6 este comună ambelor secţiuni. Totuşi, ramura 6 este orientată într-un sens într-o secţiune şi în sens opus în cealaltă. Deci termenii care intră în diagonala matricei vor avea semnul minus. Astfel:

$$\mathscr{C} = \begin{bmatrix} C_3 + C_6 & -C_6 \\ -C_6 & C_4 + C_6 \end{bmatrix}.$$

Aceasta corespunde cu rezultatul anterior din (24).

Pentru a ilustra metoda anterioară de scriere a unei ecuaţii de stare vectoriale, să considerăm reţeaua din fig. 4.8.

Trebuie să găsim în primul rînd un arbore normal. Există în total 6 elemente reactive, dar există o buclă de capacităţi C care include o sursă de tensiune şi o secţiune de inductanţe L. Deci ordinul de complexitate este 4, astfel că vor fi patru variabile de stare. Una

din capacităţi trebuie să fie o coardă, şi una din inductanţe o ramură. Un arbore normal posibil este arătat cu linii îngroşate în fig. 8*b*. Ramurile sînt numerotate în concordanţă cu schema: ramura sursei — *v*, *C*, *R* şi *L*; apoi coarda *C*, *R*, *L* şi sursa — *i*. Pentru simplificare, presupunem că numerele ramurilor sînt de asemenea valori numerice pentru elemente: rezistenţa

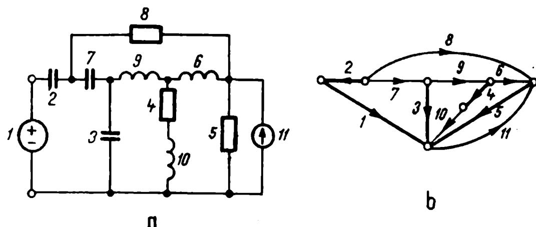


Fig. 4.8. Exemplu ilustrativ pentru ecuaţiile de stare.

fiind dată în ohmi, inductanţa în henry şi capacitatea în farazi. Cu această alegere a arborelui normal, parametrii ramurilor sînt:

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_t = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_l = [7], \qquad \mathbf{R}_l = [8],$$

$$\mathbf{L}_{ll} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{L}_{tt} = [6].$$

Următoarea etapă este să se scrie matricea **Q** şi să descompună în mod adecvat:

Q =

	coarde	E	C		R		L	C	R	L		J
	ramuri ↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
E	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
C	2	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
	3	0	0	1	0	0	0	−1	0	1	0	0
R	4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	−1	0
	5	0	0	0	0	1	0	0	−1	−1	1	−1
L	6	0	0	0	0	0	1	0	0	−1	1	0

Diferitele submatrici sînt evidente din partiționare. Matricele parametrilor se calculează după cum urmează:

$$\mathscr{C} = C_t + Q_{CC} C_l Q'_{CC} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} [7] [1 \ -1] = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{L} = L_{ll} + Q'_{LL} L_{tt} Q_{LL} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [6] [-1 \ 1] = \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 16 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = R_l + Q'_{RR} R_t Q_{RR} = [8] + [0 \ -1] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = [13],$$

$$\mathbf{G} = G_t + Q_{RR} G_l Q'_{RR} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} [\tfrac{1}{8}] [0 \ -1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} + \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

În etapa următoare se calculează matricele $\mathscr{Y}$, $\mathscr{Z}$ și $\mathscr{H}$.

$$\mathscr{Y} = Q_{CR} R^{-1} Q'_{CR} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [\tfrac{1}{13}] [1 \ \ 0] = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{Z} = Q'_{RL} G^{-1} Q_{RL} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{40}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{40}{13} & -\frac{40}{13} \\ -\frac{40}{13} & \frac{92}{13} \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{H} = -Q_{CL} + Q_{CR} R^{-1} Q'_{RR} R_t Q_{RL}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [\tfrac{1}{13}] [0 \ -1] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{5}{13} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

În continuare calculăm matricele $\hat{\mathscr{Y}}$, $\hat{\mathscr{Z}}$, $\hat{\mathscr{H}}$ și $\hat{\mathscr{G}}$:

$$\hat{\mathscr{Y}} = Q_{CR} R^{-1} Q'_{ER} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [\tfrac{1}{13}] \ [1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathscr{Z}} = Q'_{RL} G^{-1} Q_{RJ} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{40}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{40}{13} \\ -\frac{40}{18} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathscr{H}} = Q_{CR} R^{-1} Q'_{RR} R_t Q_{RL} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [\tfrac{1}{13}] [0 \ -1] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathscr{G}} = -Q'_{RL} G^{-1} Q_{RR} G_l Q'_{ER}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{40}{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} [\tfrac{1}{8}] \ [1] = \begin{bmatrix} -\frac{5}{13} \\ \frac{5}{13} \end{bmatrix}.$$

În sfîrşit, calculăm termenii care includ derivatele surselor :

$$\hat{\mathscr{C}} = -\mathbf{Q}_{CC}\,\mathbf{C}_l\,\mathbf{Q}'_{\mathscr{E}C} = -\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}[7]\,[1] = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathscr{L}} = -\mathbf{Q}'_{LL}\,\mathbf{L}_u\,\mathbf{Q}_{LJ} = -\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}[6]\,[0] = 0.$$

După ce toate acestea sînt introduse în (139) şi ecuaţia rezultată este premultiplicată prin

$$\begin{bmatrix} \mathscr{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathscr{L} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{10}{41} & \frac{7}{41} & 0 & 0 \\ \frac{7}{41} & \frac{9}{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{204} & \frac{6}{204} \\ 0 & 0 & \frac{6}{204} & \frac{15}{204} \end{bmatrix}$$

obţinem :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ i_9 \\ i_{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{533}\begin{bmatrix} -10 & 0 & -41 & -50 \\ -7 & 0 & -82 & -35 \\ -10 & -41.6 & 80 & -1.6 \\ 9 & 15.6 & -72 & 228 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ i_9 \\ i_{10} \end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{533}\begin{bmatrix} -10 & 50 \\ -7 & 35 \\ -10 & -80 \\ 9 & 72 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_g \\ i_g \end{bmatrix} + \frac{1}{41}\begin{bmatrix} -21 & 0 \\ 14 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_g \\ i_g \end{bmatrix}. \qquad (143)$$

Aceasta este ecuaţia de stare. Observăm că nu este în formă normală. Dacă scriem

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ i_9 \\ i_{10} \end{bmatrix} - \frac{1}{41}\begin{bmatrix} -21 & 0 \\ 14 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_g \\ i_g \end{bmatrix}$$

şi substituim aceasta în ecuaţia de stare de mai sus, obţinem următoarea ecuaţie de stare în formă normală:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{533}\begin{bmatrix} -10 & 0 & -41 & -50 \\ -7 & 0 & -82 & -35 \\ -10 & -41{,}6 & 80 & -1{,}6 \\ 9 & 15{,}6 & -72 & 228 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{533}\begin{bmatrix} -4.9 & 50 \\ -3.4 & 35 \\ -19.1 & -80 \\ 9.7 & 72 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_g \\ i_g \end{bmatrix}. \quad (144)$$

Puteţi verifica acest rezultat. Noile variabile de stare x_1 şi x_2 sînt combinaţii liniare a unei tensiuni pe capacitate şi tensiunea sursei. Ele nu pot fi identificate pe diagrama reţelei ca tensiuni măsurate.

Volumul de calcule implicat este foarte mare. Să observăm însă că tipurile de operaţiuni matematice care apar sînt: multiplicări şi adunări de matrice. Astfel de operaţiuni sînt uşor programabile pe calculator şi astfel munca se reduce la scrierea unui program convenabil.

Menţionăm în acest caz, că matricele parametrilor ar putea fi scrise prin inspectarea arborilor, de exemplu, $\mathscr{L}$ este submatricea de inductanţe a buclelor f definite de coardele de inductanţe 9 şi 10. Fiecare buclă conţine de asemenea inductanţa 6 a cărei orientare coincide cu aceea a primei bucle, dar este opusă faţă de aceea a celui de al doilea. Deci:

$$L = \begin{bmatrix} 6+9 & -6 \\ -6 & 6+10 \end{bmatrix}$$

care este aceiaşi cu cea obţinută anterior. Puteţi verifica, în acelaşi fel, celelalte matrice de parametrii.

Ecuaţia (143) conţine derivata sursei de tensiune. Pentru a obţine o ecuaţie de stare în formă normală am făcut transformarea $\mathbf{x} \to (\mathbf{x} - \mathscr{B}_2\mathbf{e})$. Observăm că prezenţa derivatei tensiunii sursei este determinată de bucla de capacităţi care include sursa de tensiune. Sursa de curent nu este conţinută în secţiunea de inductanţe, astfel că nu apare derivata curentului sursei. Deşi am rezolvat complet exemplul de evaluare a tuturor matricelor definite în prealabil, introducîndu-le apoi în formele, pentru orice problemă dată am fi putut de asemenea proceda printr-o revenire de fapt la etapele derivării. Aceasta poate necesita uneori un efort mai mic decît înlocuirea în formulă. Aţi putea rezolva exemplul şi în acest fel şi să comparaţi volumul de muncă.

Considerații privind sursele comandate

În scrierea ecuațiilor de stare pentru exemplul precedent, am evaluat matricele care apar în ecuațiile finale și le-am substituit în acestea. Cînd ne referim la rețele nepasive. nereciproce, acest mod de abordare nu este posibil. Va fi necesar să ne întoarcem la un punct intermediar în deducerea ecuațiilor și să continuăm etapă cu etapă de acolo. Ecuațiile de bază sînt (119), (124), (125) și (126). Etapele de parcurs și diferențele față de cazul *RLC* sînt următoarele:

1. Se scrie matricea **Q** și se descompune — ca pentru *RLC*.
2. Se evaluează matricele $\mathscr{C}$ și $\mathscr{L}$ — ca pentru *RLC*.
3. Se scriu relațiile $v - i$ pentru laturile de rezistență ca în (125).
4. Se formează perechea de ecuații (126) și se rezolvă. Acesta este punctul critic. Dacă nu există soluție, ne oprim.
5. Se folosește (126) pentru a elimina pe $\mathbf{v}_{Rt}$ din (119) și $\mathbf{i}_{Rl}$ din (124).

În construirea arborelui normal trebuie să avem grijă în atribuirea laturilor de rezistență corespunzătoare elementelor multiterminale, așa cum s-a discutat în Capitolul 2. În cazul unui girator ambele laturi trebuie să fie ori ramuri, ori coarde. Pentru un transformator ideal și un convertor de negativare o latură trebuie să fie o ramură și cealaltă o coardă. În cazul surselor comandate, fiecare latură este atribuită unic fie ca o ramură, fie ca o coardă. Dacă o latură (care comandă sau este comandată) este

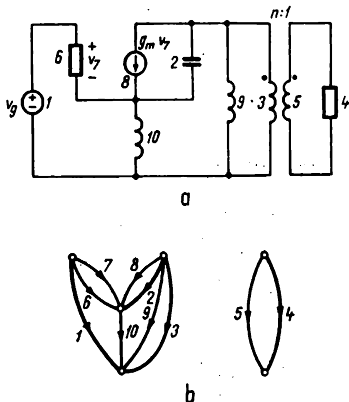


Fig. 4.9. Exemplu cu componente multiterminale.

o ramură sau o coardă, aceasta depinde de tipul variabilei care este specificată. Ecuaţia (125) exprimă explicit *curenţii* coardelor şi *tensiunile* ramurilor. Deci, dacă este specificat curentul unei laturi, ea trebuie să fie o coardă, şi dacă este specificată tensiunea, ea trebuie să fie o ramură; ca exemplu, să luăm sursa de tensiune comandată în curent, cantitatea care comandă este curentul în scurtcircuit; dar pentru un scurtcircuit, tensiunea este specificată (ea este zero). Deci această latură trebuie să fie o ramură. Pentru latura comandată tensiunea este aceea care este specificată. Deci această latură trebuie să fie de asemenea o ramură.

Ca o ilustrare, considerăm reţeaua din fig. 4.9. Transformatorul este ideal. Graful reţelei este format din două părţi din cauza transformatorului. Un arbore normal trebuie să conţină patru laturi, din care două sînt sursa de tensiune şi capacitatea. Una din cele două laturi ale transformatorului trebuie să fie de asemenea o ramură. Ambele laturi ale sursei comandate trebuie să fie coarde, deoarece în ambele cazuri este specificat curentul. Arborescenţa normală este arătată prin latura îngroşată în fig. 4.9, *b*.

Se scrie mai întîi matricea $\mathbf{Q}$ şi se descompune.

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} E \\ C \\ R\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \end{array} \overset{\begin{array}{cccccccccc} E & C & R & & \overbrace{5 \quad 6 \quad 7 \quad 8}^{R} & & & & \overbrace{9 \quad 10}^{L} \end{array}}{\left[\begin{array}{c:c:cc:cccc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}$$

$$\mathbf{Q}_{ER} = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0] \qquad \mathbf{Q}_{RR} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{CR} = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \qquad \mathbf{Q}_{RL} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{CL} = [0 \quad -1] \qquad \mathbf{Q}_{EL} = [0 \quad 0]$$

Relaţiile $v - i$ ale transformatorului şi sursei comandate sînt:

$$i_5 = -\,n i_3, \quad i_7 = 0,$$

$$v_3 = n v_5, \qquad i_8 = g_m\, v_7 .$$

Folosind aceste relații, relațiile $v - i$ ale laturilor rezistive, în concordanță cu (125) devin:

$$\begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -n & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}$$

Trebuie să introducem, acum, toate submatricele în (126). Aceste ecuații devin:

$$\begin{bmatrix} 1 & n & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{i}_{Rl} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -G_6 & 0 \\ 0 & 0 \\ -g_m & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_{Rl} = \begin{bmatrix} 0 \\ G_6 \\ 0 \\ g_m \end{bmatrix} \mathbf{v}_{Cl} + \begin{bmatrix} n & n \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{i}_{Ll} + \begin{bmatrix} 0 \\ G_6 \\ 0 \\ g_m \end{bmatrix} \mathbf{v}_E$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{i}_{Rl} + \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_{Rl} = \mathbf{0}.$$

Deoarece coeficientul lui $\mathbf{v}_{Rl}$ din a doua ecuație este nesingular, putem determina pe $\mathbf{v}_{Rl}$ funcție de $\mathbf{i}_{Rl}$, introducem soluția în prima ecuație și obținem pe $\mathbf{i}_{Rl}$, care este utilizat apoi în determinarea lui $\mathbf{v}_{Rl}$. Rezultatul acestor etape este:

$$\mathbf{v}_{Rl} = \begin{bmatrix} -nR_4 & 0 & 0 & 0 \\ -R_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} i_{Rl}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & n & n & 0 \\ -nR_4G_6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -nR_4g_m & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{i}_{Rl} = \begin{bmatrix} 0 \\ G_6 \\ 0 \\ g_m \end{bmatrix} \mathbf{v}_{Cl} + \begin{bmatrix} n & n \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{i}_{Ll} + \begin{bmatrix} 0 \\ G_6 \\ 0 \\ g_m \end{bmatrix} \mathbf{v}_E.$$

Matricea din stînga este nesingulară, și determinantul său este $\Delta = 1 + n^2R_4G_6$. După premultiplicarea prin inversa sa, se obține:

$$\mathbf{i}_{Rl} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -nG_6 \\ G_6 \\ 0 \\ g_m \end{bmatrix} \mathbf{v}_{Cl} + \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} n & n \\ n^2R_4G_6 & n^2R_4G_6 \\ 0 & 0 \\ n^2R_4g_m & n^2R_4g_m \end{bmatrix} \mathbf{i}_{Ll} + \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -nG_6 \\ G_6 \\ 0 \\ g_m \end{bmatrix} \mathbf{v}_E$$

şi deci :

$$v_{Rl} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} n^2R_4G_6 \\ nR_4G_6 \end{bmatrix} v_{Ct} + \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} -n^2R_4 & -n^2R_4 \\ -nR_4 & -nR_4 \end{bmatrix} i_{Ll} + \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} n^2R_4G_6 \\ nR_4G_6 \end{bmatrix} v_E .$$

Pentru acest exemplu, matricele parametrilor elementelor reactive sînt simple. Există numai o capacitate, astfel ca $\mathscr{C} = [C_2]$ şi $\mathscr{C}^{-1} = [1/C_2]$; matricea $\mathscr{L}$ este matricea diagonală.

$$\mathscr{L} = \begin{bmatrix} L_9 & 0 \\ 0 & L_{10} \end{bmatrix} \text{şi } \mathscr{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/L_9 & 0 \\ 0 & 1/L_{10} \end{bmatrix}.$$

În final, le substituim în (119) şi (124), multiplicăm prin $\mathscr{C}^{-1}$ şi respectiv $\mathscr{L}^{-1}$, şi combinăm cele două ecuaţii într-una singură. Pentru simplificare fie $R_4 = kR_6$, astfel ca $R_4G_6 = k$. Rezultatul va fi

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_2 \\ i_9 \\ i_{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{1+n^2k}\begin{bmatrix} \frac{-(g_m+G_6)}{C_2} & \frac{-n^2R_4(g_m+G_6)}{C_2} & \frac{1-n^2R_4g_m}{C_2} \\ \frac{n^2k}{L_9} & \frac{-n^2R_4}{L_9} & \frac{-n^2R_4}{L_9} \\ \frac{-1}{L_{10}} & \frac{-n^2R_4}{L_{10}} & \frac{-n^2R_4}{L_{10}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_2 \\ i_9 \\ i_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-(g_m+G_6)}{C_2(1+n^2k)} \\ \frac{n^2k}{L_9(1+n^2k)} \\ \frac{n^2k}{L_{10}(1+n^2k)} \end{bmatrix} v_g . \quad (145)$$

Referitor la acest exemplu, observaţi că multe submatrice sînt *rare* (ceea ce înseamnă că multe elemente sînt zero). Aceasta rezultă din necesitatea de a avea multe operaţii cu rezultat zero şi deci mai puţine calcule. Este posibil să parcurgem aceleaşi etape cu ecuaţiile scrise în forma scalară. Aceasta elimină necesitatea de scriere a unui număr mare de zerouri dar sacrifică concizia. Puteţi parcurge etapele de rezolvare cu ecuaţii în formă scalară pentru a observa diferenţa.

Trebuie de asemenea menţionat că în acest exemplu $\mathscr{G} \neq -\mathscr{K}$ din cauza prezenţei lui g_m ; dar, dacă $g_m = 0$, atunci $\mathscr{G} = -\mathscr{K}'$.

4.6. FORMULAREA ECUAŢIILOR DE STARE A MULTI-PORŢILOR

Să ne întoarcem acum la interpretarea matricelor $\mathscr{Y}$, $\mathscr{Z}$, $\mathscr{H}$ şi $\mathscr{G}$. Vom face aceasta pentru cazul general, nu numai pentru cazul *RLC*. Pentru aceasta să considerăm (115) şi (116), împreună cu definiţia lui $\mathscr{C}$ şi $\hat{\mathscr{C}}$

din (117) și respectiv (118). Combinarea acestor ecuații ne conduce la

$$\mathbf{i}_{Ct} = \frac{d}{dt}(\mathscr{C}\mathbf{v}_{Ct}) - \mathbf{Q}_{CC}\mathbf{i}_{Ct} - \frac{d}{dt}(\hat{\mathscr{C}}\mathbf{v}_E).$$

Similar, din (120) și (121) împreună cu definiția lui $\mathscr{L}$ și $\hat{\mathscr{L}}$ din (122) și respectiv (123), obținem :

$$\mathbf{v}_{Lt} = \frac{d}{dt}(\mathscr{L}\mathbf{i}_{Lt}) + \mathbf{Q}'_{LL}\mathbf{v}_{Lt} - \frac{d}{dt}(\hat{\mathscr{L}}\mathbf{i}_J).$$

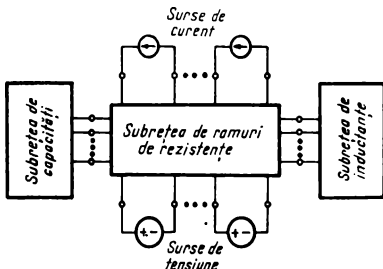


Fig. 4.10. Descompunerea rețelei în subrețele.

Acestea două pot fi combinate într-o singură ecuație matricială. Derivatele pot fi eliminate prin înlocuirea ecuației de stare din (129), care se aplică, pentru rețeaua generală. Rezultatul va fi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{Ct} \\ \mathbf{v}_{Lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathscr{Y} & \mathscr{H} \\ \mathscr{G} & -\mathscr{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Lt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{\mathscr{Y}} & \hat{\mathscr{H}} \\ \hat{\mathscr{G}} & -\hat{\mathscr{Z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{i}_J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_{CC} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{Q}'_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{Ct} \\ \mathbf{v}_{Lt} \end{bmatrix}. \tag{146}$$

Aceasta este o ecuație pur algebrică care leagă tensiunile și curenții elementelor reactive și mărimile care caracterizează sursele. Menționăm că derivatele surselor au fost de asemenea eliminate. O interpretare a diferitelor matrice se poate obține considerînd rețeaua din fig. 4.10. Rețeaua este prezentată ca o interconectare de subrețele. Subrețeaua centrală constă din toate laturile de rezistență (inclusiv sursele comandate etc.) la care sînt conectate subrețelele de capacități, inductanțe și surse independente. Subrețeaua de rezistență poate fi considerată ca un multiport

cu tot atîtea porţi cîte elemente reactive şi surse independente există. Trebuie acum să distingem care elemente reactive sînt ramuri şi care sînt coarde.

Aceasta poate fi examinată simbolic ca în fig. 4.11, unde fiecare element reprezintă o subreţea din clasa sa. Fiecare variabilă asociată porţilor este valabilă pentru toate variabilele scalare din clasa sa şi astfel este un vector.

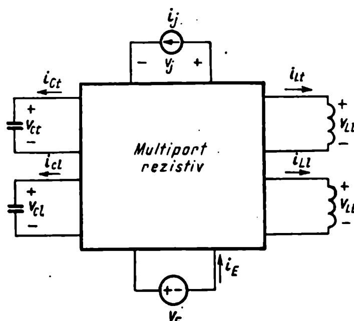


Fig. 4.11. Interpretarea multiportului.

Orientările variabilelor sînt compatibile cu orientările considerate în obţinerea ecuaţiilor. Orientările curenţilor sînt opuse referinţelor standard pentru curenţii porţilor. Astfel, în multiportul de rezistenţe puterea *care intră* la oricare din porţi este — v'i. Ramurile şi coardele de capacităţi, şi ramurile şi coardele de inductanţe sînt arătate ca subreţele separate. Să ne amintim, că pentru a ajunge la (146) pentru cazul general, presupunem că nu este introdusă nici o restricţie algebrică de laturile rezistive care să reducă ordinul de complexitate sub acela obţinut din consideraţii asupra elementelor reactive exclusiv.

Presupunem circuitul în gol la toate coardele reactive şi sursele de curent independente şi scurtcircuit la sursele de tensiune. Aceasta face ca vectorii $\mathbf{i}_{Cl}$, $\mathbf{i}_{Ll}$, $\mathbf{i}_J$ şi $\mathbf{v}_E$ să fie zero. Dar dacă toţi curenţii *coardelor* de inductanţe sînt zero, tot aşa curenţii *ramurilor* de inductanţe vor fi zero, fapt care rezultă din KCL pentru secţiunile de inductanţe; adică $\mathbf{i}_{Lt} = 0$. Cu aceste consideraţii făcute, din (146) se poate scrie:

$$-\mathbf{i}_{Cl} = \mathscr{Y}\mathbf{v}_C . \tag{147}$$

Reamintindu-ne orientarea opusă a curenţilor de poartă, conchidem că $\mathscr{Y}$ este matricea admitanţelor în scurtcircuit a multiportului rezistiv ale cărui porţi sînt terminate pe ramuri de capacităţi, în timp ce toate celelalte elemente reactive sînt scoase din circuit (în gol) şi toate sursele independente sînt îndepărtate (ceea ce înseamnă că sursele de tensiune sînt scurtcircuitate şi sursele de curent sînt în gol). Această interpretare ne dă o metodă de calcul a matricei $\mathscr{Y}$ pentru o rèţea pur rezistivă, fără a parcurge tratarea formală din ultimul paragraf.

Celelalte matrice pot fi evaluate într-o manieră similară. Pentru a găsi $\mathscr{Z}$, scurtcircuităm toate ramurile reactive şi sursele de tensiune independente, şi lăsăm în gol sursele de curent, astfel ca $\mathbf{v}_{Ct}$, $\mathbf{v}_{Lt}$, $\mathbf{v}_E$ şi $\mathbf{i}_J$ sînt toţi vectori zero. Din (146) putem scrie

$$\mathbf{v}_{Ll} = \mathscr{Z}(-\mathbf{i}_{Ll}). \tag{148}$$

Conchidem că $\mathscr{Z}$ este matrice de impedanţe a circuitului în gol a multiportului de rezistenţe ale cărui porţi sînt terminate pe coardele de inductanţe în timp ce toate celelalte elemente reactive sînt scurtcircuitate şi toate sursele sînt îndepărtate.

Matricele $\mathscr{H}$ şi $\mathscr{G}$ pot fi găsite într-o manieră similară. Noi vom da rezultatele, lăsînd restul în seama dumneavoastră.

$$\mathbf{i}_{Ct} = \mathscr{H}\mathbf{i}_{Ll}, \tag{149a}$$

$$\mathbf{v}_{Ll} = \mathscr{G}\mathbf{v}_{Ct}. \tag{149b}$$

Astfel $\mathscr{H}$ este matricea transferului de curent a multiportului de rezistenţe, care are ca porţi de intrare terminalele coardelor de inductanţe care sînt înlocuite cu surse de curent, şi ca porţi de ieşire terminalele ramurilor de capacităţi scurtcircuitate, cînd coardele de capacităţi sînt lăsate în gol şi toate sursele independente sînt îndepărtate. Ramurile de inductanţe vor fi înlocuite de sursele de curent aşa cum rezultă din LKC la secţiunile de inductanţe.

În sfîrşit, $\mathscr{G}$ este matricea de transfer de tensiune a multiportului rezistiv, porţile de intrare fiind terminalele ramurilor de capacităţi care sînt înlocuite cu surse de tensiune, şi porţile de ieşire fiind terminalele coardelor de inductanţe lăsate în gol, cînd ramurile de inductanţe sînt scurtcircuitate şi toate sursele independente îndepărtate.

Pentru a ilustra aceste interpretări să considerăm exemplul din fig. 9. Vom începe prin calcularea fiecărei matrice, pe rînd. Pentru a găsi $\mathscr{Y}$. lăsăm în gol cele două inductanţe, îndepărtăm sursa de tensiune prin scurtcircuitarea ei, înlocuim capacitatea cu o sursă de tensiune v_2 care are aceeaşi polaritate ca şi tensiunea pe capacitate, şi apoi găsim curentul i_2 prin această sursă de tensiune. În fig. 4. 12 este arătată o diagramă adecvată, unde transformatorul ideal terminat în R_4 este înlocuit cu o rezis-

tenţă n^2R_4, sau n^2kR_6 considerînd ca mai înainte $R_4 = kR_6$. Rezultatul este o conexiune în serie a lui R_6 şi n^2R_4 la bornele căreia tensiunea este v_2. Curentul rezultat i se găseşte uşor şi odată cu acesta şi tensiunea v_7.

Calculul lui $\mathscr{G}$	Calculul $\mathscr{Y}$

$$i = \frac{v_2}{R_6 + n^2R_4} = \frac{G_6v_2}{1 + n^2k}$$

$$v_9 = n^2R_4\, i \qquad\qquad v_7 = R_6\, i$$

$$v_{10} = -\, R_6\, i \qquad\qquad i_2 = -\,(g_mv_7 + i) = -\,(g_mR_6 + 1)i$$

$$\begin{bmatrix} v_9 \\ \\ v_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{n^2k}{1 + n^2k} \\ \\ \dfrac{-1}{1 + n^2k} \end{bmatrix} [v_2] \qquad\qquad -\,[i_2] = \left[\frac{g_m + G_6}{1 + n^2k}\right][v_2]$$

$$\mathscr{G} = \begin{bmatrix} \dfrac{n^2k}{1 + n^2k} \\ \\ \dfrac{-1}{1 + n^2k} \end{bmatrix} \qquad\qquad \mathscr{Y} = \left[\frac{g_m + G_6}{1 + n^2k}\right]$$

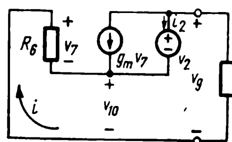


Fig. 4.12. Calculul lui $\mathscr{G}$ şi $\mathscr{Y}$.

Curentul sursei comandate este acum cunoscut. Aplicînd LKC la unul din terminalele lui v_2, se obţine i_2. Detaliile de calcul sînt date în fig. 4.12.

Deoarece nu există ramuri de inductanţe, diagrama de calcul a lui $\mathscr{G}$ este prezentată în fig. 4.12. Totuşi, acum mărimile de ieşire dorite sînt tensiunile la bornele inductanţelor în gol. Desfăşurarea calculului este de asemenea arătată în fig. 4.12.

Pentru a găsi pe $\mathscr{Z}$ se îndepărtează sursa de tensiune, scurtcircuităm capacitatea, se înlocuiesc cele două inductanţe cu sursele de curent i_9 şi i_{10}, cu referinţele corespunzătoare. Rezultatul, arătat în fig. 4.13 este că se conectează în paralel R_6 şi n^2R_4 şi se alimentează cu curentul $i_9 + i_{10}$. Tensiunile v_9 şi v_{10} sînt egale şi se calculează uşor. Calculul lui $\mathscr{Z}$ este arătat în fig. 4.13.

Calculul lui $\mathscr{Z}$ Calculuil lui $\mathscr{H}$

$$v_9 = v_{10} = \frac{-n^2 R_4 R_6}{R_6 + n^2 R_4}(i_9 + i_{10}) = \frac{-n^2 R_4}{1 + n^2 k}(i_9 + i_{10})$$

$$\begin{bmatrix} v_9 \\ v_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n^2 R_4}{1+n^2k} & \frac{n^2 R_4}{1+n^2k} \\ \frac{n^2 R_4}{1+n^2k} & \frac{n^2 R_4}{1+n^2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i_9 \\ -i_{10} \end{bmatrix}$$

$$i_2 = i_{10} - g_m v_7 - i_6$$
$$i_6 = G_6 v_7$$
$$v_7 = -v_{10}$$
$$i_2 = i_{10} + (g_m + G_6) v_{10})$$

$$\mathscr{Z} = \begin{bmatrix} \frac{n^2 R_4}{1+n^2k} & \frac{n^2 R_4}{1+n^2k} \\ \frac{n^2 R_4}{1+n^2k} & \frac{n^2 R_4}{1+n^2k} \end{bmatrix}$$

$$[i_2] = \begin{bmatrix} \frac{-n^2R_4(g_m + G_6)}{1 + n^2k} & \frac{1 - n^2R_4g_m}{1 + n^2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_9 \\ i_{10} \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{H} = \begin{bmatrix} \frac{-n^2R_4(g_m + G_6)}{1 + n^2k} & \frac{1 - n^2R_4g_m}{1 + n^2k} \end{bmatrix}.$$

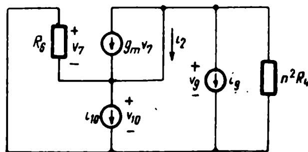


Fig. 4.13. Calculul lui $\mathscr{Z}$ şi $\mathscr{H}$.

În sfîrşit, diagrama de calcul a lui $\mathscr{H}$ este arătată tot în fig. 13, cu menţiunea că mărimea de ieşire dorită este curentul prin capacitatea scurtcircuitată. Acesta poate fi găsit aplicînd LKC pentru terminalul de jos al sursei de curent comandată, care conduce la $i_2 = i_{10} - g_m v_7 - i_6$. Dar $i_6 = v_7/R_6$, $v_7 = -v_{10}$ şi v_{10} a fost găsit în diagramă în funcţie de i_9 şi i_{10}. Matricea $\mathscr{H}$ se obţine dacă introducem toate acestea în expresia lui i_2. Setul întreg de calcule este arătat în fig. 4.13.

Deşi prezentarea calculului acestor matrice pentru acest exemplu pare a fi cam lungă, efortul real de calcul este foarte mic. Comparaţi rezultatele cu matricea $\mathscr{A}$ din (145), pentru a verifica că s-a obţinut acelaşi rezultat.

Să ne întoarcem acum la submatricele $\hat{\mathscr{Y}}$, $\hat{\mathscr{Z}}$, $\hat{\mathscr{H}}$ şi $\hat{\mathscr{G}}$ care alcătuiesc $\mathscr{B}_1$, matricea coeficienţilor surselor. Considerînd din nou (146) şi fig. 4.11, presupunem că lăsăm în gol toate coardele reactive şi sursele de curent independente, şi scurtcircuităm toate ramurile reactive. În aceste condiţii (146) conduce la

$$\mathbf{i}_{Ct} = -\hat{\mathscr{Y}}\mathbf{v}_E, \tag{150a}$$

$$\mathbf{v}_{Ll} = \hat{\mathscr{G}}\mathbf{v}_E. \tag{150b}$$

Astfel, $\hat{\mathscr{Y}}$ este calculat prin găsirea curenţilor în ramurile de capacităţi scurtcircuitate, şi $\hat{\mathscr{G}}$ este calculat prin găsirea tensiunilor pe coardele de inductanţe în gol, ambele rezultînd ca urmare a prezenţei surselor de tensiune independente.

Similar, presupunem că scurtcircuităm toate ramurile reactive şi sursele de tensiune independente şi lăsăm în gol coardele reactive. Atunci (146) conduce la

$$\mathbf{i}_{Ct} = \hat{\mathscr{H}}\mathbf{i}_J, \tag{151a}$$

$$\mathbf{v}_{Ll} = -\hat{\mathscr{L}}\mathbf{i}_J. \tag{151b}$$

Astfel, $\hat{\mathscr{H}}$ este calculat prin găsirea curenţilor în ramurile de capacităţi scurtcircuitate, şi $\hat{\mathscr{Z}}$ este calculat prin găsirea tensiunilor pe coardele de inductanţe lăsate în gol, — ambele rezultînd ca urmare a prezenţei surselor de curent independente.

$$i = \frac{v_g}{R_6 + n^2 R_4} = \frac{G_6 v_g}{1 + n^2 k}$$

$$v_7 = R_6 i = \frac{v_g}{1 + n^2 k}$$

$$i_2 = -g_m v_7 - i = -\frac{(g_m + G_6)}{1 + n^2 k} v_g$$

$$v_9 = n^2 R_4 i = \frac{n^2 k}{1 + n^2 k} v_g$$

$$v_{10} = -R_6 i + v_g = \frac{n^2 k}{1 + n^2 k} v_g$$

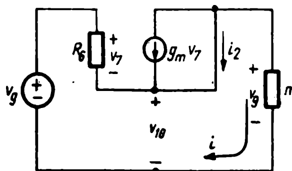


Fig. 4. 14. Calculul lui $\hat{\mathscr{Y}}$ şi $\hat{\mathscr{G}}$.

Vom ilustra aceasta cu ajutorul exemplului din fig. 4.9. Nu există surse de curent în acest caz, astfel că $\hat{\mathscr{Z}}$ şi $\hat{\mathscr{H}}$ sînt ambele matrici zero. Pentru a găsi pe $\hat{\mathscr{Y}}$ şi $\hat{\mathscr{G}}$, lăsăm în gol ambele inductanţe şi scurtcircuităm capacitatea. Rezultatul este arătat în fig. 4.14. Curentul i este determinat

în mod obișnuit, observînd că R_6 și n^2R_4 sînt în serie. Se obține acum direct v_7 ca $R_6 i$. Aceasta determină curentul sursei comandate, și din LKC se găsește i_2. Tensiunile v_9 și v_{10} se obțin de asemenea direct. Detaliile sînt arătate în fig. 4.14. Rezultatul este

$$\hat{\mathscr{Y}} = \frac{g_m + G_6}{[1 + n^2k^2]}, \quad \hat{\mathscr{G}} = \begin{bmatrix} \dfrac{n^2 k}{1 + n^2 k} \\ \\ \dfrac{n^2 k}{1 + n^2 k} \end{bmatrix},$$

care este în concordanță cu (145).

În rezumat, cu excepția termenilor care conțin derivatele surselor, am obținut ecuația de stare vectorială completă din calculul unei rețele multiport rezistive, împreună cu evaluarea lui $\mathscr{C}$ și $\mathscr{L}$ ca submatrice ale matricei capacităților secțiunilor și matricei inductanțelor buclelor. Nu am obținut termenii conținuți în derivatele surselor și care apar cînd există degenerări. Relațiile (118) și (123) arată însă că acești termeni se pot calcula destul de ușor prin altă metodă, în comparație cu matricele de multiport. Pentru acuratețe, se precizează că ecuațiile de stare au fost obținute printr-o serie de calcule referitoare numai la relațiile la porți dar trebuie totuși să admitem că termenii derivatelor surselor nu apar. Aceasta înseamnă că presupunem că rețeaua nu are surse de tensiune într-o buclă de capacități și nici surse de curent într-o secțiune de conductanțe. În termenii submatricelor $\mathbf{Q}_l$, presupunem că $\mathbf{Q}_{EC} = 0$ și $\mathbf{Q}_{LJ} = 0$.

Ecuații de ieșire

Avînd găsită o metodă de determinare a ecuației de stare vectorială prin calcule asupra multiportului rezistiv, să încercăm să găsim în mod similar, orice variabilă care poate fi aleasă ca o ieșire. Considerăm din nou fig. 4.11. Variabilele porților conțin toate variabilele de ieșire posibile. Această afirmație este clară pentru tensiunile și curenții elementelor reactive și surselor. Numai că sînt ca necunoscute și variabilele ramurilor rezistive. Pentru orice variabile de rezistență putem folosi tensiunile surselor de curent și curenții surselor de tensiune în modul următor. Orice variabilă de tensiune a unei laturi de rezistență, poate fi interpretată ca tensiunea pe o sursă de curent, prin conectarea în paralel a unei surse de curent de valoare zero. Similar, orice curent prin latura de rezistență poate fi considerat drept curentul unei surse de tensiune prin plasarea unei surse de tensiune de valoare zero în serie cu latura respectivă. În felul acesta ne complicăm puțin, dar interpretarea este mai ușoară.

În fig. 4.11, variabilele de stare sînt acum $\mathbf{v}_{Ct}$ şi $\mathbf{i}_{Ll}$. Termenul $\mathbf{v}_{Cl}$ poate fi exprimat în funcţie de $\mathbf{v}_{Ct}$ prin KVL aplicată pe buclele de capacităţi. Similar, $\mathbf{i}_{Lt}$ poate fi exprimat în funcţie de $\mathbf{i}_{Ll}$ prin KCL aplicată la secţiunile de inductanţă. Aceasta permite scrierea următorului set de variabile

$$\mathbf{i}_{Cl} \quad \mathbf{i}_{Ct} \quad \mathbf{i}_{E}$$

$$\mathbf{v}_{Lt} \quad \mathbf{v}_{Ll} \quad \mathbf{v}_{J}$$

Considerăm primul set. În relaţia $v - i$ $\mathbf{i}_{Cl} = \mathbf{C}_l \, d\mathbf{v}_{Cl}/dt$ introducem ecuaţia KVL din (113e). Amintindu-ne presupunerea că $\mathbf{Q}_{EC} = 0$ obţinem $\mathbf{i}_{Cl} = \mathbf{C}_l \, \mathbf{Q}'_{CC} \, d\mathbf{v}_{Ct}/dt$. Dar $d\mathbf{v}_{Ct}/dt$ este exprimată în termenii variabilelor de stare şi a surselor prin ecuaţia de stare. Folosind (129) în această ecuaţie, obţinem:

$$\mathbf{i}_{Cl} = \mathbf{C}_l \, \mathbf{Q}'_{CC} \, \mathscr{C}^{-1} \left\{ [-\mathscr{Y} \quad \mathscr{H}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Ll} \end{bmatrix} + [-\hat{\mathscr{Y}} \quad \hat{\mathscr{H}}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{i}_J \end{bmatrix} \right\}. \qquad (152a)$$

O dezvoltare similară pentru v_{Lt} ne conduce la

$$\mathbf{v}_{Lt} = (\mathbf{L}_{tl} - \mathbf{L}_{tt} \, \mathbf{Q}_{LL}) \, \mathscr{L}^{-1} \left\{ [\mathscr{G} \quad -\mathscr{Z}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Ll} \end{bmatrix} + [\hat{\mathscr{G}} \quad -\hat{\mathscr{Z}}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{i}_J \end{bmatrix} \right\}. \qquad (152b)$$

Astfel, atît curenţii coardelor de capacităţi cît şi tensiunile ramurilor de inductanţe pot fi exprimate ca variabile de ieşire în termenii variabilelor de stare şi variabilelor surselor. În afară de matricele deja găsite, pentru formarea ecuaţiilor de stare (adică $\mathscr{L}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{Y}$ şi $\mathscr{H}$), e necesară o cunoaştere a matricelor topologice $\mathbf{Q}_{CC}$ şi $\mathbf{Q}_{LL}$, şi a matricelor de parametrii $\mathbf{C}_l$, $\mathbf{L}_{tt}$ şi $\mathbf{L}_{tl}$.

De asemenea pentru $\mathbf{i}_{Ct}$ şi $\mathbf{v}_{Ll}$, care sînt variabilele complementare variabilelor de stare, am găsit deja pe (146). Totuşi, aceasta nu este în forma dorită pentru ecuaţiile de ieşire din cauza termenilor care conţin pe $\mathbf{i}_{Cl}$ şi $\mathbf{v}_{Lt}$. Pentru eliminarea acestora se foloseşte (152), astfel că (146) poate fi scrisă astfel:

$$\mathbf{i}_{Ct} = \mathbf{C}_t \, \mathscr{C}^{-1} \left\{ [-\mathscr{Y} \quad \mathscr{H}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Ll} \end{bmatrix} + [-\hat{\mathscr{Y}} \quad \hat{\mathscr{H}}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{i}_J \end{bmatrix} \right\}, \qquad (153a)$$

$$\mathbf{v}_{Ll} = (\mathbf{L}_{ll} - \mathbf{L}_{lt} \, \mathbf{Q}_{LL}) \, \mathscr{L}^{-1} \left\{ [\mathscr{G} \quad -\mathscr{Z}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Ll} \end{bmatrix} + [\hat{\mathscr{G}} \quad -\hat{\mathscr{Z}}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{i}_J \end{bmatrix} \right\}. \qquad (153b)$$

Observăm că orice variabilă de tensiune sau curent a componentelor reactive poate fi scrisă ca o ieşire, în forma standard în funcţie de variabi-

lele de stare și surse. Cu excepția matricelor C_t și $L_{ll} - L_{lt} Q_{LL}$, aceasta este făcută în termenii matricelor deja găsite în scrierea ecuațiilor de stare.

Aceasta permite scrierea variabilelor v_J și i_E. Reamintim că ecuațiile topologice care exprimau aceste variabile în (113a) și (113b) nu au fost folosite pentru obținerea ecuațiilor de stare. După ce soluțiile pentru v_{Rt} și i_{Rl} din (126) sînt introduse în aceste ecuații, rezultatul va apare în termenii variabilelor de stare și a surselor. Ea va avea următoarea formă:

$$\begin{bmatrix} i_E \\ v_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{\mathscr{Y}} & \overline{\mathscr{H}} \\ \overline{\mathscr{G}} & -\overline{\mathscr{Z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ct} \\ i_{Ll} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\overline{\overline{\mathscr{Y}}} & \overline{\overline{\mathscr{H}}} \\ \overline{\overline{\mathscr{G}}} & -\overline{\overline{\mathscr{Z}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_E \\ i_J \end{bmatrix}. \tag{154}$$

Interpretarea matricelor în aceste expresii poate fi obținută în termenii rețelei multiport din fig. 4.11 în același mod ca cel arătat anterior; de exemplu, $\overline{\mathscr{Y}}$ este obținut prin lăsarea în gol a coardelor de inductanțe și surse de curent independente (și de asemenea a ramurilor de inductanțe), înlocuind ramurile de capacități cu surse de tensiune v_{Ct}, scurtcircuitînd sursele de curent independente și scriind o expresie care leagă curenții $(-i_E)$ în aceste scurtcircuite cu v_{Ct}.

Concluzia acestei discuții este următoarea. Privind o rețea ca fiind formată prin interconectarea unor subrețele alcătuite din componente de același tip, ca în fig. 4.11, am găsit o metodă de evaluare a acestor matrice, care sînt coeficienții variabilelor de stare și ai variabilelor surselor în ecuația de stare. Presupunem că rețeaua nu conține surse de tensiune în buclele de capacități și nici surse de curent în secțiunile de inductanțe. Printr-o metodă similară putem calcula matricele care sînt coeficienți în ecuația de ieșire, indiferent de tipul variabilelor de ieșire. Cînd variabilele de ieșire sînt variabile de elemente reactive, nu sînt necesare alte calcule asupra multiportului rezistiv. Ecuațiile sînt prezentate în tabelul 4.3.

Tabelul 4.3

Interpretarea multiport

$$\begin{bmatrix} i_{Ct} \\ v_{Ll} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathscr{Y} & \mathscr{H} \\ \mathscr{G} & -\mathscr{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ct} \\ i_{Ll} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{\mathscr{Y}} & \hat{\mathscr{H}} \\ \hat{\mathscr{G}} & -\hat{\mathscr{Z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_E \\ i_J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Q_{CC} & 0 \\ 0 & Q'_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{Ct} \\ v_{Ll} \end{bmatrix}$$

Ecuații de ieșire

$$\begin{bmatrix} i_{Ct} \\ i_{Cl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_t \mathscr{C}^{-1} \\ C_l Q'_{CC} \mathscr{C}^{-1} \end{bmatrix} \left\{ [\mathscr{Y} \quad \mathscr{H}] \begin{bmatrix} v_{Ct} \\ i_{Lt} \end{bmatrix} + [-\hat{\mathscr{Y}} \quad \hat{\mathscr{H}}] \begin{bmatrix} v_E \\ i_J \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} v_{Ll} \\ v_{Lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L_{ll} - L_{lt} Q_{LL}) \mathscr{L}^{-1} \\ L_{tl} - L_{tt} Q_{LL}) \mathscr{L}^{-1} \end{bmatrix} \left\{ [\mathscr{G} \quad -\mathscr{Z}] \begin{bmatrix} v_{Ct} \\ i_{Ll} \end{bmatrix} \hat{+} [\mathscr{G} \quad -\hat{\mathscr{Z}} \begin{bmatrix} v_E \\ i_J \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} i_E \\ v_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{\mathscr{Y}} & \overline{\mathscr{H}} \\ \overline{\mathscr{G}} & -\overline{\mathscr{Z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Ct} \\ i_{Ll} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\overline{\overline{\mathscr{Y}}} & \overline{\overline{\mathscr{H}}} \\ \overline{\overline{\mathscr{G}}} & -\overline{\overline{\mathscr{Z}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_E \\ v_J \end{bmatrix}$$

Pentru ilustrare, considerăm reţeaua arătată în fig. 4.15 *a*. Folosind circuitul echivalent obişnuit pentru triode, se obţine reţeaua echivalentă în fig. 4.15 *b*. Să considerăm ca mărimi de ieşire tensiunea v şi curentul i_3. Introducem o sursă de curent în paralel pe terminalele din dreapta cu $i_g = 0$. În graf, această sursă de curent este reprezentată prin latura 11. Latura 8 este latura comandată de sursa de curent. Există o buclă de capacităţi, astfel că o capacitate devine o coardă a arborelui normal.

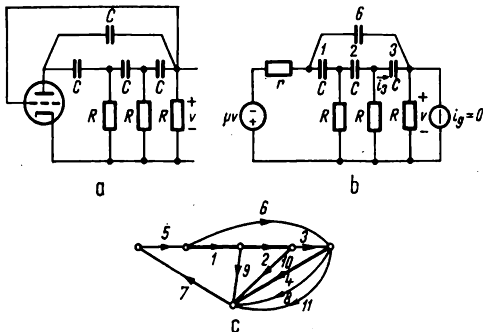


Fig. 4.15. Reţea de oscilator RC.

Secţiunile *f* definite de ramurile de capacităţi 1, 2 şi 3 conţin fiecare capacitatea 6, cu aceeaşi orientare. Deci matricea $\mathscr{C}$ se poate scrie uşor şi anume:

$$\mathscr{C} = \begin{bmatrix} 2C & C & C \\ C & 2C & C \\ C & C & 2C \end{bmatrix}.$$

Deoarece nu există inductanţe şi surse de tensiune, (146) şi (154) se reduc la:

$$\mathbf{i}_{Ct} = -\mathscr{Y}\mathbf{v}_{Ct} + \hat{\mathscr{H}}\mathbf{i}_J - \mathbf{Q}'_{CC}\,\mathbf{i}_{Cl}, \qquad (155a)$$

$$\mathbf{v}_J = \bar{\mathscr{G}}\mathbf{v}_{Ot} - \bar{\bar{\mathscr{Z}}}\mathbf{i}_J. \qquad 155b)$$

Pentru a găsi pe $\mathscr{Y}$ şi $\bar{\mathscr{G}}$, lăsăm în gol coarda de capacitate 6 şi sursa de curent (În acest caz, ultima etapă nu este necesară deoarece unica sursă

de curent are valoarea zero). Înlocuim ramurile de capacităţi prin surse de tensiune. Reţeaua rezultată este arătată în fig. 4.16 *a*. O problemă este acum calcularea curenţilor i_1, i_2 şi i_3 din această reţea rezistivă, printr-o metodă convenabilă. Detaliile de calcule vor fi lăsate pentru dumneavoastră. Rezultatul este:

$$-\mathbf{i}_{Ct} = \begin{bmatrix} -i_1 \\ -i_2 \\ -i_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3r + (\mu + 1)R} \begin{bmatrix} 3 & 2 - \mu & 1 - 2\mu \\ 2 & 2 + 2r/R & 1 - \mu + r/R \\ 1 & 1 + r/R & 1 + 2r/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathscr{Y}\mathbf{v}_{Ct}.$$

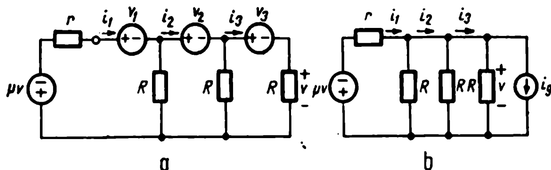


Fig. 4.16. Reţea de rezistenţă pentru calculul lui $\mathscr{Y}$.

Din diagramă, este clar, că $\mathbf{v}_J = [v] = [Ri_3]$; astfel că $\bar{\mathscr{G}}$ este găsit de asemeni uşor şi anume:

$$\mathbf{v}_J = v = \left[\frac{-R}{3r + (\mu + 1)R} \; \frac{-(R + r)}{3r + (\mu + 1)R} \; \frac{-(R + 2r)}{3r + (\mu + 1)R}\right] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \bar{\mathscr{G}}\mathbf{v}_{Ct}.$$

Pentru matricele care au rămas vom lăsa în gol coarda de capacitate 6 şi vom scurtcircuita ramurile de capacităţi. Detaliile de calcul rămîn pentru dumneavoastră. Rezultatul va fi:

$$\mathbf{i}_{Ct} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3r + (\mu + 1)R} \begin{bmatrix} (\mu + 1)R \\ r + (\mu + 1)R \\ 2r + (\mu + 1)R \end{bmatrix} \mathbf{i}_g = \hat{\mathscr{H}}\,\mathbf{i}_J,$$

$$\mathbf{v}_J = v = \frac{rR}{3r + (\mu + 1)R}(-\mathbf{i}_g) = -\bar{\bar{\mathscr{Z}}}\,\mathbf{i}_J.$$

În acest exemplu, deoarece unica sursă este o sursă de curent de valoare zero, nu este necesar să găsim $\hat{\mathscr{H}}$ şi $\hat{\mathscr{L}}$; ele vor fi oricum multiplicate prin zero în ecuaţiile finale. Le-am calculat aici, dar numai pentru a face o exemplificare.

Putem acum să scriem cu uşurinţă ecuaţia de stare şi ecuaţia de ieşire. Pentru simplitate, să folosim următoarele valori numerice: $C = \frac{1}{4}$; $r = R = 10$; $\mu = 6$. Atunci:

$$\mathscr{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathscr{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{Y} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 3 & -4 & -11 \\ 2 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathscr{H}} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 70 \\ 80 \\ 90 \end{bmatrix}.$$

$$\bar{\mathscr{G}} = \frac{1}{100}[-10 \quad -20 \quad -30], \quad \bar{\bar{\mathscr{L}}} = [1].$$

Ieşirea i_3 este un curent printr-o ramură de capacitate. Deci, pentru a obţine ecuaţia de ieşire corespunzătoare, trebuie să folosim (153 *a*) care se reduce la $\mathbf{i}_{Ct} = -\mathbf{C}_t\, \mathscr{C}^{-1}\mathscr{Y}\, \mathbf{v}_{Ct}$, unde $\mathbf{C}_t$ este o matrice diagonală cu elementele diagonalei egale cu $C = \frac{1}{4}$. Din $\mathbf{i}_{Ct}$ nu ne interesează decît linia a treia. Astfel ecuaţia de stare şi ieşire va fi:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathscr{C}^{-1}\mathscr{Y}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 6 & -18 & -32 \\ 2 & 14 & -4 \\ -2 & 6 & 24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} v \\ i_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} -10 & -20 & -30 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Aceasta completează exemplul.

PROBLEME

P 1. Pentru reţelele din fig. 4. P1 determinaţi:

a) numărul de frecvenţe naturale şi

b) numărul de frecvenţe naturale diferite de zero. Verificaţi răspunsurile dvs. prin considerarea formulelor topologice pentru determinarea matricei admitanţelor la noduri sau a matricei impedanţelor pe bucle.

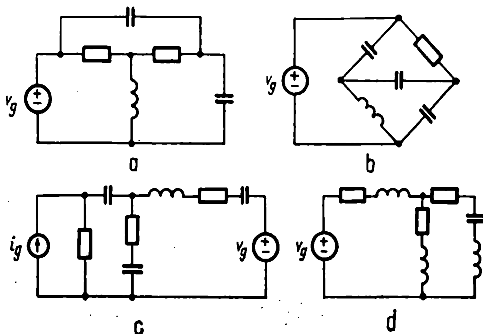


Fig. 4. P1

P 2. Pentru fiecare din reţelele din fig. 4. P 1, trasaţi cel puţin un arbore normal.

P 3. Arătaţi cel puţin trei arbori normali pentru reţeaua din fig. 4.3 din text.

P 4. Cîţi arbori normali există în fig. 4.5 din text?

P 5. Ecuaţia 24 referitoare la fig. 4.5 conţine derivata tensiunilor surselor. Faceţi o transformare de variabile astfel ca ecuaţia corespunzătoare în noile variabile să nu conţină derivatele tensiunilor surselor. Puteţi interpreta noile variabile în termenii reţelei?

P 6. Presupunem că **A** şi **B** sînt matrice patrate de acelaşi ordin. În ce condiţii este valabilă următoarea relaţie:

$$\varepsilon^{\mathbf{A}}\varepsilon^{\mathbf{B}} = \varepsilon^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$$

Folosiţi acest rezultat pentru a arăta că (44) este o consecinţă valabilă a lui (36).

P 7. Arătaţi că fiecare din următoarele matrice satisface ecuaţia sa caracteristică.

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

P 8. Folosind teorema Cayley-Hamilton, găsiți inversa fiecărei matrice nesingulare din Problema 7.

P 9. Fie $f(s)$ un polinom și $d(s)$ polinomul caracteristic al matricei $\mathscr{A}$. Fie $g(s)$ polinomul este de cel mai mic grad care se obține cînd $f(s)$ este împărțit prin $d(s)$. Evaluați pe $f(\mathscr{A})$ în fiecare din următoarele cazuri:

$$\text{(a)}\ f(s) = s^6 + 3s^4 + 3s^2 \quad \text{și} \quad \mathscr{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(b)}\ f(s) = s^5 + s^4 + s^3 + s + 1 \quad \text{și} \quad \mathscr{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c)}\ f(s) = s^4 + s^3 + 1 \quad \text{și} \quad \mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -23 & 36 \\ 0 & -18 & 28 \end{bmatrix}.$$

P 10. Pentru o matrice dată $\mathscr{A}$, să se observe că $d(s)$ este egal cu polinomul minim $m(s)$ dacă zerourile lui $d(s)$ sînt simple. Pentru fiecare din următoarele matrice cu valori proprii simple, evaluați $\varepsilon^{\mathscr{A}t}$ folosind formula de interpolare a lui Lagrange.

$$\text{(a)}\ \mathscr{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \qquad \text{(d)}\ \mathscr{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(b)}\ \mathscr{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & -15 & -7 \end{bmatrix} \qquad \text{(e)}\ \mathscr{A} = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c)}\ \mathscr{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(f)}\ \mathscr{A} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 0 & 9 & 0 \\ 18 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

P 11. Pentru fiecare din matricele din problema 10, aplicați ecuațiile (76) sau (82) dacă valorile proprii nu sînt simple, și rezolvați-le pentru coeficienții g_i, folosind $f(s) = \varepsilon^{st}$. Din aceasta determinați $\varepsilon^{\mathscr{A}t}$ și comparați-le cu rezultatul anterior.

P 12. Pentru fiecare din matricele problemei 10, folosiți algoritmul matricelor rezolvante pentru evaluarea lui $[sU-\mathscr{A}]^{-1}$. Apoi faceți o dezvoltare în fracții parțiale a lui $[sU-\mathscr{A}]^{-1}$ pentru a determina matricele constituante ale lui $\mathscr{A}$.

P 13. Pentru fiecare din matricele problemei 10 determinați matricele constituante prin metoda polinoamelor rezolvante, folosind $f_i(s) = s^{i-1}$.

P 14. Pentru fiecare din matricele problemei 10, determinați matricele constituante prin metoda polinoamelor rezolvante folosind setul de polinoame din (106).

P 15. Evaluați următoarele funcții matriceale.

$$\text{(a) } \ln \mathscr{A},\quad \mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{(b) } \sin \mathscr{A}t,\quad \mathscr{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c) } \cosh \mathscr{A}t,\quad \mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

P 16. Rezolvați următoarele seturi de ecuații de stare, cu vectorul de stare evaluat folosind inițial pe (45), apoi (52) și în final, cînd este posibil (54) cu (49) și (59). În fiecare caz evaluați $\varepsilon^{\mathscr{A}t}$ prin găsirea în primul rînd a matricelor constituante ale lui $\mathscr{A}$ și aplicînd apoi (84)

(a)
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \epsilon^{-t} \\ 2 \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \epsilon^{-t} \\ 2 \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ x_3(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c) $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t\varepsilon^{-t} \\ \varepsilon^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$[w_1] = [1\ \ 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [2\ \ -2]\begin{bmatrix} t\varepsilon^{-t} \\ \varepsilon^{-2t} \end{bmatrix} + [0\ \ -2]\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} t\varepsilon^{-t} \\ \varepsilon^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(d) $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}[\sin t]$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(e) $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -20 \\ 15 & -17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t\varepsilon^{-t} \\ 1-\varepsilon^{-t} \\ \varepsilon^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$[w_1] = [-3\ \ 2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt}[1\ \ 0\ \ -2]\begin{bmatrix} t\varepsilon^{-t} \\ 1-\varepsilon^{-t} \\ \varepsilon^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(f) $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 12 & -3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

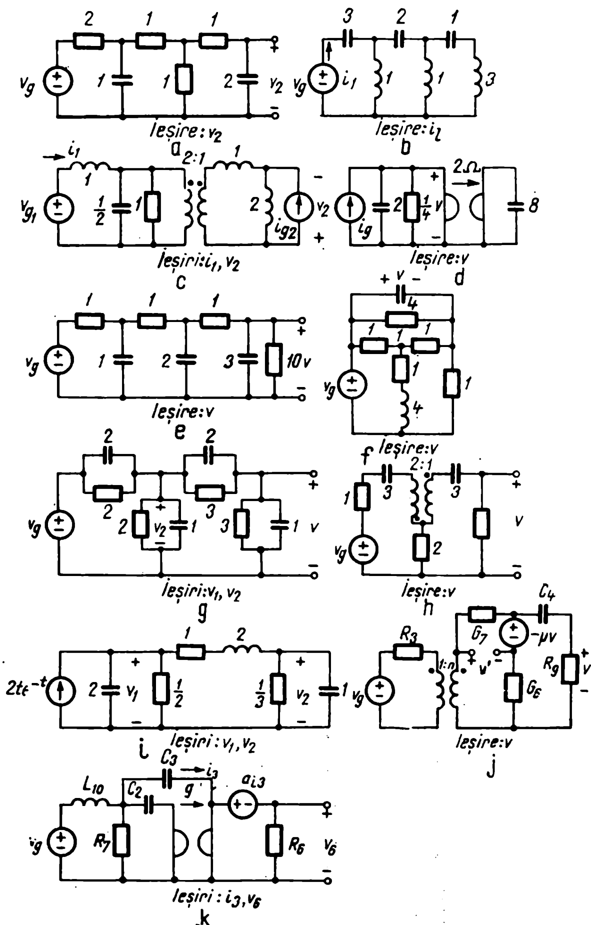

Ieșire: v_2
a
Ieșire: i_l
b
Ieșiri: i_1, v_2
c
Ieșire: v
d
Ieșire: v
e
Ieșire: v
f
Ieșiri: v_1, v_2
g
Ieșire: v
h
Ieșiri: v_1, v_2
i
Ieșire: v
j
Ieșiri: i_3, v_6
k

Fig. 4. P18

P 17. Dacă valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$ sînt diferite de acelea ale lui $\mathscr{F}$, atunci

$$\mathscr{S} = - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r_i} \mathbf{K}_{ij} \mathscr{B} \mathscr{K} (\mathscr{F} - s_i \mathbf{U})^{-j}$$

este soluţia unică a

$$\mathscr{A}\mathscr{S} - \mathscr{S}\mathscr{F} = \mathscr{B}\mathscr{K},$$

unde $\mathbf{K}_{ij}$ sînt matricele constituante şi s_i sînt valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$. Fie r_i notaţia multiplicităţii lui s_i şi k numărul de valori proprii distincte. Cînd valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$ şi $\mathscr{F}$ sînt diferite, rezolvaţi pe $\mathscr{S}$ prin folosirea formulei de mai sus, pentru fiecare din părţile problemei 16.

P 18. Pentru fiecare din reţelele din fig. 4.P18. obţineţi ecuaţiile de stare prin a) metoda matricei formale şi b) metoda evaluării parametrilor multiportului rezistiv.

P 19. Obţineţi ecuaţiile de stare pentru reţeaua din fig. 4. P19 prin ambele metode: metoda matriceală şi metoda evaluării parametrilor multiportului rezistiv. Pentru probă folosiţi circuitul echivalent arătat. Variabilele de răspuns sînt tensiunile pe toate inductanţele.

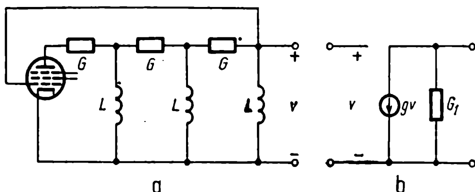


Fig. 4. P 19

P 20. Determinaţi ordinul de complexitate al reţelelor active, nereciproce din fig. 4. P20.

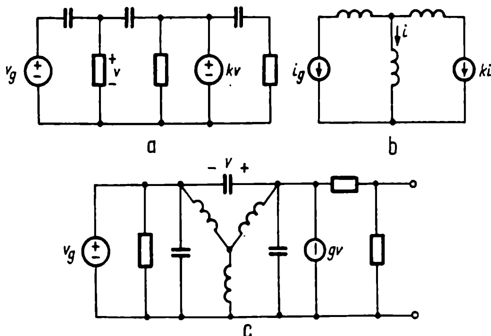


Fig. 4. P 20.

P 21. Folosind metoda din paragraful 4.6, găsiţi ecuaţiile de stare pentru reţelele din fig. 4.P21. În a) ieşirea este $i_1(t)$; alegeţi un arbore normal care să conţină toate capacităţile C. În (b) ieşirile sînt i_1 şi v_2; alegeţi arborele normal care să includă pe L_a.

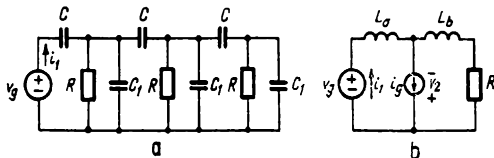


Fig. 4. P 21

P 22. Obţineţi ecuaţiile de stare pentru amplificatorul cu un singur etaj arătat în fig. 4 P. 22*a*. Folosiţi circuitul echivalent Π hibrid pentru tranzistor, reprezentat în fig. 4. P22*b*. Răspunsul reţelei este tensiunea v_2.

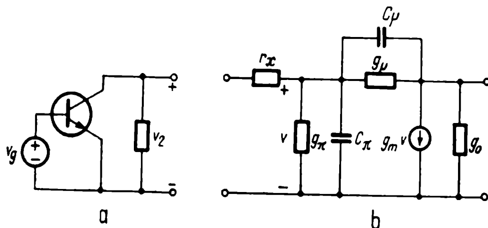


Fig. 4. P 22

P. 23. Obţineţi ecuaţiile de stare pentru reţeaua din fig. 4. P23. Rezolvaţi pentru matricea de tranziţie a stărilor. Scrieţi ecuaţia pentru soluţia vectorului de răspuns $\mathbf{w} = [v_2 v_3]'$. Capacităţile nu sînt încărcate la $t_0 = 0$. Găsiţi soluţia

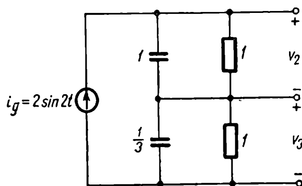


Fig. 4. P 23

P 24. În obţinerea formulării generale a ecuaţiilor de stare din consideraţii topologice, am presupus că toate laturile pot fi clasificate în : 1) surse independente, (2) capacităţi, (3) inductanţe, sau (4) rezistenţe. Formularea generală a ecuaţiilor de stare poate fi făcută de asemenea folosind latura combinată arătată în fig. 4 P24 *a* în locul unei laturi de capacitate ;

•. o latură compusă ca cea din fig. 4 P24*b* în locul unei laturi de inductanțe. Rezistențele asociate vor continua să existe ca laturi. Deduceți în detaliu această metodă. Discutați avantajele și dezavantajele obținerii ecuațiilor de stare în acest fel.

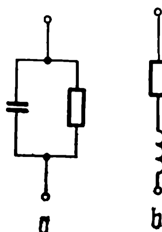


Fig 4. P 24

P 25. Folosiți metoda dezvoltată în problema 21, la determinarea ecuațiilor de stare, pentru fiecare din rețelele reprezentate în fig. 4 P25. Sînt indicate pentru fiecare caz variabilele de ieșire.

Ieșiri: v_2, v_3

a

Ieșiri: i_3, i_4

b

Ieșiri: v_3, v_4

c

Ieșire v

d

Fig. 4. P 25

P 26. Determinaţi ecuaţiile de stare pentru amplificatorul arătat în fig. 4. P26 *a*. Folosiţi modelul tranzistorului arătat în fig. 4. P24*b*.

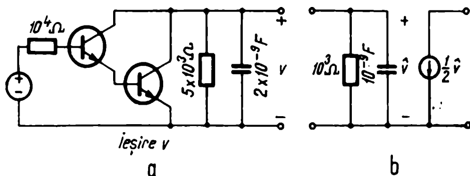


Fig. 4. P. 26

P 27. Obţineţi ecuaţiile de stare pentru amplificatorul cu trei etaje reprezentat în fig. 4. P 27*a*. Folosiţi modelul triodei arătat în fig. 4. P27*b*.

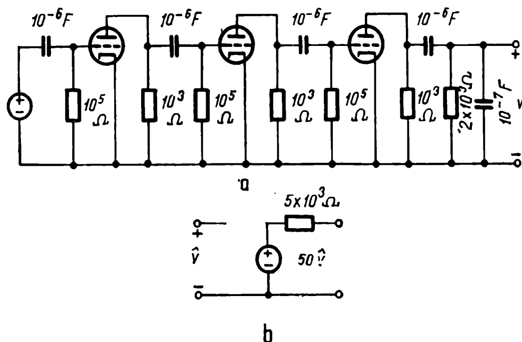


Fig. 4. P. 27

P 28. În text, pentru obţinerea ecuaţiilor de stare, a fost folosită reprezentarea hibridă *g* pentru deducerea relaţiilor $v - i$ la rezistenţe. Este posibilă însă şi o altă reprezentare. Înlocuiţi ecuaţiile rezistive din (125) cu unul din următoarele seturi de ecuaţii şi arătaţi că acestea împreună cu ecuaţiile Kirchhoff determină vectorii $\mathbf{i}_{Rt}$ şi $\mathbf{v}_{Rt}$ necesari în (119) şi (124). Formulaţi explicit orice condiţie necesară care asigură o soluţie pentru $\mathbf{i}_{Rl}$ şi $\mathbf{v}_{Rl}$.

(a) $\mathbf{v}_{Rl} = \mathbf{H}_{ll}\,\mathbf{i}_{Rl} + \mathbf{H}_{lt}\,\mathbf{v}_{Rt}$

$\mathbf{i}_{Rt} = \mathbf{H}_{tl}\,\mathbf{i}_{Rl} + \mathbf{H}_{tt}\,\mathbf{v}_{Rt}$

(b) $\mathbf{v}_{Rl} = \mathbf{Z}_{ll}\,\mathbf{i}_{Rl} + \mathbf{Z}_{lt}\,\mathbf{i}_{Rt}$

$\mathbf{v}_{Rt} = \mathbf{Z}_{tl}\,\mathbf{i}_{Rl} + \mathbf{Z}_{tt}\,\mathbf{i}_{Rt}$

(c) $\mathbf{i}_{Rl} = \mathbf{Y}_{ll}\,\mathbf{v}_{Rl} + \mathbf{Y}_{lt}\,\mathbf{v}_{Rt}$

$\mathbf{i}_{Rt} = \mathbf{Y}_{tl}\,\mathbf{v}_{Rl} + \mathbf{Y}_{tt}\,\mathbf{v}_{Rt}$

(d) $\mathbf{v}_{Rl} = \mathbf{A}\mathbf{v}_{Rt} - \mathbf{B}\mathbf{i}_{Rt}$

$\mathbf{i}_{Rl} = \mathbf{C}\mathbf{v}_{Rt} - \mathbf{D}\mathbf{i}_{Rt}$

(e) $\mathbf{v}_{Rt} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}_{Rl} - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{i}_{Rl}$

$\mathbf{i}_{Rt} = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{v}_{Rl} - \hat{\mathbf{D}}\mathbf{i}_{Rl}$

P 29. În rețelele din fig. 4.4 și 4.5 din text, obțineți pe i_{Rl} și v_{Rl} folosind metoda bazată pe (125) și discutată în text, apoi deduceți pe i_{R_l} și v_{R_l} folosind una din celelalte reprezentări din problema 28. Unele reprezentări conduc la mai puține calcule în rezolvare? Discuții.

P 30. Determinați ecuațiile de stare pentru rețeaua reprezentată în fig. 4. P30. Folosiți modelul tranzistorului arătat în fig. 4. P26*b*.

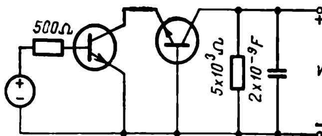


Fig. 4. P 30

P 31. Determinați ecuațiile de stare pentru rețeaua amplificatorului diferențial reprezentată în fig. 4. P 31. Folosiți modelul tranzistorului arătat în fig. 4. P26*b*.

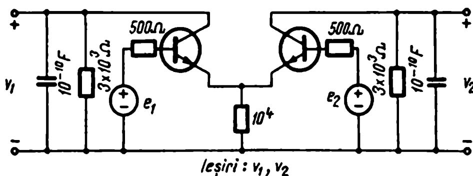


Fig 4. P 31

P 32. Determinați ecuațiile de stare pentru rețeaua reprezentată în fig. 4. P32, folosind modelul tranzistorului arătat în fig. 4. P26*b*.

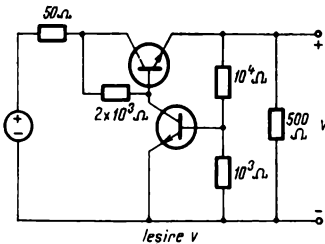


Fig 4. P 32

P 33. Determinaţi ecuaţia de stare pentru fiecare din reţelele de oscilator arătate în fig. 4. P33 *a*, *b*, *c* folosind modelul tranzistorului din fig. 4. P33*d*.

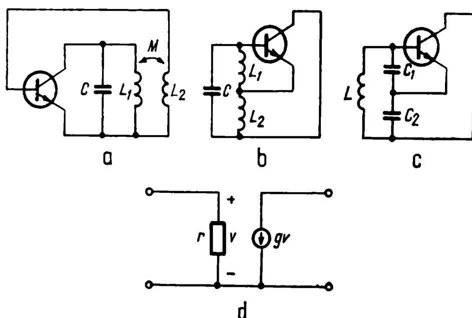


Fig. 4. P 33

P 34. Reţeaua reprezentată în fig. 4 P34 este un circuit de oscilator *RC* simplu. Determinaţi ecuaţia de stare şi indicaţi pentru ce valoare a lui α există valori proprii imaginare ale lui $\mathscr{A}$.

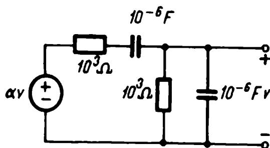


Fig 4. P 34

P 35. Presupunem că $\mathscr{A}$ şi $\mathscr{F}$ din (57) nu au valori proprii comune. Fie $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda^{n-i}$ şi $\sum_{i=0}^{m} \beta_i \lambda^{m-i}$ polinoamele caracteristice ale lui $\mathscr{A}$ şi respectiv $\mathscr{F}$.

Fie

$$M_0 = 0$$

$$M_1 = \mathscr{B}\mathscr{K}$$

$$M_k = \mathscr{A} M_{k-1} + M_{k-1} \mathscr{F} - A M_{k-2} \mathscr{F}, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Soluţia lui (57) este atunci dată de una din următoarele ecuaţii:

$$\mathscr{S} = -\left\{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i M_{n-i}\right\}\left\{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathscr{F}^{n-i}\right\}^{-1}$$

$$\mathscr{S} = \left\{\sum_{i=0}^{m} \beta_i \mathscr{A}^{m-i}\right\}^{-1}\left\{\sum_{i=0}^{m-1} \beta_i M_{m-i}\right\}$$

Pentru fiecare parte a problemei 16, găsiţi pe $\mathscr{S}$ folosind una din formulele de mai sus, atunci cînd valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$ şi $\mathscr{F}$ sînt diferite.

P 36. (a). Pentru rețeaua arătată în fig. 4. P 36*a*., specificați numărul de frecvențe naturale și numărul de frecvențe naturale diferite de zero. b) Repetați aceasta pentru rețeaua din fig. 4. P 36*b*. Stabiliți dacă valorile frecvențelor naturale (nu numărul lor) sînt aceleași sau diferite în cele două cazuri. Explicați.

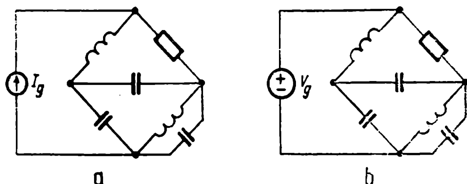


Fig 4. P 36

Următoarele șase probleme fac pregătirea pentru scrierea unui program pe calculator, care să ne ajute în rezolvarea acestor probleme. În fiecare caz, trebuie găsită o diagramă de programare (organigramă) și un set de instrucțiuni de programare. Pentru un program pe un calculator digital, cel mai folosit limbaj este FORTRAN IV. Găsiți un set de instrucțiuni inițiale pentru program.

P 37. Pregătiți un program de evaluare a $[su - \mathscr{A}]^{-1}$ prin algoritmul matricei rezolvante din (98).

P 38. Pregătiți un program de evaluare a lui $\mathscr{A}^{-1}$ din (99).

P 39. Pregătiți un program de identificare a unui arbore normal pentru o rețea (conectată) unde fiecare latură este determinată de o succesiune de cuadripleți de numere: primul număr indică latura, al doilea număr indică tipul ei în concordanță cu lista dată mai jos; al treilea și al patrulea număr identifică nodurile la care este conectată latura. Programul va numerota din nou laturile în concordanță cu convenția din paragraful 4.5, referitoare la „considerații

Număr	*Tip de laturi*
1	*Surse de tensiune independente*
2	*Surse de curent independente*
3	*Capacitate*
4	*Rezistență*
5	*Inductanță*

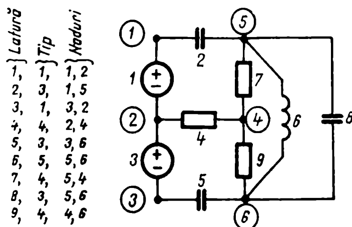


Fig. 4. P 39

topologice" şi va oferi ca date de ieşire succesiunea cuadripleţilor de numere cu noua numerotare a laturilor. Un exemplu de set tipic de date este dat în fig. 4. P39 pentru reţeaua prezentată în această figură.

P 40. Pregătiţi un program pentru a determina, în primul rînd, o reducere a matricei de incidenţă la noduri a unei reţele conectate şi apoi a matricei de secţiuni f asociată unui arbore normal. Luaţi ca date de intrare, datele de ieşire din problema 39. Presupuneţi că al treilea număr al fiecărui cuadruplet de numere indică nodul la care este conectată coada săgeţii laturei; atunci nodul de la vîrful săgeţii laturii va fi al patrulea număr.

P 41. Pregătiţi un program pentru determinarea lui $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}_1$ şi $\mathscr{B}_2$ din (142) cînd reţeaua este (a) *RC* fără coarde de capacităţi şi fără ramuri de rezistenţe

(b) *RC* fără coarde de capacităţi

(c) *RC* fără ramuri de rezistenţe

(d) *RC* (generală)

(e) *RL* fără ramuri de inductanţe şi fără coarde de rezistenţe.

(f) *RL* fără ramuri de inductanţe

(g) *RL* fără coarde de rezistenţe

(h) *RL* (generală)

(i) *LC* fără coarde de capacităţi şi fără ramuri de inductanţe.

(j) *LC* fără coarde de capacităţi

(k) *LC* fără ramuri de inductanţe

(l) *LC* (generală)

(m) *RLC* (generală)

Datele de intrare sînt oferite ca o succesiune de cvintripleţi de numere: primul număr indică ramura, al doilea număr indică tipul său în concordanţă cu convenţia făcută în problema 39, al treilea număr indică nodul din care porneşte latura, al patrulea număr indică nodul în care soseşte latura, şi al cincilea număr indică valoarea parametrului asociat laturei (zero pentru toate sursele independente). Presupunem că evaluarea secţiunii f prin programul de la problema 40* este accesibilă.

P 42. Combinăm programele problemelor 39* şi 40* cu fiecare din cele ale problemei 41* pentru a obţine un singur program care, pornind de la datele de intrare ale problemei 41*, să determine ecuaţia de stare a reţelei pentru fiecare din tipurile reţelelor enumerate în problema 41*.

5

Soluții integrale

Am ajuns acum la stadiul în care fiind dată orice rețea liniară, invariantă în timp și o excitație arbitrară, se poate obține răspunsul complet. Metodele în domeniul frecvenței complexe din capitolele 2 și 3 sînt foarte utile în determinarea unei expresii analitice pentru răspuns. În particular cînd rețeaua nu are energie inițial acumulată am văzut că ea poate fi caracterizată prin funcția sa de transfer. Deci nu este neapărat necesar ca rețeaua să fie dată, atît timp cît funcția sa de transfer este cunoscută.

Metodele în domeniul timp din capitolul 4 sînt de asemenea utile în stabilirea unei expresii analitice pentru răspuns, dar ele sînt îndeosebi adecvate evaluării numerice a răspunsului în domeniul timp.

Ca și în cazul metodelor în domeniul frecvenței complexe, dacă rețeaua nu are energie inițial acumulată, atunci nu este nevoie ca ea să fie dată; este suficient a cunoaște relația integrală ce dă răspunsul ei în funcție de excitație.

În acest capitol ne vom ocupa mai întîi de problema determinării răspunsului unei rețele la o excitație arbitrară — în cazul în care nu se dă rețeaua dar se cunoaște răspunsul ei la anumite excitații standard. Pentru a defini aceste excitații standard se vor folosi funcțiile treaptă și impuls unitate. Vom stabili rezultate analitice folosind ambele metode, în domeniul frecvenței complexe și în domeniul timp. În plus, vom trata problema obținerii rezultatelor numerice în domeniul timp.

Pentru început, să facem legătura între răspunsul rețelei în domeniul frecvenței complexe și răspunsul în domeniul timp. Pentru realizarea acestui scop avem nevoie de un rezultat din teoria transformatelor Laplace. Deoarece acest rezultat este probabil mai puțin familiar decît cele obișnuite cum ar fi dezvoltarea în fracții parțiale, vom consacra o anumită parte a prezentului capitol, discutării lui.

5.1. TEOREMA CONVOLUŢIEI

Presupunem că o reţea neavînd energie iniţial acumulată este excitată de o sursă de tensiune şi/sau curent la diferite intrări şi se cere a se determina tensiunile şi/sau curenţii la ieşirile ei.

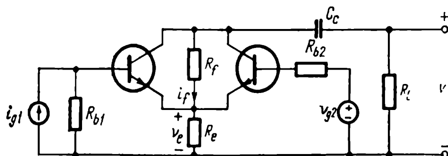


Fig. 5.1. Exemplu.

În fig. 5.1 este dat un exemplu; în circuitul reprezentînd un amplificator există o sursă de tensiune şi o sursă de curent. Răspunsurile cerute sînt cele două tensiuni v_e şi v_0 şi curentul i_f. Transformatele vectorilor excitaţie şi răspuns pentru acest circuit sînt după cum urmează:

$$\mathbf{E}(s)=\mathscr{L}[\mathbf{e}(t)]=\begin{bmatrix} I_{g1}(s) \\ V_{g2}(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}(s)=\mathscr{L}\,\mathbf{w}(t)=\begin{bmatrix} V_0(s) \\ V_e(s) \\ I_f(s) \end{bmatrix},$$

presupunînd că $\mathbf{e}(t)$ este transformabil. Fie $\mathbf{H}(s)$ matricea funcţiilor de transfer, denumită *matrice de transfer*, legînd transformatele excitaţiei şi răspunsului. Atunci transformata răspunsului poate fi scrisă:

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{H}(s)\,\mathbf{E}(s). \tag{1}$$

În acest exemplu, **H** este de ordinul (3,2), dar relaţia este cu totul generală. În cazul general **E** este un p-vector; şi **W**, un r-vector; deci **H** este de ordinul (r, p).

Fiind cunoscut $\mathbf{W}(s)$, în majoritatea cazurilor se găseşte $\mathbf{w}(t)$ făcînd dezvoltarea în fracţii parţiale a lui $\mathbf{W}(s)$ calculînd apoi transformata inversă pentru fiecare termen din dezvoltare. Ceea ce dorim să facem acum, este să exprimăm atît $\mathbf{H}(s)$ cît şi $\mathbf{E}(s)$ în raport cu funcţiile de timp ale căror transformate sînt. Presupunem că $\mathbf{H}(s)$ este transformata unei

matrice de funcţii avînd puncte ordinare [1]). Dacă putem exprima rezultatul calculelor următoare asupra acestor funcţii de timp în forma :

$$\mathbf{W}(s) = \int_0^\infty (\quad)\varepsilon^{-st}\,dt, \tag{2}$$

atunci, din definiţia transformatei Laplace, putem trage concluzia că termenul inchis în paranteze este vectorul răspuns dorit. Ceea ce intenţionăm să facem nu depinde de interpretarea lui $\mathbf{H}(s)$ ca o matrice de transfer şi a lui $\mathbf{E}(s)$ ca vector excitaţie. De aceea vom folosi în cursul dezvoltării de mai jos o notaţie mai generală.

Fie $\mathbf{F}_1(s)$ şi $\mathbf{F}_2(s)$ transformatele Laplace ale matricelor de funcţii $\mathscr{F}_1(t) = [f_{1ij}(t)]$ şi $\mathscr{F}_2(t) = [f_{2ij}(t)]$, respectiv; adică,

$$\mathbf{F}_1(s) = \int_0^\infty \mathscr{F}_1(u)\varepsilon^{-su}\,du, \tag{3 a}$$

$$\mathbf{F}_2(s) = \int_0^\infty \mathscr{F}_2(v)\,\varepsilon^{-sv}\,dv. \tag{3 b}$$

Am folosit variabilele auxiliare u şi v în locul lui t, pentru a evita confuzii în dezvoltarea ulterioară. Presupunem că produsul matricelor $\mathbf{F}_1(s)\mathbf{F}_2(s)$ este definit. Atunci găsim : $\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}_1(s).\ \mathbf{F}_2(s)$

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}_1(s)\mathbf{F}_2(s) \tag{4}$$

$$= \left[\int_0^\infty \mathscr{F}_1(u)\varepsilon^{-su}du\right]\left[\int_0^\infty \mathscr{F}_2(v)\varepsilon^{-sv}\,dv\right] = \int_0^\infty\int_0^\infty \mathscr{F}_1(u)\mathscr{F}_2(v)\varepsilon^{-s(u+v)}\,du\,dv.$$

Ultima egalitate este evident justificată căci fiecare integrală din rîndul al doilea este o constantă în raport cu cealaltă variabilă de integrare. Produsul integralelor din membrul al doilea poate fi interpretat ca o integrală dublă calculată pe un plan ale cărei axe coordonate sînt u şi v. Integrarea trebuie să fie făcută pe întreg cadranul întîi aşa cum se arată în fig. 5.2 a.

Vom face acum o transformare de variabile după cum urmează :

$$t = u + v,\qquad \tau = u. \tag{5}$$

[1]) Funcţie în sensul obişnuit al cuvîntului, iar în lucrarea de faţă fiind continuă, sau continuă pe porţiuni sau local integrabilă. Aceasta pentru a face deosebirea între funcţiile obişnuite şi cele generalizate definite în Anexa 1. (N.T.)

În realitate, a doua din relaţiile de mai sus este o transformare identitate şi este introdusă numai pentru claritate. Acum trebuie să exprimăm integrala dublă în funcţie de noile variabile. Elementul de suprafaţă $du\,dv$ referitor la variabilele iniţiale este legat de elementul de suprafaţă $d\tau\,dt$ referitor la noile variabile prin Jacobianul transformării: astfel [1]),

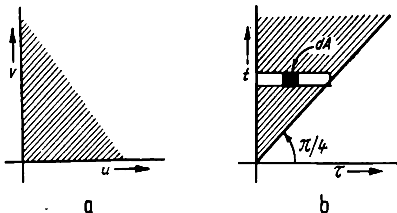


Fig. 5.2. Domeniul de integrare.

$$du\;dv = \left| \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial v}{\partial t} \right| d\tau\, dt. \tag{6}$$

Calculînd derivatele parţiale din (5) şi substituind aici se obţine rezultatul $d\tau\; dt = du\; dv$

Pentru a completa schimbarea de variabile trebuie să determinăm noile limite de integrare. Observăm că deoarece $t = u + v = \tau + v$, şi deoarece v ia numai valori pozitive, t nu poate fi mai mic decît τ. Dreapta $t = \tau$ în planul $\tau - t$ este bisectoarea primului cadran; astfel domeniul de integrare este suprafaţa cuprinsă între această dreaptă şi axa t, aşa cum se arată în fig. 5.2 b. Pentru a acoperi această suprafaţă, integrăm mai întîi în raport cu τ de la $\tau = 0$ la $\tau = t$; apoi integrăm în raport cu t de la 0 la infinit.

Cu schimbarea de variabile dată în (5) şi cu limitele schimbate aşa cum s-a discutat, din (4) obţinem:

$$\mathbf{F}(s) = \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \mathscr{F}_1(\tau)\,\mathscr{F}_2(t - \tau)\,d\tau \right\} \varepsilon^{-st}\,dt. \tag{7}$$

Aceasta este exact de forma (2), astfel încît putem identifica cantitatea dintre paranteze ca $\mathscr{F}(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\mathbf{F}(s)\}$. Este clar că dacă în (3) scriem $\mathbf{F}_1(s)$ în funcţie de variabila auxiliară v şi $\mathbf{F}_2(s)$ în funcţie de u, atunci în rezultatul dat de (7) argumentele lui $\mathscr{F}_1$ şi $\mathscr{F}_2$ vor fi schimbate între ele. Ca

[1] Vezi Wilfred Kaplan, *Advanced Calculus* Addison-Wesley, Cambridge Mass 1953 p. 200.

urmare, rezultatul final poate fi scris în cele două forme diferite echivalente:

$$\mathscr{F}(t) = \int_0^t \mathscr{F}_1(\tau)\,\mathscr{F}_2(t-\tau)\,d\tau, \tag{8}$$

$$\mathscr{F}(t) = \int_0^t \mathscr{F}_1(t-\tau)\,\mathscr{F}_2(\tau)\,d\tau. \tag{9}$$

Operaţia executată asupra celor două matrice $\mathscr{F}_1(t)$ şi $\mathscr{F}_2(t)$ reprezentată de aceste două expresii se numeşte *convoluţie*. Spunem că s-a efectuat produsul de convoluţie al matricelor. Convoluţia a două matrice este adesea notată prin notaţia prescurtată $\mathscr{F}_1 * \mathscr{F}_2$. Putem enunţa rezultatul de mai sus sub forma unei teoreme, după cum urmează. ***Teorema convoluţiei.*** — *Fie două matrice $\mathscr{F}_1(t)$ şi $\mathscr{F}_2(t)$ transformabile Laplace şi avînd transformatele* $\mathbf{F}_1(s)$ *respectiv* $\mathbf{F}_2(s)$. *Produsul lui* $\mathbf{F}_1(s)$ cu $\mathbf{F}_2(s)$, *dacă ele se pot înmulţi, este transformata Laplace a produsului de convoluţie al lui $\mathscr{F}_1(t)$ prin $\mathscr{F}_2(t)$*

$$\mathscr{L}\{\mathscr{F}(t)\} = \mathbf{F}(s) = \mathbf{F}_1(s)\,\mathbf{F}_2(s), \tag{10}$$

unde

$$\mathscr{F}(t) = \mathscr{F}_1 * \mathscr{F}_2 = \int_0^t \mathscr{F}_1(\tau)\,\mathscr{F}_2(t-\tau)\,dr = \int_0^t \mathscr{F}_1(t-\tau)\,\mathscr{F}_2(\tau)\,d\tau. \tag{11}$$

Deoarece folosim încă notaţia generală, să enunţăm încă un rezultat util referitor la derivata produsului de convoluţie a două matrice. Dacă cele două matrice $\mathscr{F}_1(t)$ şi $\mathscr{F}_2(t)$, sînt transformabile Laplace şi în plus sînt derivabile pentru $t > 0$ (ele trebuie să fie numai continue la $t = 0$), atunci produsul lor de convoluţie va fi de asemenea derivabil pentru $t > 0$. Derivata va fi

$$\dot{\mathscr{F}}(t) = \int_0^t \mathscr{F}_1(\tau)\,\dot{\mathscr{F}}_2(t-\tau)\,d\tau + \mathscr{F}_1(t)\,\mathscr{F}_2(0) \tag{12}$$

sau

$$\dot{\mathscr{F}}(t) = \int_0^t \dot{\mathscr{F}}_1(t-\tau)\,\mathscr{F}_2(\tau)\,d\tau + \mathscr{F}_1(0)\,\mathscr{F}_2(t), \tag{13}$$

unde punctul indică derivarea în raport cu t. Aceste expresii pot fi obţinute aplicînd formula lui Leibnitz de derivare sub integrală. De fapt, putem observa că în realitate nu avem nevoie de ipoteza că $\mathscr{F}_1(t)$ şi $\mathscr{F}_2(t)$

sînt ambele derivabile. — Dacă *una din funcţii este derivabilă şi cealaltă continuă, atunci produsul de convoluţie* $\mathscr{F}_1 * \mathscr{F}_2$ *este derivabil.*

Deşi toate relaţiile precedente au fost scrise în formă matriceală, rezultatele sînt desigur valabile la fel de bine şi în cazul scalar, un scalar fiind un vector unidimensional.

Astfel, pentru scalari, (8) şi (9) devin :

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau)\, d\tau,$$

$$f(t) = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau)\, dt.$$

5.2. RĂSPUNSUL LA IMPULSUL UNITATE

Să ne reîntoarcem la problema iniţială a găsirii răspunsului $\mathbf{w}(t)$, al unei reţele neavînd energie iniţial acumulată, avînd matricea de transfer ($\mathbf{H}(s)$, la excitaţia $\mathbf{e}(t)$. Reamintim că $\mathbf{H}(s)$ trebuie să fie transformata unei matrice de funcţii avînd puncte ordinare pentru a putea aplica teorema convoluţiei. Aceasta implică faptul că $\mathbf{H}(s)$ tinde la $\mathbf{0}$ cînd s tinde la infinit în interiorul domeniului de convergenţă pentru $\mathbf{H}(s)$. Fie $\mathbf{W}_\delta(t)$ transformata inversă a lui $\mathbf{H}(s)$; adică;

$$\mathscr{L}^{-1}\{\mathbf{H}(s)\} = \mathbf{W}_\delta(t), \tag{14}$$

motivul alegerii acestei notaţii se va vedea în cele ce urmează. Teorema convoluţiei aplicată lui (1) furnizează rezultatul

$$\mathbf{w}(t) = \int_0^t \mathbf{W}_\delta(\tau)\, \mathbf{e}(t - \tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathbf{W}_\delta(t - \tau)\, \mathbf{e}(\tau)\, d\tau. \tag{15}$$

Acesta este un rezultat semnificativ. Folosind această expresie putem exprima răspunsul în domeniul timp al unei reţele la o excitaţie arbitrară $\mathbf{e}(t)$ în funcţie de transformata inversă a matricei de transfer a reţelei.

Este posibilă şi o altă interpretare, dacă în discuţia noastră admitem funcţia impuls unitate [1]).

O astfel de interpretare nu este absolut necesară deoarece (15) este de sine stătătoare. Totuşi, interpretarea de mai jos este folositoare în anumite ocazii. De exemplu, folosind această interpretare se poate găsi în mod experimental o bună aproximaţie pentru $\mathbf{W}_\delta(t)$.

Presupunem că toate excitaţiile sînt zero cu excepţia celei numerotate cu j şi că aceasta este un impuls. În acest caz, vectorul excitaţie notat prin $\mathbf{e}_{\delta j}(t)$, are toate componentele egale cu zero cu excepţia celei de ordin j, acesta fiind funcţia impuls $\delta(t)$. Putem privi $\mathbf{e}_{\delta j}(t)$ ca fiind coloana j a unei matrice a excitaţiilor $\mathbf{E}_\delta(t)$, de dimensiuni $p \times p$. Astfel, de exemplu

$$\mathbf{e}_{\delta 2}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

este al doilea vector coloană al matricei excitaţiilor

$$\mathbf{E}_\delta(t) = \begin{bmatrix} \delta(t) & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \delta(t) \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots & \delta(t) \end{bmatrix} = \delta(t)\mathbf{U}$$

În mod analog, fie $\mathbf{w}_{\delta j}(t)$ vectorul răspuns rezultat din $\mathbf{e}_{\delta j}(t)$; adică $\mathbf{w}_{\delta j}(t)$ este mulţimea tuturor răspunsurilor scalare, atunci cînd există excitaţie la o singură intrare şi această excitaţie este un impuls. Să aran-

---

[1]) Funcţia impuls $\delta(t)$ nu este o funcţie avînd puncte ordinare; ea este o funcţie generalizată. În mod simbolic, putem folosi relaţii matematice ce conţin funcţia impuls unitate şi derivatele sale, aşa cum folosim relaţii pentru funcţiile ordinare. Pe de altă parte, rigurozitatea matematică implică considerarea fiecărei funcţii ca o funcţie generalizată şi fiecare operaţie ca fiind definită în spaţiul funcţiilor generalizate. O scurtă tratare a teoriei funcţiilor generalizate este dată de Anexa 1. Aici este suficient să observăm că funcţia impuls satisface relaţiile de mai jos. Pentru $a \leqslant \tau \leqslant b$

$$\int_a^b \delta(t-\tau)\, d\tau = 1,$$

$$\int_a^b \delta(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = f(t),$$

$$\int_a^b \dot{\delta}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = \dot{f}(t).$$

Pentru valori ale lui τ în afara intervalului $[a, b]$ fiecare din integralele de mai sus devine zero.

jăm aceşti vectori $\mathbf{w}_{\delta j}$ în coloanele unei matrice $r \times p$, notată $\mathbf{W}_\delta(t)$ şi numită *răspunsul la impulsul unitate* al reţelei. —Observăm cu atenţie că $\mathbf{W}_\delta(t)$ este un set (mulţime) de vectori răspuns avînd cîte o coloană pentru fiecare coloană a lui $\mathbf{E}_\delta(t)$. Astfel $\mathbf{W}_\delta(t)$ nu este un răspuns observabil în timp ce fiecare din coloanele sale este un răspuns observabil. Pe de altă parte, suma elementelor în fiecare linie a lui $\mathbf{W}_\delta(t)$ este un răspuns observabil (scalar) şi anume răspunsul la suma tuturor excitaţiilor [1]), aceste excitaţii fiind toate impulsuri.

Să ilustrăm aceasta cu exemplul din fig. 5.1.

$$\mathbf{e}_{\delta 1}(t) = \begin{bmatrix} \delta(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_{\delta 2}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_\delta(t) = \begin{bmatrix} \delta(t) & 0 \\ 0 & \delta(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w}_{\delta 1}(t) = \begin{bmatrix} v_{o\delta 1}(t) \\ v_{e\delta 1}(t) \\ i_{f\delta 1}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_{\delta 2}(t) = \begin{bmatrix} v_{o\delta 2}(t) \\ v_{e\delta 2}(t) \\ i_{f\delta 2}(t) \end{bmatrix}. \quad \mathbf{W}_\delta(t) = \begin{bmatrix} v_{o\delta 1}(t) & v_{o\delta 2}(t) \\ v_{e\delta 1}(t) & v_{e\delta 2}(t) \\ i_{f\delta 1}(t) & i_{f\delta 2}(t) \end{bmatrix}$$

În final, suma elementelor din prima linie a lui $\mathbf{W}_\delta(t)$ (adică, $v_{0\delta 1}(t) + v_{0\delta 2}(t)$) este tensiunea $v_0(t)$ cînd fiecare din cele două surse din figură este un impuls.

Să considerăm transformatele Laplace. Deoarece $\mathbf{E}_\delta(t) = \delta(t)\mathbf{U}$ avem

$$\mathscr{L}\{\mathbf{E}_\delta(t)\} = \mathscr{L}\{\delta(t)\mathbf{U}\} = \mathbf{U}. \tag{16}$$

Ecuaţia (1) leagă coloanele corespunzătoare ale transformatelor lui $\mathbf{E}_\delta(t)$ şi $\mathbf{W}_\delta(t)$. Deci folosind (16) obţinem

$$\mathscr{L}\{\mathbf{W}_\delta(t)\} = \mathbf{H}(s)\mathscr{L}\{\mathbf{E}_\delta(t)\} = \mathbf{H}(s) \tag{17}$$

sau echivalent

$$\mathbf{W}_\delta(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\mathbf{H}(s)\}. \tag{18}$$

Ultima ecuaţie exprimă faptul că transformata inversă, a funcţiei de transfer a reţelei este egală cu răspunsul la impulsul unitate al reţelei. Am anticipat acest rezultat folosind notaţia din relaţia (14).

Să ne reîntoarcem la (15). Observăm că această ecuaţie exprimă faptul că fiind cunoscut răspunsul la impulsul unitate al unei reţele nea-

---

[1]) Se aplică la toate intrările impulsuri şi se observă răspunsul la ieşirea corespunzătoare liniei lui $\mathbf{W}_\delta(t)$, numărul total de ieşiri fiind r (*N T.*).

‑ând energie inițial acumulată, răspunsul la oricare altă excitație $e(t)$ este determinat. Ceea ce trebuie să facem este să înmulțim la stînga vectorul excitației în fiecare punct τ cu răspunsul la impulsul unitate — nu în același punct, ci într-un punct $(t-\tau)$ — și apoi să integrăm. Un alt punct de vedere este acela că vectorul de intrare este „ponderat" de către răspunsul la impulsul unitate. Aceasta a condus la numele de „matrice pondere" folosit de unii autori pentru răspunsul la impulsul unitate [1].

Să dezvoltăm puțin conceptul de ponderare. Un exemplu simplu va fi satisfăcător pentru ilustrarea celor de mai sus. Deci, să considerăm un circuit cu o singură intrare și o singură ieșire avînd funcția de transfer

$$H(s) = \frac{\frac{3}{4}}{(s+1)^2},$$

care este funcția de transfer $V_2(s)/V_1(s)$ a circuitului din fig. 5.3. Atunci răspunsul la impulsul unitate este dat de

$$w_\delta(t) = \frac{3}{4} t\varepsilon^{-t}.$$

Graficul acestei funcții este cel din fig. 5.4.

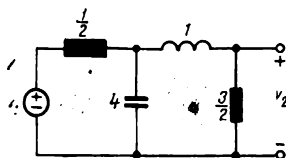


Fig. 5.3. Exemplu pentru conceptul de funcție de pondere.

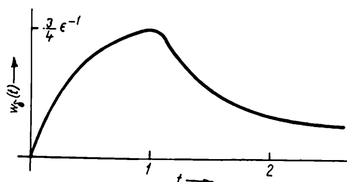


Fig. 5.4. Răspunsul la impulsul unitate al circuitului din fig. 5.3.

[1] Termenul de *funcție pondere* a fost folosit ca un alt nume pentru răspunsul la impulsul unitate al unei rețele cu o singură intrare și o singură ieșire. *Matricea pondere* este o generalizare naturală pentru cazul rețelelor cu mai multe intrări și ieșiri.

Presupunem că dorim să calculăm răspunsul acestui circuit la o anumită funcţie de intrare $e(t)$.

Pentru uşurinţa interpretării, să considerăm convoluţia lui $w_\delta(t)$ şi $e(t)$ în cea de a doua formă dată de (15). Vom folosi τ ca variabilă auxiliară. Pentru a obţine valoarea răspunsului pentru orice moment de timp dat τ, mai întîi vom inversa răspunsul la impulsul unitate şi îl vom translata de-a lungul axei τ astfel încît să obţinem $w_\delta(t-\tau)$ ca funcţie de τ. Să comparăm $w_\delta(t)$ în funcţie de t din fig. 5. 4 cu $w_\delta(t-\tau)$ în funcţie de τ din fig. 5.5a. În intervalul de la 0 la t excitaţia este suprapusă peste

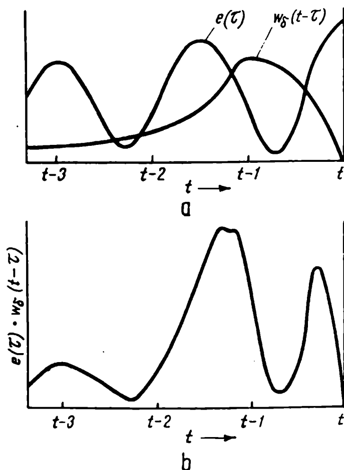


Fig. 5.5. Ilustrarea convoluţiei.

$w_\delta(t-\tau)$, în fig. 5.5a. Potrivit lui (15), trebuie să multiplicăm cele două curbe $w_\delta(t-\tau)$ şi $e(\tau)$ punct cu punct în acest interval. Produsul rezultant este reprezentat în fig. 5.5. b. Deoarece $w_\delta(0) = 0$, valoarea lui $e(\tau)$ în punctul t nu aduce nici o contribuţie la răspunsul în momentul t în ciuda faptului că $e(\tau)$ are o valoare maximă în acest punct. Pe de altă parte *cea mai importantă* vecinătate este aceea în jurul lui $(t-1)$ deoarece valorile lui $e(\tau)$ în această vecinătate sînt multiplicate de cea mai mare valoare luată de w_δ. În mod analog, valorile lui $e(\tau)$ pentru τ mai mic decît $(t-2)$ contribuie puţin la valoarea răspunsului în momentul t. Astfel, w_δ decide *ponderea* atribuită valorilor lui e în diferite momente de timp.

În acest caz, răspunsul, care conform lui (15) este integrala lui $w_\delta(t-\tau)$ $e(\tau)$ de la 0 la t, este dictat aproape în totalitate de valorile lui $e(t)$ din cele 2 secunde anterioare lui t; cea mai importantă contribuţie este dată de valorile lui $e(t)$ situate în jurul momentului de timp cu o secundă înaintea momentului de timp la care evaluăm răspunsul.

Funcţii de transfer diferite de zero la infinit

Se pune problema procedurii, în cazul în care funcţia de transfer a reţelei nu are un zero la infinit. În astfel de cazuri, $\mathbf{w}_\delta(t)$ va conţine impulsuri [1]) şi derivatele de ordinul unu ale impulsurilor. Deoarece admitem impulsuri unitate în excitaţie, putem la fel de bine să admitem condiţii mai puţin severe pentru $\mathbf{H}(s)$ şi să permitem acesteia să fie nenulă la infinit. Vom vedea mai jos ce efecte va avea acest lucru.

Funcţia de transfer a unei reţele poate fi mai mult decît egală cu o constantă diferită de zero la infinit, ea poate avea la infinit un pol de ordin unu. Fie $\mathbf{K}_\infty$ matricea reziduurilor lui $\mathbf{H}(s)$ în polul de la infinit, şi fie $\mathbf{K}$ o matrice constantă, limita a lui $\mathbf{H}(s) - \mathbf{K}_\infty \cdot s$, cînd s tinde către infinit de-a lungul axei reale. Atunci putem scrie

$$\mathbf{H}(s) = \hat{\mathbf{H}}(s) + \mathbf{K} + \mathbf{K}_\infty s, \tag{19}$$

unde $\hat{\mathbf{H}}(s)$ are un zero la infinit. Răspunsul la impulsul unitate va fi

$$\mathbf{W}_\delta(t) = \hat{\mathbf{W}}_\delta(t) + \mathbf{K}\delta(t) + \mathbf{K}_\infty\dot{\delta}(t), \tag{20}$$

unde $\hat{\mathbf{W}}_\delta(t)$ este o matrice cu o „comportare bună" în sensul că nu conţine funcţii impuls. Să folosim această expresie în cea de a doua formă a lui (15) pentru a găsi răspunsul reţelei la o excitaţie $\mathbf{e}(t)$.
Rezultatul va fi

$$\mathbf{w}(t) = \int_0^t \hat{\mathbf{W}}_\delta(t-\tau)\,\mathbf{e}(\tau)\,d\tau + \int_0^t \mathbf{K}\delta(t-\tau)\,\mathbf{e}(\tau)\,d\tau + \int_0^t \mathbf{K}_\infty\dot{\delta}(t-\tau)\,\mathbf{e}(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^t \hat{\mathbf{W}}_\delta(t-\tau)\,\mathbf{e}(\tau)\,d\tau + \mathbf{K}\mathbf{e}(t) + \mathbf{K}_\infty\dot{\mathbf{e}}(t). \tag{21}$$

---

[1]) Pentru prescurtare, atunci cînd nu se pot face confuzii, se va numi funcţia impuls unitate — pur şi simplu impuls. (N.T.)

Ultima etapă rezultă din proprietăţile funcţiilor impuls şi a derivatelor lor, date în Anexa 1. Relaţia (21) este forma generală a integralei de convoluţie.

O altă metodă de obţinere a integralei de convoluţie

În obţinerea relaţiei (21) am permis ca $\mathbf{W}_\delta(t)$ în cea de a doua integrală de convoluţie să conţină funcţii impuls şi derivate ale funcţiilor impuls; adică, nu toate elementele lui $\mathbf{W}_\delta(t)$ au fost în mod necesar funcţii avînd puncte ordinare. Dar teorema convoluţiei este valabilă şi atunci cînd elementele lui $\mathbf{W}_\delta(t)$ nu sînt funcţii avînd puncte ordinare; totuşi demonstraţia dată în paragraful precedent nu este valabilă în acest caz mai general.

Este necesar deci a se considera un alt mod de obţinere al relaţiei (21). Aceste lucru se realizează uşor folosind relaţiile în domeniul timp stabilite în cap. 4.

Reamintim că ecuaţiile de stare pentru o reţea pot fi scrise

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathscr{A}\mathbf{x} + \mathscr{B}\mathbf{e}, \tag{22a}$$

$$\mathbf{w} = \mathscr{C}\mathbf{x} + \mathscr{D}\mathbf{e} + \hat{\mathscr{D}}\frac{d}{dt}\mathbf{e}. \tag{22b}$$

De asemenea, reamintim că soluţia ecuaţiei diferenţiale pentru vectorul de stare şi din (22 b), soluţia pentru vectorul de ieşire sînt

$$\mathbf{x}(t) = \varepsilon^{\mathscr{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varepsilon^{\mathscr{A}(t-\tau)}\mathscr{B}\mathbf{e}(\tau)\,d\tau, \tag{23a}$$

$$\mathbf{w}(t) = \mathscr{C}\varepsilon^{\mathscr{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathscr{C}\varepsilon^{\mathscr{A}(t-\tau)}\mathscr{B}\mathbf{e}(\tau)\,d\tau + \mathscr{D}\mathbf{e} + \hat{\mathscr{D}}\frac{d\mathbf{e}}{dt}. \tag{23b}$$

Observăm că o parte a răspunsului este consecinţa stării iniţiale diferite de zero. Vom nota cu

$$\mathbf{w}^f(t) = \mathscr{C}\varepsilon^{\mathscr{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) \tag{24}$$

această parte. S-a ales ca indice superior f din cauză că $\mathbf{w}^f(t)$ este cunoscut ca *răspunsul liber* al reţelei; denumirea este potrivită căci $\mathbf{w}^f(t)$ este inde-

pendent de excitația rețelei. Partea rămasă a răspunsului rezultă din excitația diferită de zero a rețelei. Vom nota cu

$$\mathbf{w}^c(t) = \int_0^t \mathscr{C}\varepsilon^{\mathscr{A}(t-\tau)}\mathscr{B}\mathbf{e}(\tau)\,d\tau + \mathscr{D}\mathbf{e}(t) + \hat{\mathscr{D}}\frac{d}{dt}\mathbf{e}(t) \tag{25}$$

această parte. Indicele superior c a fost ales din cauză că $\mathbf{w}^c(t)$ poate fi privit ca ***răspuns forțat*** la excitația rețelei. Ca o consecință a acestor definiții avem

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}^f(t) + \mathbf{w}^c(t). \tag{26}$$

Cînd rețeaua este fără energie inițial acumulată $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ și deci $\mathbf{w}^f(t) = \mathbf{0}$. Astfel, răspunsul total al rețelei este pur și simplu răspunsul forțat. Apoi, luînd pentru t_0 valoarea 0, obținem

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}^c(t) = \int_0^t \mathscr{C}\varepsilon^{\mathscr{A}(t-\tau)}\mathscr{B}\mathbf{e}(\tau)\,d\tau + \mathscr{D}\mathbf{e}(t) + \hat{\mathscr{D}}\dot{\mathbf{e}}(t). \tag{27}$$

Observăm că (21) și (27) sînt identice după identificarea lui $\hat{\mathbf{W}}_\delta(t)$ cu $\mathscr{C}\mathrm{e}^{\mathscr{A}t}\mathscr{B}$, $\mathbf{K}$ cu $\mathscr{D}$, și $\mathbf{K}_\infty$ cu $\hat{\mathscr{D}}$; astfel teorema este demonstrată.

Urmează un comentariu suplimentar asupra necesității introducerii funcțiilor generalizate. Vom restrînge $\mathbf{e}(t)$ și $\mathbf{w}(t)$ la mulțimea funcțiilor vectoriale de variabilă reală avînd puncte ordinare. După cum se vede din (27), dacă $\hat{\mathscr{D}} \neq 0$ atunci trebuie să impunem și cerința că $\mathbf{e}(t)$ să admită o derivată pentru $t \geqslant 0$. O restricție ca aceasta nu este de dorit deoarece este necesar de multe ori să examinăm $\mathbf{w}(t)$ cînd elemente ale lui $\mathbf{e}(t)$ sînt funcții discontinue sau avînd discontinuități de pantă. Două funcții tipice de acest fel sînt funcția treaptă unitate

$$u(t) = 0 \quad (t<0)$$

$$= 1 \quad (0 \leqslant t)$$

care este discontinuă în $t = 0$; și funcția rampă $t\,u(t)$, care are o discontinuitate de pantă (a derivatei de ordin unu) în $t = 0$. Putem ocoli restricția de derivabilitate înlocuind restricția inițială asupra lui $\mathbf{e}(t)$ și $\mathbf{w}(t)$ la mulțimea funcțiilor vectoriale avînd puncte ordinare, și permițînd lui $\mathbf{e}(t)$ și $\mathbf{w}(t)$ să fie funcții vectoriale generalizate. Acest fapt înlătură restricția de derivabilitate deoarece orice funcție generalizată are derivate de orice ordin.

Exemple

Aplicarea integralei de convoluţie pentru soluţionarea unei probleme este directă. Este mai întîi necesar să se găsească răspunsul la impulsul unitate $\mathbf{W}_\delta(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\mathbf{H}(s)\}$ şi apoi să se substitue acesta împreună cu excitaţia aşa cum este dată de expresia funcţională — fiind posibile expresii funcţionale diferite pentru intervale diferite în timp — în integrala de convoluţie. Vom ilustra acest procedeu în următorul exemplu.

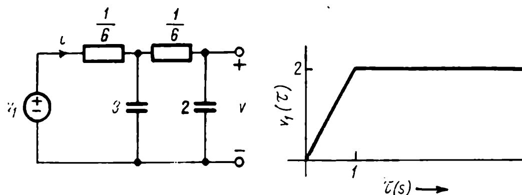


Fig. 5.6. Exemplu.

În circuitul neavînd energie iniţial acumulată din fig. 5.6, fie răspunsul v şi i după cum sînt indicate în figură. Există o singură sursă avînd tensiunea dată în grafic. Deci vectorul excitaţiei este de dimensiune 1×1 şi vectorul răspuns este de dimensiune 2×1.Matricea funcţiilor de transfer este

$$\mathbf{H}(s) = \mathscr{L}\begin{bmatrix} v_\delta(t) \\ \\ i_\delta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{6}{(s+1)(s+6)} \\ \\ \dfrac{6s(s+5)}{(s+1)(s+6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{6/5}{s+1} - \dfrac{6/5}{s+6} \\ \\ 6 - \dfrac{24/5}{s+1} - \dfrac{36/5}{s+6} \end{bmatrix}.$$

(Cititorul poate intra în detaliile găsirii acestor expresii; de exemplu, prin scrierea ecuaţiilor de stare). Observăm că primul element al lui $\mathbf{H}(s)$ are un zero la infinit, în timp ce al doilea este nenul la infinit. Răspunsul la impulsul unitate va fi deci

$$\mathbf{W}_\delta(t) = \mathscr{L}^{-1}\mathbf{H}(s) = \frac{6}{5}\begin{bmatrix} \varepsilon^{-t} - \varepsilon^{-6t} \\ -4\varepsilon^{-t} - 6\varepsilon^{-6t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}\delta(t).$$

Deoarece excitaţia are o formă funcţională diferită pentru $0 \leqslant t \leqslant 1$ de cea pentru $t \geqslant 1$, răspunsul pentru fiecare din aceste intervale de timp trebuie să fie găsit separat. Astfel

$$v_1(t) = 2t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

$$v_1(t) = 2 \qquad (t \geqslant 1)$$

Deci, din (21), pentru $0 \leqslant t \leqslant 1$, rezultă

$$\mathbf{w}(t) = \int_0^t \frac{6}{5}\begin{bmatrix} \varepsilon^{-(t-\tau)} - \varepsilon^{-6(t-\tau)} \\ -4\varepsilon^{-(t-\tau)} - 6\varepsilon^{-6(t-\tau)} \end{bmatrix} 2\tau d\tau + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} 2t$$

$$= \frac{12}{5}\begin{bmatrix} \varepsilon^{-t}\int_0^t \tau\varepsilon^{\tau} d\tau - \varepsilon^{-6t}\int_0^t \tau\varepsilon^{6\tau} d\tau \\ -4\varepsilon^{-t}\int_0^t \tau\varepsilon^{\tau} d\tau - 6\varepsilon^{-6t}\int_0^t \tau\varepsilon^{6\tau} d\tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 12t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2t - \frac{7}{3} + \frac{12}{5}\varepsilon^{-t} - \frac{1}{15}\varepsilon^{-6t} \\ -12t + 10 - \frac{48}{5}\varepsilon^{-t} - \frac{2}{5}\varepsilon^{-6t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 12t \end{bmatrix}.$$

În intervalul $t \geqslant 1$ integrala de la 0 la t trebuie să fie scrisă ca suma a două integrale, prima de la 0 la 1, a doua de la 1 la t. Excitația în primul interval este $v_1(t) = 2t$, aceeași ca în cazul de mai sus. Deci în calculul următor este suficient a înlocui limita t prin 1 în integrala precedentă și apoi a se calcula integrala a doua. Observăm că nu se înlocuiește $t = 1$ peste tot în integrala calculată mai sus ci numai în contribuția ce vine de la limita superioară. Astfel, pentru $t \geqslant 1$

$$\mathbf{w}(t) = \frac{12}{5}\begin{bmatrix} \varepsilon^{-\tau}\int_0^1 \tau\varepsilon^{\tau} d\tau - \varepsilon^{-6t}\int_0^1 \tau\varepsilon^{6\tau} d\tau \\ -4\varepsilon^{-t}\int_0^1 \tau\varepsilon^{\tau} d\tau - 6\varepsilon^{-6t}\int_0^1 \tau\varepsilon^{6\tau} d\tau \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{12}{5}\int_1^t \begin{bmatrix} \varepsilon^{-(t-\tau)} - \varepsilon^{-6(t-\tau)} \\ -4\varepsilon^{-(t-\tau)} - 6\varepsilon^{-6(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} 2$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{12}{5}(1 - \varepsilon^{-1})\,\varepsilon^{-(t-1)} + \frac{1}{15}(1 - \varepsilon^{-6})\,\varepsilon^{-6(t-1)} + 2 \\ \frac{48}{5}(1 - \varepsilon^{-1})\,\varepsilon^{-(t-1)} + \frac{2}{5}(1 - \varepsilon^{-6})\,\varepsilon^{-6(t-1)} - 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Cititorul poate executa în detaliu calculele de mai sus și verifica faptul că ambele expresii dau aceeași valoare pentru $\mathbf{w}$ la $t=1$.

5.3. RĂSPUNSUL LA TREAPTA UNITATE

În paragraful precedent am stabilit că răspunsul unei rețele neavînd energie inițial acumulată poate fi găsit simplu dacă se cunoaște răspunsul la impulsul unitate al aceleiași rețele. În acest paragraf vom arăta că

aceiaşi concluzie este valabilă şi în cazul cunoaşterii a ceea ce vom numi răspunsul la treapta unitate al reţelei.

Presupunem că toate excitaţiile sînt zero, cu excepţia celei de rang j, care este o treaptă unitate. Notăm prin $\mathbf{e}_{uj}(t)$ un vector excitaţie avînd toate elementele egale cu zero cu excepţia celui de rang j, aceasta fiind o treaptă unitate $u(t)$. Putem privi $\mathbf{e}_{uj}$ ca fiind coloana j a unei matrice $p \times p$, $\mathbf{E}_u(t)$. Astfel de exemplu

$$\mathbf{e}_{u3}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

este al treilea vector coloană al matricei excitaţiilor

$$\mathbf{E}_u(t) = \begin{bmatrix} u(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & u(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u(t) \end{bmatrix} = u(t)\mathbf{U}.$$

Analog, fie $\mathbf{w}_{uj}(t)$ vectorul răspuns rezultînd din $\mathbf{e}_{uj}(t)$; adică, $\mathbf{w}_{uj}(t)$ este mulţimea tuturor răspunsurilor scalare atunci cînd există o singură excitaţie şi această excitaţie este o treaptă unitate aplicată la intrarea a j—a. Presupunem că aceşti vectori sînt aranjaţi ca coloane ale unei matrice $r \times p$ notată $\mathbf{W}_u(t)$ şi numită ***răspunsul la treapta unitate*** al reţelei.

Considerăm acum transformatele Laplace. Din (1) rezultă că

$$\mathscr{L}\{\mathbf{W}_u(t)\} = \mathbf{H}(s)\mathscr{L}\{\mathbf{E}_u(t)\}. \tag{28}$$

Totuşi, deoarece $\mathscr{L}\{\mathbf{E}_u(t)\} = \mathscr{L}\{u(t)\mathbf{U}\} = \mathbf{U}/s$, rezultă că

$$\mathscr{L}\{\mathbf{W}_u(t)\} = \frac{1}{s}\mathbf{H}(s)\,. \tag{29}$$

Această expresie ne dă imediat o indicaţie asupra legăturii dintre răspunsul la treapta unitate şi răspunsul la impulsul unitate, deoarece $\mathbf{H}(s) = \mathscr{L}\{\mathbf{W}_\delta(t)\}$. Pentru a obţine o legătură între răspunsurile în domeniul

timp, considerăm transformata inversă a lui (29) ori direct, sau după multiplicarea sa cu s. Rezultatul va fi

$$\mathbf{W}_u(t) = \int_0^t \mathbf{W}_\delta(\tau)d\tau, \tag{30}$$

$$\mathbf{W}_\delta(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{W}_u(t) + \mathbf{W}_u(0)\,\delta(t). \tag{31}$$

Valoarea inițială a răspunsului la treapta unitate se găsește ușor din (29) folosind teorema valorii inițiale. Cu condiția ca $\mathbf{H}(\infty)$ să fie finit, aceasta va fi

$$\mathbf{W}_u(0) = \lim_{\sigma\to\infty} [s\mathscr{L}\{\mathbf{W}_u(t)\}_{s=\sigma}] = \lim_{\sigma\to\infty} \mathbf{H}(\sigma) = \mathbf{H}(\infty), \tag{32}$$

unde σ este un scalar real. Tragem concluzia că *valoarea inițială a răspunsului unei rețele va fi zero dacă funcția de transfer are un zero la infinit.* De asemenea, dacă $\mathbf{H}(\infty)$ este nenul dar finit valoarea inițială a răspunsului la treapta unitate va fi definită de zero iar răspunsul la impulsul unitate va conține el însuși un impuls unitate. Pe de altă parte, dacă $\mathbf{H}(\infty)$ este nenul dar infinit — $\mathbf{H}(s)$ are un pol simplu la infinit, atunci răspunsul la treapta unitate conține un impuls la $t = 0$, iar răspunsul la impulsul unitate conține derivata unui impuls la $t = 0$. Observăm că aceasta contravine regulilor obișnuite de calculul așa cum se vede în (30) și (31). Dacă $\mathbf{W}_\delta(t)$ este o matrice integrabilă, atunci (30) arată că $\mathbf{W}_u(0)$ trebuie să fie zero (pur și simplu luînd limita superioară egală cu zero); totuși, dacă admitem impulsuri, atunci trebuie să admitem și consecințele. Să observăm totuși că dacă $\mathbf{W}_\delta(t)$ conține un impuls de ordinul unu, $\mathbf{W}_u(t)$ nu conține impulsuri; dacă $\mathbf{W}_\delta(t)$ conține derivata unui impuls, $\mathbf{W}_u(t)$ conține un impuls dar nu conține derivata unui impuls. Deci $\mathbf{W}_u(t)$ are întotdeauna o comportare mai bună din acest punct de vedere decît $\mathbf{W}_\delta(t)$.

Să ne reîntoarcem la problema inițială și să presupunem că se aplică rețelei o excitație $\mathbf{e}(t)$ transformabilă Laplace (dar neconținînd impulsuri). Ecuația (1) leagă transformatele. Această ecuație poate fi rescrisă în unul din mai multe moduri după multiplicarea numărătorului și numitorului prin s. Astfel

$$\mathbf{W}(s) = s\left[\frac{\mathbf{H}(s)}{s}\mathbf{E}(s)\right] = s[\mathscr{L}\{\mathbf{W}_u(t)\}\mathbf{E}(s)], \tag{33}$$

$$\mathbf{W}(s) = \left[s\frac{\mathbf{H}(s)}{s}\right]\mathbf{E}(s) = s[\mathscr{L}\{\mathbf{W}_u(t)\}]\mathbf{E}(s), \tag{34}$$

$$\mathbf{W}(s) = \left[\frac{\mathbf{H}(s)}{s}\right][s\mathbf{E}(s)] = \mathscr{L}\{\mathbf{W}_u(t)\}\,[s\mathbf{E}(s)] \tag{35}$$

În fiecare caz am folosit (29) pentru a obţine termenii din partea dreaptă. Pentru a găsi $\mathbf{w}(t)$ vom folosi acum teorema convoluţiei. Ne vom ocupa de relaţia (33). Aceasta poate fi scrisă

$$\mathbf{W}(s) = s\mathbf{F}(s), \tag{36}$$

unde

$$\mathbf{F}(s) = \mathscr{L}\{\mathbf{W}_u(t)\}\mathbf{E}(s). \tag{37}$$

Folosind teorema convoluţiei putem scrie

$$\mathbf{f}(t) = \int_0^t \mathbf{W}_u(\tau)\, \mathbf{e}(t-\tau)d\tau = \int_0^t \mathbf{W}_u(t-\tau)\mathbf{e}(\tau)d\tau. \tag{38}$$

Dacă evaluăm $\mathbf{f}(0)$, vom găsi că este egală cu zero, în afară de cazul în care $\mathbf{W}_u(t)$ conţine un impuls. Am văzut că acest lucru nu este posibil chiar dacă $\mathbf{H}(s)$ are o valoare finită diferită de zero la infinit. De fapt, răspunsul la treapta unitate va conţine un impuls numai dacă $\mathbf{H}(s)$ are un pol la infinit. Deci, dacă admitem numai acele matrice $\mathbf{H}(s)$ care sînt regulate la infinit, atunci $\mathbf{w}(t)$ va fi derivata lui $\mathbf{f}(t)$ conform lui (36). Astfel

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t) &= \frac{d}{dt}\int_0^t \mathbf{W}_u(\tau)\, \mathbf{e}(t-\tau)d\tau \\ &= \frac{d}{dt}\int_0^t \mathbf{W}_u(t-\tau)\, \mathbf{e}(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{39}$$

Avem deci o expresie pentru răspunsul unei reţele neavînd energie iniţial acumulată, la o excitaţie $\mathbf{e}(t)$, în raport cu răspunsul la treapta unitate. Acest rezultat echivalează ca importanţă cu (15). Folosind rezultatele enunţate în (12) şi (13), putem pune ultima ecuaţie în următoarele două forme diferite:

$$\mathbf{w}(t) = \int_0^t \mathbf{W}_u(\tau)\dot{\mathbf{e}}(t-\tau)d\tau + \mathbf{W}_u(t)\, \mathbf{e}(0), \tag{40}$$

$$\mathbf{w}(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{W}}_u(t-\tau)\mathbf{e}(\tau)d\tau + \mathbf{W}_u(0)\mathbf{e}(t). \tag{41}$$

Aceasta va cere ca $\mathbf{e}(t)$ sau $\mathbf{W}_u(t)$ după caz să fie derivabile şi în mod corespunzător $\mathbf{e}(o)$ sau $\mathbf{W}_u(o)$ finite.

Aceleaşi expresii pot fi obţinute pe altă cale pornind de la (34) şi (35). Pentru a folosi (34) scriem mai întîi

$$\mathscr{L}^{-1}\{s\mathscr{L}[\mathbf{W}_u(t)]\} = \mathscr{L}^{-1}\{s\mathscr{L}[\mathbf{W}_u(t)]-\mathbf{W}_u(0) + \mathbf{W}_u(0)\}$$

$$= \frac{d}{dt}\mathbf{W}_u(t) + \mathbf{W}_u(0)\delta(t). \tag{42}$$

Putem folosi acum teorema convoluţiei asupra relaţiei (34). Rezultatul va fi

$$\mathbf{w}(t) = \int_0^t \left[\frac{d}{d\tau}\mathbf{W}_u(\tau) + \mathbf{W}_u(0)\delta(\tau)\right]\mathbf{e}(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t \dot{\mathbf{W}}_u(\tau)\mathbf{e}(t-\tau)d\tau + \mathbf{W}_u(0)\mathbf{e}(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{W}}_u(t-\tau)\mathbf{e}(\tau)d\tau + \mathbf{W}_u(0)\mathbf{e}(t), \tag{43}$$

care este acelaşi ca (41). Analog, (40) poate fi obţinut plecînd de la relaţia (35). Detaliile sînt lăsate cititorului.

În vederea folosirii lor ulterioare vom rescrie toate formele expresiilor obţinute. Ele sînt :

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{W}_u(t)\mathbf{e}(0) + \int_0^t \mathbf{W}_u(t-\tau)\dot{\mathbf{e}}(\tau)d\tau = \mathbf{W}_u(t)\mathbf{e}(0) + \int_0^t \mathbf{W}_u(\tau)\dot{\mathbf{e}}(t-\tau)d\tau, \tag{44}$$

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{W}_u(0)\mathbf{e}(t) + \int_0^t \dot{\mathbf{W}}_u(\tau)\mathbf{e}(t-\tau)d\tau = \mathbf{W}_u(0)\mathbf{e}(t) + \int_0^t \dot{\mathbf{W}}_u(t-\tau)\,\mathbf{e}(\tau)d\tau, \tag{45}$$

$$\mathbf{w}(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \mathbf{W}_u(\tau)\mathbf{e}(t-\tau)d\tau = \frac{d}{dt}\int_0^t \mathbf{W}_u(t-\tau)\mathbf{e}(\tau)d\tau. \tag{46}$$

Aceste expresii, nu sub formă vectorială ci scalară, au fost la origine folosite de către Duhamel în 1833 în dinamică. Ele mai sînt cunoscute sub numele de integralele Duhamel, integralele Carson, sau integralele de superpoziţie; Carson însuşi a numit (46) *formula fundamentală a teoriei circuitelor*.

Exemple

În aplicarea integralei de superpoziţie la calcularea răspunsului unei reţele, prima etapă constă în găsirea răspunsului $\mathbf{W}_u(t)$. Apoi trebuie luată o hotărîre asupra matricei care va fi inversată ca semn al argumentului şi translatată la argumentul $(t-\tau)$. Această alegere este de-

terminată de simplitatea integralelor rezultante. În continuare se va hotărî care din matricele **e** sau $\mathbf{W}_u$ va fi derivată. Uneori aici nu va fi necesară o alegere deoarece una din ele poate fi nederivabilă.

Pentru a ilustra aceasta considerăm din nou exemplul din fig. 5.6 care a fost rezolvat anterior folosind răspunsul la impulsul unitate. Deoarece am calculat acolo $\mathbf{W}_\delta(t)$, se poate găsi $\mathbf{w}_u(t)$ folosind (30). Rezultatul este

$$\mathbf{W}_u(t) = \int_0^t \mathbf{W}_\delta(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{6}{5}\begin{bmatrix} \varepsilon^{-\tau} - \varepsilon^{-6\tau} \\ -4\varepsilon^{-\tau} - 6\varepsilon^{-6\tau} \end{bmatrix} d\tau + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} \delta(\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 - 6\varepsilon^{-t} + \varepsilon^{-6t} \\ 24\varepsilon^{-t} + 6\varepsilon^{-6t} \end{bmatrix}.$$

Datorită formei funcţionale a excitaţiei, este mai simplu a deriva $\mathbf{e}(\tau) = [v_1(\tau)]$ decît $\mathbf{W}_u(t)$ Derivata este arătată în fig. 5.7. Se dă deasemenea şi forma ei analitică.

Să observăm că dacă în locul lui $\mathbf{e}(t)$ derivăm $\mathbf{W}_u(t)$, atunci folosind (31) pentru $\dot{\mathbf{W}}_u$ şi introducînd în (45) obţinem din nou integrala de convoluţie.

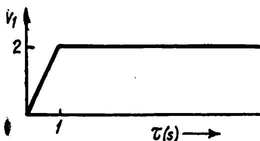
Să folosim cea de a doua formă a lui (44) care va fi mai simplă decît prima formă deoarece $\dot{v}_1(t-\tau) = 2[u(t-\tau)-u(t-\tau-1)]$ care este pur şi simplu pulsul dreptunghiular din fig. 5.7 deplasat cu t unităţi.

Deoarece $\mathbf{e}(0) = [v_1(0)] = 0$, obţinem pentru $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\mathbf{w}(t) = \int_0^t \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5-6\varepsilon^{-\tau}+\varepsilon^{-6\tau} \\ 24\varepsilon^{-\tau}+6\varepsilon^{-6\tau} \end{bmatrix} 2d\tau = \begin{bmatrix} 2t - \frac{7}{3} + \frac{12}{5}\varepsilon^{-t} - \frac{1}{15}\varepsilon^{-6t} \\ 10 - \frac{48}{5}\varepsilon^{-t} - \frac{2}{5}\varepsilon^{-6t} \end{bmatrix}.$$

Acest răspuns poate fi verificată prin compararea sa cu rezultatul găsit anterior. Observăm că integrala a fost în mod considerabil mai simplă în acest caz.

Răspunsul de mai sus ar fi variabil pentru orice t dacă v'_1 ar fi constant şi egal cu 2; dar nu este aşa; peste treapta iniţială de la $t = 0$ se va suprapune o treaptă negativă la $t = 1$ ca în fig. 5.7. Deci, pentru a găsi răspunsul la $t \geq 1$, înlocuim t prin $t-1$ în expresia de mai sus



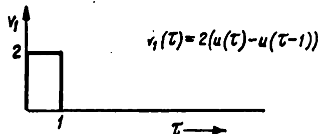


Fig. 5.7. Exemplu.

pentru a găsi răspunsul la treapta negativă ce apare la $t=1$, apoi scădem rezultatul din expresia de mai sus. Rezultatul pentru $t \geq 1$ va fi

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} 2t - \frac{7}{3} + \frac{12}{5}\,\varepsilon^{-t} - \frac{1}{15}\,\varepsilon^{-6t} \\ 10 - \frac{48}{5}\,\varepsilon^{-t} - \frac{2}{5}\,\varepsilon^{-6t} \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 2(t-1) - \frac{7}{3} + \frac{12}{5}\,\varepsilon^{-(t-1)} - \frac{1}{15}\,\varepsilon^{-6(t-1)} \\ 10 - \frac{48}{5}\,\varepsilon^{-(t-1)} - \frac{2}{5}\,\varepsilon^{-6(t-1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{12}{5}(1-\varepsilon^{-1})\,\varepsilon^{-(t-1)} + \frac{1}{15}(1-\varepsilon^{-6})\,\varepsilon^{-6(t-1)} + 2 \\ \frac{48}{5}(1-\varepsilon^{-1})\,\varepsilon^{-(t-1)} + \frac{2}{5}(1-\varepsilon^{-6})\,\varepsilon^{-6(t-1)} \end{bmatrix}.$$

Acest rezultat concordă din nou cu cele găsite anterior.

5.4. PRINCIPIUL SUPERPOZIŢIEI

În paragrafele precedente ale acestui capitol, au fost obţinute într-un mod formal expresii ce dau legătura între excitaţia unei reţele neavînd energie iniţial acumulată şi răspunsul la impulsul unitate sau treapta unitate, prin integrala de convoluţie. Este posibil a interpreta aceste integrale ca enunţuri ale principiului superpoziţiei.

Conceptele legate de principiul superpoziţiei sînt cel mai bine prezentate cu ajutorul figurilor. Din nefericire, este greu să folosim grafice pentru funcţii vectoriale şi matriceale. Prin urmare, vom dezvolta rezultatele pentru o reţea cu o singură intrare şi o singură ieşire, căci în acest caz vor exista numai ecuaţii scalare iar funcţiile scalare întîlnite pot fi reprezentate grafic. La locul potrivit, vom enunţa rezultatele corespunzătoare pentru ecuaţii vectoriale ce caracterizează reţelele cu mai multe intrări şi mai multe ieşiri.

Superpoziţia de impulsuri unitate

Fie funcţia de excitaţie dată în fig. 5.8 a. Axa pozitivă a timpului este împărţită într-o succesiune de intervale de lungime egală, lungimea fiind $\Delta\tau$. Nu este necesar ca intervalele să fie egale dar obţinerea rezultatelor dorite este mai simplă în acest caz.

Considerăm succesiunea de impulsuri notată $f(t)$ arătată în fig. 5.8b. Impulsul într-un punct $k\Delta\tau$ are conţinutul (ponderea) $e(k\Delta\tau)\,\Delta\tau$, care este aria dreptunghiului avînd baza $\Delta\tau$ şi înălţimea egală cu ordona-

ta curbei din fig. 5.8a în punctul $k\Delta\tau$. Dreptunghiul în cauză este haşurat.

Înălţimile pentru săgeţile reprezentînd impulsuri au fost reprezentate proporţional cu ponderea $e(k\Delta\tau)\Delta\tau$. Reamintim totuşi că toate impulsurile au înălţime infinită. Deci, pentru orice $\Delta\tau$ finit, oricît de mic, şirul de impulsuri nu constituie o bună reprezentare punctuală a funcţiei de excitaţie care este finită pentru orice t. Cu toate acestea să calculăm răspunsul circuitului la această succesiune de impulsuri.

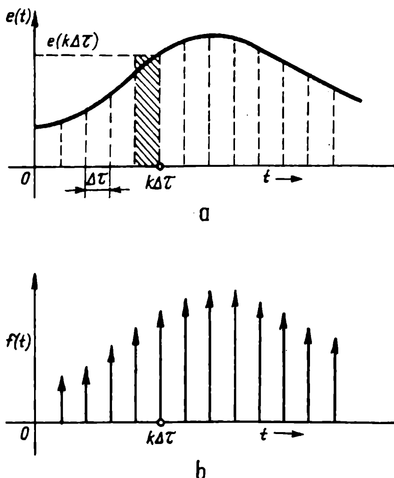


Fig. 5.8. Descompunerea unei funcţii într-un tren de impulsuri.

Dar $f(t)$ nu este o funcţie punctuală; ea este o funcţie generalizată care poate fi exprimată ca

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [e(k\Delta\tau)\Delta\tau]\delta(t-k\Delta\tau). \tag{47}$$

Să notăm cu Δw_k răspunsul în momentul t la unul din aceste impulsuri. Atunci Δw_k va fi egal cu răspunsul la impulsul unitate deplasat, înmulţit

cu ponderea impulsului de excitaţie corespunzător, adică $e(k\Delta\tau)\Delta\tau$ Astfel

$$\Delta w_k = w_\delta(t-k\Delta\tau)[e(k\Delta\tau)\Delta\tau] \tag{48}$$

este răspunsul în momentul t la impulsul din momentul $k\Delta\tau$.

Considerăm acum un punct particular pe axă notat τ. Pentru o valoare dată lui $\Delta\tau$, acest punct va fi $k\,\Delta\tau$. Dacă $\Delta\tau$ scade va trebui ca numărul k să crească proporţional astfel încît valoarea $\tau=k\Delta\tau$ să fie aceeaşi, deoarece se referă la un punct fix pe axă. Deci (47) şi (48) pot fi rescrise după cum urmează:

$$f(t) = \sum e(\tau)\,\delta(t-\tau)\Delta\tau, \tag{49}$$

$$\Delta w_k = w_\delta(t-\tau)e(\tau)\Delta\tau. \tag{50}$$

Răspunsul pentru orice moment t se obţine adunînd răspunsurile la fiecare din impulsurile pînă la timpul t. Să notăm prin $w(t)$ răspunsul la succesiunea de impulsuri cînd $\Delta\tau$ tinde către zero

$$w(t) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau=0}^{t}\Delta w_k = \lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau=0}^{t} w_\delta(t-\tau)e(\tau)\Delta\tau = \int_0^t w_\delta(t-\tau)e(\tau)d\tau. \tag{51}$$

(Sumarea a fost indicată mai sus ca fiind de la $\tau=0$ la $\tau=t$. În realitate ea trebuie să fie efectuată de la $k=1$ la $k=n$, unde n este cel mai mare întreg astfel ca $n\Delta\tau\leqslant t$, la limită, cînd $\Delta\tau$ tinde către zero. Deoarece $\tau=k\Delta\tau$, notaţia pe care am folosit-o este echivalentă cu aceasta). Limita de mai sus este prin definiţie, integrala scrisă în membrul drept al relaţiei (51)

Problema ce rămîne a fi soluţionată este a verifica dacă suma de funcţii impuls $f(t)$ dată în (49) poate reprezenta excitaţia originală $e(t)$ la limită, cînd $\Delta\tau$ inde la zero. Formal, suma din (49) va deveni o integrală care, datorită proprietăţii de eşantionare a funcţiei impuls devine $e(t)$. Astfel, la limită, seria de impulsuri reprezintă excitaţia.

În lumina discuţiei precedente, putem, pentru o reţea cu o singură intrare şi o singură ieşire să interpretăm integrala de convoluţie (15) ca exprimînd răspunsul la excitaţia $e(t)$ prin superpoziţia răspunsurilor la o succesiune de impulsuri care construiesc funcţia $e(t)$.

Acum, vom considera cazul mai multor intrări şi ieşiri. În mod sigur; se poate efectua acelaşi tip de dezvoltare conducînd la convoluţia răspunsului la impulsul unitate cu excitaţia. Astfel

$$\mathbf{w}(t) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau=0}^{t}\Delta\mathbf{w}_k = \lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau=0}^{t}\mathbf{W}_\delta(t-\tau)\mathbf{e}(\tau)\Delta\tau = \int_0^t \mathbf{W}_\delta(t-\tau)\mathbf{e}(\tau)d\tau, \tag{52}$$

unde

$$\Delta \mathbf{w}_k = \mathbf{W}_\delta (t-\tau)\mathbf{e}(\tau)\Delta\tau \tag{53}$$

este răspunsul la vectorul ale cărui componente sînt impulsuri ce au loc în momentul $\tau = k\Delta\tau$ în reprezentarea lui $\mathbf{e}(t)$ dată de

$$\mathbf{f}(t) = \sum \mathbf{e}(\tau)\delta(t-\tau)\Delta\tau. \tag{54}$$

Pentru a da o interpretare potrivită, trebuie să reformulăm rezultatul Fie $\mathbf{w}_{\delta j}$ vectorul coloană j al lui $\mathbf{W}_\delta$ Atunci din (52) obţinem

$$\mathbf{w}(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^{p} \mathbf{w}_{\delta j}(t-\tau)\, e_j(\tau)d\tau = \sum_{j=1}^{p} \int_0^t \mathbf{w}_{\delta j}(t-\tau)e_j(\tau)d\tau. \tag{55}$$

Dar vectorul $\mathbf{w}_{\delta j}(t)$ este răspunsul cînd intrarea j este excitată de un impuls unitate la momentul zero iar toate celelalte intrări au excitaţia zero. Astfel, în cazul reţelelor cu mai multe intrări şi ieşiri, o interpretare potrivită a lui (52) este următoarea : răspunsul la excitaţia $\mathbf{e}(t)$ este superpoziţia unei mulţimi de răspunsuri, fiecare din ele fiind răspunsul reţelei atunci cînd excitaţia este aplicată la o singură intrare, excitaţia constînd dintr-o succesiune de impulsuri.

Superpoziţia de trepte unitate

O dezvoltare similară cu cea de mai sus se poate face reprezentînd funcţia de excitaţie ca o sumă de funcţii treaptă. Pentru început, la fel ca mai sus, vom discuta cazul unei reţele cu o singură intrare şi o singură ieşire. Axa pozitivă a timpului este împărţită din nou în intervale egale de lungime $\Delta\tau$. Funcţia de excitaţie reprezentată ca o sumă de funcţii treaptă este arătată în fig. 5.9. Funcţia „în scară" rezultantă nu constituie

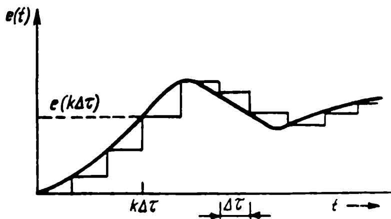


Fig. 5.9. Descompunerea unei funcţii în funcţii treaptă.

o foarte bună aproximație a lui $e(t)$ dar devine din ce în ce mai bună pe măsură ce $\Delta\tau$ este mai mic.

Cînd $\Delta\tau$ este foarte mic, valoarea fiecărei trepte din scară poate fi aproximată prin produsul lui $\Delta\tau$ și al pantei curbei în momentul saltului (treptei), deoarece fiecare din micile poligoane curbilinii cuprinse între curbă și funcția scară aproximează un triunghi.

Răspunsul circuitului la excitația $e(t)$ poate fi aproximat prin răspunsul la funcția scară. Totuși, el nu este altceva decît o sumă de răspunsuri la funcția treaptă unitate în mod potrivit deplasate și multiplicate cu valoarea discontinuității în momentul respectiv a funcției scară. Fie Δw_k răspunsul evaluat în momentul t la o treaptă ce apare în momentul $k\Delta\tau$. El va fi dat de

$$\Delta w_k = w_u(t-k\Delta\tau)[\dot{e}(k\Delta\tau)\Delta\tau] \qquad (56)$$

unde punctul indică derivarea. Factorul dintre paranteze este valoarea treptei, în timp ce $w_u(t-k\Delta\tau)$ este răspunsul la funcția treaptă unitate deplasată.

Răspunsul total va fi suma contribuțiilor pentru fiecare treaptă. Din nou ne vom îndrepta atenția asupra punctului $k\Delta\tau$ și vom considera limita cînd $\Delta\tau$ tinde către zero; vom obține

$$w(t) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau=0}^{t}\Delta w_k = \lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau=0}^{t} w_u(t-\tau)\dot{e}(\tau)\Delta\tau = \int_0^t w_u(t-\tau)\dot{e}(\tau)d\tau. \qquad (57)$$

În această dezvoltare am presupus că excitația este o funcție continuă și că valoarea inițială este zero. Presupunem acum că ea are discontinuități de valoare γ_i în momentul de timp t_i, respectiv. Vom considera o valoare nenulă inițială ca o discontinuitate la $t = 0$. Excitația totală va fi atunci $\hat{e}(t) + \sum\gamma_i u(t-t_i)$, unde $\hat{e}(t)$ este partea continuă a excitației. Am găsit deja răspunsul la această parte a excitației; la aceasta va trebui să adăugăm răspunsul datorită discontinuităților. Răspunsul complet va fi

$$w(t) = \sum_i w_u(t-t_i)\gamma_i + \int_0^t w_u(t-\tau)\dot{e}(\tau)d\tau. \qquad (58)$$

În particular, dacă nu există discontinuități în afară de cea de la $t = 0$, atunci răspunsul total va fi [avînd $e(0)$ în loc de γ_0].

$$w(t) = w(t)e(0) + \int_0^t w_u(t-\tau)\dot{e}(\tau)d\tau. \qquad (59)$$

Această expresie este identică cu prima expresie din (44). Deci am demonstrat că răspunsul la o excitaţie $e(t)$ poate fi privit ca superpoziţia răspunsurilor la o serie de funcţii treaptă ce reprezintă excitaţia.

În cazul reţelelor cu mai multe intrări şi ieşiri, se obţine simplu rezultatul corespunzător înlocuind $e(t)$ cu $\mathbf{e}(t)$, γ_i cu $\boldsymbol{\gamma}_i$, Δw_k cu $\Delta \mathbf{w}_k$, $w(t)$ cu $\mathbf{w}(t)$ şi $w_u(t)$ cu $\mathbf{W}_u(t)$ în relaţiile (56) pînă la (59).
Corespunzător lui (58) obţinem

$$\mathbf{w}(t) = \sum_i \mathbf{W}_u(t-t_i)\boldsymbol{\gamma}_i + \int_0^t \mathbf{W}_u(t-\tau)\,\dot{\mathbf{e}}(\tau)d\tau, \tag{60}$$

care poate fi scrisă şi astfel

$$\mathbf{w}(t) = \sum_{j=1}^{p}\left[\sum_i \mathbf{w}_{uj}(t-t_i)(\boldsymbol{\gamma}_i)_j + \int_0^t \mathbf{w}_{uj}(t-\tau)\,\dot{\mathbf{e}}_j(\tau)d\tau\right], \tag{61}$$

unde $(\boldsymbol{\gamma}_i)_j$ este elementul j a lui $\boldsymbol{\gamma}_i$ şi $\mathbf{w}_{uj}(t)$ este vectorul coloană de rang j al matricei $\mathbf{W}_u(t)$. Dar $\mathbf{w}_{uj}(t)$ este răspunsul atunci cînd intrarea j este excitată de o treaptă unitate la momentul zero iar toate celelalte intrări au excitaţii zero. Aşadar, lui (61) i se poate da următoarea interpretare; răspunsul circuitului la o excitaţie este superpoziţia unei mulţimi de răspunsuri, fiecare din ele fiind răspunsul circuitului la o excitaţie aplicată la o singură intrare, excitaţia fiind o succesiune de funcţii treaptă.

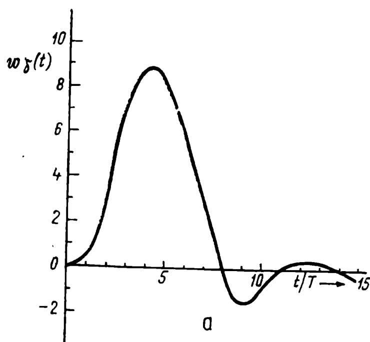
5.5. SOLUŢII NUMERICE

Interpretările date reprezentărilor integralei de convoluţie au o aplicare importantă în calculul numeric al răspunsului reţelelor (de exemplu, folosind o maşină de calcul). În final, diferenţa ce apare datorită folosirii reprezentării prin impulsuri sau funcţii treaptă, este mică. Prin urmare, pentru discuţia de aici vom folosi prima din cele două reprezentări.

Presupunem că dorim să găsim răspunsul unei reţele cu o singură intrare şi o singură ieşire la o funcţie de timp ce nu poate fi reprezentată în mod simplu prin suma unor funcţii elementare; de exemplu, funcţia de timp poate fi dată pur şi simplu ca o curbă, sau expresia ei analitică este foarte complicată. În astfel de cazuri, transformata Laplace $E(s)$ este dificil de găsit sau poate fi o expresie complicată încît să nu fie uşor utilizabilă. Dacă aproximăm $E(s)$ printr-o funcţie raţională nu vom şti cît de bună va fi aproximarea funcţiei răspuns ce o vom obţine în domeniul timp. În astfel de cazuri este mai potrivit a aproxima $e(t)$ în domeniul timp printr-o succesiune de implsuri ca în fig. 5.8, sau printr-o funcţie treaptă ca în fig. 5.9.

Să apelăm din nou la un exemplu. Presupunem că avem o reţea avînd răspunsul la impulsul unitate arătat în fig. 5.10, a

Acest răspuns la impulsul unitate poate fi găsit experimental folosind un puls de durată foarte mică, ca o „aproximaţie" a impulsului unitate. Presupunem că dorim să găsim răspunsul reţelei la excitaţia din fig. 5.10b, care de asemenea poate fi o curbă experimentală sau rezultatul altor calcule numerice.



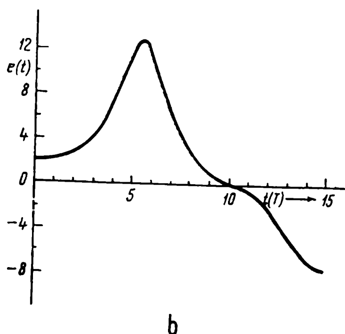


Fig. 5.10. Calcularea numerică a răspunsului circuitului.

Acum vom alege un interval potrivit T astfel încît variaţiile lui $w_\delta(t)$ şi $e(t)$ pe durata T să fie destul de mici încît să poată fi neglijate. Apoi vom folosi reprezentarea aproximativă,

$$\hat{e}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e(kT)\delta(t-kT)T \tag{62}$$

pentru excitaţie. Această expresie este în mod obişnuit interpretată ca rezultatul multiplicării lui $e(t)$ cu trenul de impulsuri $\sum_{k=1}^{k=\infty} \delta(t-kT)T$. Mulţimea de valori $e(kT)$ va fi denumită *secvenţă în timp* iar funcţia $\hat{e}(t)$, *serie în timp*. Se poate arăta că se obţine acelaşi rezultat final ca cel pe care îl vom obţine aici, dacă se foloseşte aproximarea lui

$$f(t) = \int_0^t e(x)dx \tag{63}$$

printr-o funcţie în trepte (în scară) şi se utilizează apoi transformatele Laplace — Stieltjes, fără a folosi funcţia implus. Astfel, rezultatele finale pot fi justificate în mod riguros matematic.

Folosind teorema convoluţiei, răspunsul reţelei la seria în timp (62) poate fi scris după cum urmează :

$$w_{\hat{e}}(t) = \sum_{k=1}^{n} w_\delta(t-kT)e(kT)T, \tag{64}$$

unde

$$nT \leqslant t < (n+1)T.$$

În particular, valoarea răspunsului în punctele alese nT va fi dată de[1]

$$w_{\hat{e}}(nT) = \sum_{k=1}^{n} w_\delta[(n-k)T]e(kT)T. \tag{65}$$

Să vedem care sînt implicaţiile acestei ecuaţii. Observăm că suma din dreapta este o sumă de *numere reale şi nu de funcţii.* Astfel putem căpăta o idee aproximativă asupra răspunsului pur şi simplu adunînd aceste numere

[1] Deoarece n este singura variabilă în această ecuaţie, putem scrie într-o formă convenţională

$$w_{\hat{e}n/T} = \sum_{k=1}^{n} e_k w_{n-k}$$

şi observăm că acesta este produsul Cauchy a două secvenţe în timp pentru e şi w_δ.

Tabelul 5.1

Calculul numeric al răspunsului

Rîndul Nr.	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$w_\delta(kT)$	0,0	0,5	3,0	7,0	9,0	8,5	6,0	2,5	−0,3	−1,7	—
2	$e(kT)$		2,0	2,7	4,0	8,0	12,0	11,0	6,0	2,5	0,5	0,0
3	$w_\delta[(2-k)T]$		0,5	0,0	—	—	—	—	—	—	—	—
4	$w_\delta[(2-k)T]e(kT)$		1,0	0,0	—	—	—	—	—	—	—	—
5	$w_\delta[(4-k)T]$		7,0	3,0	0,5	0,0	—	—	—	—	—	—
6	$w_\delta[(4-k)T]e(kT)$		14,0	8,1	2,0	0,0	—	—	—	—	—	—
7	$w_\delta[(6-k)T]$		8,5	9,0	7,0	3,0	0,5	0,0	—	—	—	—
8	$w_\delta[(6-k)T]e(kT)$		17,0	24,6	28,0	24,0	6,0	0,0	—	—	—	—
9	$w_\delta[(8-k)T]$		2,5	6,0	8,5	9,0	7,0	3,0	0,5	0,0	—	—
10	$w_\delta[(8-k)T]e(kT)$		5,0	16,2	34,0	72,0	84,0	33,0	3,0	0,0	—	—
11	$w_\delta[(10-k)T]$		−1,7	−0,3	2,5	6,0	8,5	9,0	7,0	3,0	0,5	0,0
12	$w_\delta(10-k)T]e(kT)$		−3,4	−0,81	10,0	48,0	102,0	99,0	42,0	7,5	0,25	0,0

fără a avea de integrat funcţii. Pentru a face afirmaţia mai clară, să găsim răspunsul aproximativ la $t/T = 2,4,6,8,$ şi 10 pentru exemplul din fig. 5.10, folosind valorile date în tabelul 5.1.
(Intervalele alese sînt prea mari pentru a obţine o bună precizie dar sînt suficiente pentru ilustrarea procedeului). Liniile 1 şi 2 ale tabelului conţin valorile $e(kT)$ şi $w_\delta(kT)$ citite din grafice. Liniile numerotate impar, şi anume cele asociate cu $w_\delta\,[(n-k)T]$, $n = 2,4,6,8,$ şi 10 se obţin copiind linia 1 în ordine inversă începînd cu coloana corespunzătoare lui $k = n - 1$. Elementele în fiecare din aceste linii multiplicate cu coeficienţii corespunzători din linia 2, formează coeficienţii liniilor numerotate par şi anume cele asociate cu $w_\delta[(n-k)T]\,e(kT)$. Suma coeficienţilor de la $k=1$ la $k = n$ în fiecare din liniile numerotate par este $w_t\,(nT)/T$.
Astfel

n	2	4	6	8	10
$w_t\,(nT)/T$	1,0	24,1	99,6	247,2	304,54

Acest calcul ne furnizează valori numerice pentru răspuns în cîteva puncte alese. Valorile finale tabelate constituie o *secvenţă* în timp. Cu aceste valori, *seria* în timp poate fi scrisă

$$\hat{w}(t) = \sum_n w_t\,(nT)T\delta(t-nT) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\{w_\delta\,[(n-k)T]e(kT)T\}\delta(t-nT)T. \quad (66)$$

Această metodă de reprezentare printr-o serie în timp conduce la aşa numita metodă de analiză prin transformata — z folosită în sistemele cu eşantioane.

Acelaşi concept al seriilor în timp este de asemenea folosit în sinteza în domeniul timp. Adesea problema de sinteză este specificată cu ajutorul unei curbe pentru excitaţia $e(t)$ şi a unei curbe dorite pentru $w(t)$. Atunci una din metode este de a reprezenta $e(t)$ şi $w(t)$ ca serii în timp utilizîndu-se apoi ecuaţiile simultane date de (66) pentru a găsi seria în timp pentru $w_\delta(t)$. Pentru sinteză se trece apoi la găsirea lui $H(s)$. Problemele matematice ce se ridică sînt totuşi prea numeroase pentru a discuta mai în amănunt această problemă în capitolul de faţă; astfel vom lăsa această aplicaţie cursurilor specializate în sinteză.

Reţele cu mai multe intrări şi ieşiri

Să examinăm modificările necesare în cazul reţelelor cu mai multe intrări şi ieşiri. Seria în timp pentru $\mathbf{e}(t)$ va fi

$$\hat{\mathbf{e}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{e}(kT)\delta(t-kT)T. \quad (67)$$

Răspunsul la această serie în timp pentru $nT \leqslant t < (n+1)T$, și în speță în punctele nT va fi

$$\mathbf{w}_t(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{W}_\delta (t-kT)\mathbf{e}(kT)T, \tag{68a}$$

$$\mathbf{w}_t(nT) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{W}_\delta [(n-k)T]\mathbf{e}(kT)T, \tag{68b}$$

și deci seria în timp asociată va fi

$$\mathbf{w}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \mathbf{W}_\delta [(n-k)T]\mathbf{e}(kT)T \right\} \delta(t-nT)T. \tag{69}$$

Teoretic, răspunsul serie în timp pentru rețeaua cu mai multe intrări și ieșiri se calculează ușor. Totuși, timpul necesar pentru efectuarea calculelor este considerabil mai mare față de cazul rețelei cu o singură intrare și o singură ieșire.

Este semnificativ deci, că (68) se programează ușor pentru soluționarea cu ajutorul unui calculator numeric. Un dezavantaj al unui astfel de program îl constituie memoria mare necesară a înmagazina $\mathbf{W}_\delta(nT)$ și $\mathbf{e}(nT)$, pentru $n = 0, 1, \ldots, N$, sau dacă nu le înmagazinăm în memorie, timpul destul de lung pentru a recalcula $\mathbf{W}_\delta(nT)$ și $\mathbf{e}(nT)$ de fiecare dată cînd sînt necesari în calcule. Ultima alternativă este posibilă numai dacă $\mathbf{W}_\delta(nT)$ și $\mathbf{e}(nT)$ sînt date analitic și nu doar experimental. Procedeul dezvoltat în continuare depășește unele din aceste probleme.

Răspunsul exprimat cu ajutorul ecuațiilor de stare

Pînă acum am căutat să rezolvăm răspunsul rețelei în mod direct fără a considera starea rețelei. Deoarece răspunsul rețelei poate fi fără nici o micșorare a generalității, starea rețelei, tot ceea ce am afirmat și dedus pînă în prezent privitor la vectorul răspuns, se aplică la fel de bine și vectorului de stare. Din cauză că în metoda ce o vom dezvolta mai jos, presupunerea că rețeaua nu posedă energie inițial acumulată nu aduce nici o simplificare semnificativă, nu vom mai face această ipoteză.

Potrivit relației (23) vectorul de stare va fi suma *răspunsului de stare liber*

$$\mathbf{x}^l(t) = \varepsilon^{\mathscr{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) \tag{70}$$

și a răspunsului de stare forțat

$$\mathbf{x}^c(t) = \int_{t_0}^{t} \varepsilon^{\mathscr{A}(t-\tau)} \mathscr{B}\mathbf{e}(\tau)\, d\tau; \tag{71}$$

adică

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^c(t) + \mathbf{x}^l(t). \tag{72}$$

Vom lua $t_0 = 0$ şi vom presupune că $\mathbf{e}(t)$ este aproximată de seria în timp (67). Reamintim că în (68) răspunsul reţelei este cel forţat. Atunci. pentru răspunsul de stare forţat cînd $nT \leqslant t < (n+1)T$ şi in punctul nT. putem scrie

$$\mathbf{x}_{\hat{e}}^c(t) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{\mathscr{A}(t-kT)} \mathscr{B}\mathbf{e}(kT)\,T, \tag{73a}$$

$$\mathbf{x}_{\hat{e}}^c(nT) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{\mathscr{A}(n-k)T} \mathscr{B}\mathbf{e}(kT)\,T. \tag{73b}$$

La $t = nT$ răspunsul de stare liber este simplu

$$\mathbf{x}^l(nT) = \varepsilon^{\mathscr{A}nT}\mathbf{x}(0). \tag{74}$$

Substituind (73) şi (74) în (72) obţinem

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{\hat{e}}(nT) &= \varepsilon^{\mathscr{A}nT}\mathbf{x}(0) + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{\mathscr{A}(n-k)T} \mathscr{B}\mathbf{e}(kT)\,T \\ &= \varepsilon^{\mathscr{A}T}\left\{ \varepsilon^{\mathscr{A}(n-1)T}\mathbf{x}(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon^{\mathscr{A}(n-k-1)T} \mathscr{B}\mathbf{e}(nT)\,T \right\} + \mathscr{B}\mathbf{e}(nT)\,T.\end{aligned}$$

Ultimul rearanjament se obţine scriind separat termenul din sumă corespunzător lui $k = n$, şi dînd apoi factor comun $\varepsilon^{\mathscr{A}T}$ din ceilalţi termeni. Comparînd cantitatea dintre paranteze cu cea din rîndul anterior, singura diferenţă este înlocuirea lui n cu $n-1$. Deci

$$\mathbf{x}_{\hat{e}}(nT) = \varepsilon^{\mathscr{A}T}\mathbf{x}_{\hat{e}}[(n-1)T] + \mathscr{B}\mathbf{e}(nT)\,T. \tag{75}$$

Aceasta este o formulă de recurenţă foarte valoroasă. Observăm că această expresie putea fi dedusă direct din (23) punînd $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_{\hat{e}}[(n-1)T]$ şi presupunînd că $\varepsilon^{\mathscr{A}(nT-\tau)}\mathscr{B}\mathbf{e}(\tau)$ este în mod esenţial constant în intervalul $(n-1)T \leqslant \tau \leqslant nT$ şi egal cu valoarea sa la $\tau = nT$. Modul de abordare prezentat aici s-a ales în scopul de a fi în acord cu rezultatele formulate anterior.

Observăm că formula de recurenţă (75) cere cunoaşterea lui $\varepsilon^{\mathscr{A}T}$ într-un singur moment de timp; adică $t = T$. Acest fapt micşorează în mare măsură spaţiul de memorie necesar în comparaţie cu cazurile tratate anterior.

Aflarea răspunsului rețelei se face deci după cum urmează: Mai întii facem $\mathbf{x}_{\hat{e}}(0)$ egal cu starea inițială $\mathbf{x}(0)$; apoi se folosește (75) pentru a afla vectorul de stare $\mathbf{x}_{\hat{e}}(nT)$ cînd n ia valori succesive egale cu 1,2,3,.. Pentru fiecare valoare a lui n, răspunsul rețelei la $t = nT$, potrivit lui (22 b) este dat de

$$\mathbf{w}_{\hat{e}}(nT) = \mathscr{C}\mathbf{x}_{\hat{e}}(nT) + \mathscr{D}\mathbf{e}(nT) + \hat{\mathscr{D}}\dot{\mathbf{e}}(nT). \tag{76}$$

Aceasta exprimă secvența în timp a rețelei în punctele de eșantionare nT. Aproximarea prin serie în timp a răspunsului rețelei rezultă imediat.

Exemplu

Să ilustrăm cele de mai sus considerînd un exemplu simplu.

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathscr{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathscr{C} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathscr{D} = 0, \quad \hat{\mathscr{D}} = 0.$$

Folosind metodele din cap. 4 găsim că

$$\varepsilon^{\mathscr{A}T} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{-T} & \varepsilon^{-T} - \varepsilon^{-2T} \\ 0 & \varepsilon^{-2T} \end{bmatrix}.$$

Presupunem că intervalul ales $T = 0{,}2$; atunci

$$\varepsilon^{0,2\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} 0{,}819 & 0{,}148 \\ 0{,}000 & 0{,}670 \end{bmatrix}.$$

Folosind acestea, (75) și (76) devin

$$\begin{bmatrix} x_{\hat{e}1}(nT) \\ x_{\hat{e}1}(nT) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0{,}819 & 0{,}148 \\ 0{,}000 & 0{,}670 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\hat{e}1}\{(n-1)T\} \\ x_{\hat{e}2}\{(n-1)T\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} [e(nT)]\,T$$

$$\begin{bmatrix} w_{\hat{e}1}(nT) \\ w_{\hat{e}2}(nT) \\ w_{\hat{e}3}(nT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\hat{e}1}(nT) \\ x_{\hat{e}2}(nT) \end{bmatrix}$$

Considerăm rețeaua neavînd energie inițial acumulată și fie $e(t)$ funcția de excitație dată în fig. 5.10. Valorile lui $e(nT)$ sînt cele din linia întii a tabelului 5.2. Folosind formula de recurență și valorile numerice de mai sus, calculele pentru $n = 1, \ldots, 5$ vor da rezultatele din tabelul 5.2.

Tabelul 5.2

Calculul numeric al răspunsului

n	1	2	3	4	5
$e(nT)$	2,0	2,7	4,0	8,0	12,0
$x_{\ell 1}(nT)$	0,800	1,68	1,68	4,53	8,29
$x_{\ell 2}(nT)$	−0,400	−0,808	−1,34	−1,50	−3,41
$w_{\ell 1}(nT)$	−1,60	−3,36	−3,72	−9,06	−16,6
$w_{\ell 2}(nT)$	1,20	2,49	3,20	6,03	11,7
$w_{\ell 2}(nT)$	−1,20	−2,42	−4,02	4,50	−10,2

Erori transmisibile

În evaluarea numerică a lui $\mathbf{x}_\ell(nT)$ conform relaţiei de recurenţă (75) apare un tip special de erori. Orice eroare în valoarea numerică a lui $\mathbf{e}(nT)$ se transmite şi generează erori în $\mathbf{x}_\ell(nT)$ cu $m \geqslant n$. Similar, o eroare în $\mathbf{x}(0)$ se transmite şi generează erori în $\mathbf{x}_\ell(mT)$. Pentru a căpăta o idee asupra modului în care aceste erori se transmit pe parcursul calculelor, presupunem că $\mathbf{e}(nT)$ este cunoscut corect pentru orice n cu excepţia lui $n = n_0$. Fie $\mathbf{e}(n_0T) = \mathbf{e}^a(n_0T) + \boldsymbol{\zeta}$ unde $\mathbf{e}^a(n_0T)$ este valoarea reală iar $\boldsymbol{\zeta}$ un vector eroare. Presupunem de asemenea că $\mathbf{x}(0)$, $\varepsilon^{\mathscr{A}T}\mathscr{B}$ şi T sînt cunoscuţi corect. Fie acum $\mathbf{x}_\ell^a(nT)$ valoarea lui $\mathbf{x}_\ell(nT)$ pentru $n \geqslant n_0$ cînd $\mathbf{e}(n_0T)$ se înlocuieşte cu $\mathbf{e}^a(n_0T)$. Atunci prin aplicarea succesivă a relaţiei de recurenţă pentru $n = n_0, n_0 + 1, \ldots, n$, găsim

$$\mathbf{x}_\ell(n_0T) = \mathbf{x}_\ell^a(n_0T) + \mathscr{B}\boldsymbol{\zeta}T$$

şi pentru $n \geqslant n_0$

$$\mathbf{x}_\ell(nT) = \mathbf{x}_\ell^a(nT) + (\varepsilon^{\mathscr{A}T})^{(n-n_0)}\mathscr{B}\boldsymbol{\zeta}T. \qquad (77)$$

Observăm că eroarea $\mathscr{B}\boldsymbol{\zeta}T$ în răspunsul de stare la n_0T se transmite şi produce o eroare în răspunsul de stare la nT, egală cu eroarea în $\mathbf{x}_\ell(n_0T)$ înmulţită la stînga cu $(\varepsilon^{\mathscr{A}T})^{n-n_0}$.

În mod analog, fie $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^a(0) + \boldsymbol{\xi}$ unde $\mathbf{x}^a(0)$ este valoarea reală şi $\boldsymbol{\xi}$ un vector eroare. Formula de recurenţă ne va da

$$\mathbf{x}_\ell(nT) = \mathbf{x}_\ell^a(nT) + (\varepsilon^{\mathscr{A}T})^n\boldsymbol{\xi} \qquad (78)$$

unde $\mathbf{x}_\ell^a(nT)$ este valoarea lui $\mathbf{x}_\ell(nT)$ calculată cînd $\mathbf{x}(0)$ este înlocuit cu $\mathbf{x}^a(0)$. Din nou, eroarea $\boldsymbol{\xi}$ în $\mathbf{x}_\ell(0)$ se transmite şi produce o eroare în $\mathbf{x}_\ell(nT)$ egală cu eroarea în $\mathbf{x}_\ell(0)$ înmulţită la stînga cu $(\varepsilon^{\mathscr{A}T})^n$.

Erorile în evaluarea numerică a lui $\varepsilon^{\mathscr{A}T}$ de asemenea se transmit. Totuşi vom amîna discutarea lor considerînd problema calculării lui $\varepsilon^{\mathscr{A}T}$ în paragraful următor. Deşi nu le vom considera aici, totuşi erorile în $\mathscr{B}$ şi T de asemenea se transmit. Folosind relaţia de recurenţă se poate vedea modul în care se transmit aceste erori.

Este clar că valoarea $(\varepsilon^{\mathscr{A}T})^{(n-m)}$ determină gradul în care o eroare în $\mathbf{x}_t(mT)$ apărută datorită erorilor de evaluare a excitaţiei şi stării iniţiale, afectează precizia lui $\mathbf{x}_t(nT)$ la un moment ulterior de timp. Vom considera împreună erorile în răspunsul de stare, provocate de erori apărute în excitaţie sau în starea iniţială. Fie $\mathbf{x}_t(mT)$ avînd eroarea $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ şi fie

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = (\varepsilon^{\mathscr{A}T})^{(n-m)}\,\boldsymbol{\varepsilon}_m \tag{79}$$

eroarea propagată în $\mathbf{x}_t(nT)$, presupunînd că $n > m$. O problemă de mare importanţă este studierea modului în care se comportă „mărimea" erorii cînd n creşte. Aici ne ocupăm însă de vectori eroare; prin urmare va trebui să specificăm această „mărime"; definim „mărimea" unui vector în raport cu norma sa.

Pentru reîmprospătarea cunoştinţelor asupra normelor vectorilor şi matricelor se poate vedea cap. 1. Acolo, norma unui vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ a fost notată cu $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$ şi definită ca un număr nenegativ avînd proprietăţile:

1. $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| = 0$ dacă şi numai dacă $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$

2. $\|\alpha\boldsymbol{\varepsilon}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$, unde α este un număr real sau complex

3. $\|\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \leqslant \|\boldsymbol{\varepsilon}_1\| + \|\boldsymbol{\varepsilon}_2\|$, unde $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ şi $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ sînt vectori (aceasta este *inegalitatea triunghiului*).

Pentru un vector se pot defini mai multe norme care satisfac aceste proprietăţi. Următoarele trei au fost discutate în cap. 1;

1. $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i|$, norma sumă de valori absolute ale componentelor (80a)

2. $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_2 = (\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon})^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i|^2\right)^{1/2}$, norma euclidiană (80b)

3. $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_\infty = \max_i |\varepsilon_i|$, norma-maximum din valorile absolute (80c)

Din acestea cea mai comună este norma euclidiană, care corespunde lungimii unui vector în spaţiu. Totuşi, din punct de vedere practic, evaluarea numerică a celorlalte două norme este adesea mai uşoară.

Conform celor spuse în cap. 1, norma unei matrice considerată ca o transformare care face să corespundă unui vector un altul, satisface cele trei proprietăţi ale normei date mai sus. Suplimentar, norma vectorului $\mathbf{K}\varepsilon$, adică norma transformatului lui ε prin $\mathbf{K}$, satisface inegalitatea

$$\|\mathbf{K}\varepsilon\| \leqslant \|\mathbf{K}\| \, \|\varepsilon\|. \tag{81}$$

Ca o consecinţă directă a lui (81) norma unei matrice are următoarea proprietate:

$$\|\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\| \leqslant \|\mathbf{K}_1\| \, \|\mathbf{K}_2\|. \tag{82}$$

Normele matricelor corespunzătoare celor trei norme ale vectorilor din (80) sînt cele de mai jos. Fie $\mathbf{K} = [k_{ij}]$; atunci

$$\|\mathbf{K}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |k_{ij}|$$

valoarea normei vectorului coloană avînd cea mai mare normă sumă de (83.a) valori absolute

$\|\mathbf{K}\|_2 = \lambda_m$, unde λ_m^2 este valoarea proprie a lui $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$ cu cea mai mare valoare absolută (83*b*)

$\|\mathbf{K}\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |k_{ij}|$, valoarea normei vectorului linie avînd cea mai mare normă-sumă de valori absolute (83*c*)

Sîntem interesaţi în determinarea normei erorii în răspunsul de stare. În particular dorim să cunoaştem în (79) dacă $\|\varepsilon_n\| < \|\varepsilon_m\|$ pentru $n > m$. În această ecuaţie cele două erori sînt legate prin matricea $(\varepsilon^{\mathscr{A}T})^{(n-m)}$. Luînd norma ambilor membrii ai relaţiei (79) şi folosind (81) şi (82) obţinem

$$\|\varepsilon_n\| \leqslant \|\varepsilon^{\mathscr{A}T}\|^{n-m} \|\varepsilon_m\|. \tag{84}$$

Tragem concluzia că dacă norma lui $\varepsilon^{\mathscr{A}T}$ este mai mică decît 1, atunci norma vectorului eroare va fi o funcţie descrescătoare cu n. Pentru a evalua $\varepsilon^{\mathscr{A}T}$ se poate folosi oricare din normele matricelor definite în relaţia (83).

Astfel, pentru exemplul precedent în care

$$\varepsilon^{0,2\,\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} 0,819 & 0,148 \\ 0,000 & 0,670 \end{bmatrix}$$

găsim

$$\|\varepsilon^{0,2\cdot\mathscr{A}}\|_1 = \max\ (0{,}819 + 0{,}000;\ \ 0{,}148 + 0{,}670) = 0{,}819$$

$\|\varepsilon^{0,2\cdot\mathscr{A}}\|_2$ = rădăcină din valoarea proprie maximă a lui

$$(\varepsilon^{0,2\cdot\mathscr{A}})' \cdot (\varepsilon^{0,2\cdot\mathscr{A}}) = \max\ (0{,}819,\ 0{,}670) = 0{,}819$$

$$\|\varepsilon^{0,2\cdot\mathscr{A}}\|_\infty = \max\ (0{,}819) + 0{,}148;\ 0{,}000 + 0{,}670) = 0{,}967.$$

Pentru exemplul considerat, oricare din aceste norme arată că norma vectorului eroare descrește atunci cînd n crește.

5.6. EVALUAREA NUMERICĂ A LUI $\varepsilon^{\mathscr{A}T}$

În exemplul numeric din paragraful precedent am găsit o expresie analitică exactă pentru $\varepsilon^{\mathscr{A}T}$; adică

$$\varepsilon^{\mathscr{A}T} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{-T} & \varepsilon^{-T} - \varepsilon^{-2T} \\ 0 & \varepsilon^{-2T} \end{bmatrix}.$$

Pentru $T = 0{,}2$, aceasta devine

$$\varepsilon^{0,2\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} 0{,}819 & 0{,}148 \\ 0{,}000 & 0{,}670 \end{bmatrix}.$$

Este evident totuși, că acesta este numai o valoare aproximativă a lui $\varepsilon^{0,2\cdot\mathscr{A}}$ cu o precizie de trei cifre. Valoarea reală $\varepsilon^{0,2\cdot\mathscr{A}}$ are elemente cu un număr infinit de cifre, deoarece $\varepsilon^{-0,2}$ și $\varepsilon^{-0,9}$ sînt numere iraționale. Astfel, in orice proces numeric finit se poate obține numai o valoare aproximativă pentru $\varepsilon^{0,2\cdot\mathscr{A}}$.

Acest lucru este adevărat și în cazul general; adică, este în general adevărat faptul că pentru orice matrice $\mathscr{A}$, de dimensiuni $n \times n$ și orice constantă reală T, la terminarea unui proces numeric finit, se poate cunoaște numai o valoare aproximativă pentru $\varepsilon^{\mathscr{A}T}$. Acest lucru devine și mai evident dacă se ține seama de faptul că în mod obișnuit nu se cunoaște o expresie analitică exactă pentru $\varepsilon^{\mathscr{A}T}$; pentru evaluarea lui $\varepsilon^{\mathscr{A}T}$, este necesar a evalua termenii din dezvoltarea sa în serie de puteri

$$\varepsilon^{\mathscr{A}T} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathscr{A}^k T^k}{k!}. \tag{85}$$

Este evident că în orice proces numeric finit, este posibil a evalua numai un număr finit din aceşti termeni. Vom discuta eroarea rezultată datorită trunchierii seriei (85) şi vom da un criteriu pentru alegerea numărului necesar de termeni în vederea atingerii unei precizii date.
Scriem

$$\varepsilon^{\mathscr{A}T} = \mathbf{A} + \mathbf{R}, \tag{86}$$

unde

$$\mathbf{A} = \sum_{k=0}^{K} \frac{\mathscr{A}^k T^k}{k!} \tag{87}$$

este seria trunchiată care aproximează $\varepsilon^{\mathscr{A}T}$ şi

$$\mathbf{R} = \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{\mathscr{A}^k T^k}{k!} \tag{88}$$

este restul sau matricea eroare. Dacă $\mathbf{A}$ este o aproximaţie suficient de bună a lui $\varepsilon^{\mathscr{A}T}$, atunci $\mathbf{A}\varepsilon$ va trebui să fie o bună aproximaţie pentru $\varepsilon^{\mathscr{A}T}.\varepsilon$ unde ε este un vector de dimensiune n arbitrar. O măsură cantitativă a calităţii ultimei aproximări este norma vectorului eroare

$$\varepsilon^{\mathscr{A}T}\varepsilon - \mathbf{A}\varepsilon = (\varepsilon^{\mathscr{A}T} - \mathbf{A})\varepsilon = \mathbf{R}\varepsilon,$$

relativ la norma lui $\varepsilon^{\mathscr{A}T}$; adică

$$\delta = \frac{\|\mathbf{R}\varepsilon\|}{\|\varepsilon^{\mathscr{A}T}\varepsilon\|} \tag{89}$$

este o măsură care ne arată cît de bine $\mathbf{A}\varepsilon$ aproximează pe $\varepsilon^{\mathscr{A}T}\cdot\varepsilon$. — Evident, aproximaţia este din ce în ce mai bună cînd δ scade. Astfel, putem da un criteriu adecvat pentru alegerea lui K, valoarea maximă a indicelui de sumare în seria de puteri trunchiată. Acest criteriu este : K trebuie ales astfel încît δ să fie mai mic decît un număr pozitiv prescris Δ. Valoarea atribuită lui Δ, marginea superioară prescrisă a lui δ, se alege astfel încît să se asigure un nivel dorit de precizie în cunoaşterea lui $\varepsilon^{\mathscr{A}T}.\varepsilon$ prin evaluarea lui $\mathbf{A}\varepsilon$.

Trebuie reţinut faptul că precizia despre care vorbim este aceea obţinută prin calcule cu numere ce aparţin mulţimii *tuturor numerelor reale*. Cînd mulţimea de numere este finită, aşa cum se întîmplă atunci cînd calculele sînt efectuate cu ajutorul unui calculator numeric, există o limită a preciziei care se poate obţine. Această limită impusă de calcu-

lator asupra preciziei, este legată de numărul de cifre semnificative în numerele cu virgulă mobilă, folosită de maşină pentru efectuarea calculelor aritmetice. Pentru problema de care ne ocupăm implicaţia este următoarea: precizia calculelor efectuate de maşină este determinată de Δ numai pentru Δ mai mare decît o anumită valoare, valoare stabilită de numărul de cifre semnificative folosite de calculator pentru efectuarea operaţiilor aritmetice.

Vom obţine mai întîi o margine superioară a lui δ care este independentă de ε. Un calcul simplu arată că

$$\|\varepsilon\| = \|\varepsilon^{-\mathscr{A}T}\varepsilon^{\mathscr{A}T}\,\varepsilon\| \leqslant \|\varepsilon^{-\mathscr{A}T}\|\,\|\varepsilon^{\mathscr{A}T}\,\varepsilon\|,$$

ceea ce implică

$$\frac{\|\varepsilon\|}{\|\varepsilon^{-\mathscr{A}T}\|} = \|\varepsilon^{-\mathscr{A}T}\|^{-1}\|\varepsilon\| \leqslant \|\varepsilon^{\mathscr{A}T}\,\varepsilon\|. \tag{90}$$

Astfel $\|\varepsilon^{\mathscr{A}T}\,\varepsilon\|$ este mărginit inferior de $\|\varepsilon^{-\mathscr{A}T}\|^{-1}\,\|\varepsilon\|$. Atunci, deoarece $\|\mathbf{R}\varepsilon\|$ este mărginit superior de către $\|\mathbf{R}\|\,\|\varepsilon\|$, găsim ţinînd seama de (89) ecuaţia de definiţie pentru δ, astfel

$$\delta \leqslant \frac{\|\mathbf{R}\|\,\|\varepsilon\|}{\|\varepsilon^{-\mathscr{A}T}\|^{-1}\|\varepsilon\|} = \|\mathbf{R}\|\,\|\varepsilon^{-\mathscr{A}T}\|. \tag{91}$$

În continuare, dorim să evaluăm norma lui $\mathbf{R}$ şi cea a lui $\varepsilon^{-\mathscr{A}T}$; dar fiecare din acestea este definit de o serie infinită, evaluarea normei nefiind posibilă. Totuşi, putem calcula o margine a lui $\|\mathbf{R}\|$ ca mai jos. Relaţiile de inegalitate aplicate normei seriei (88) pentru $\mathbf{R}$ vor da

$$\|\mathbf{R}\| \leqslant \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{\|\mathscr{A}\|^k \mathrm{T}^k}{k!}.$$

Notînd $l = k-K-1$, obţinem după o rearanjare simplă a factorilor

$$\|\mathbf{R}\| \leqslant \frac{\|\mathscr{A}\|^{K+1}\mathrm{T}^{K+1}}{(K+1)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(K+1)!\,(K+2)^l}{(K+1+l)!}\left(\frac{\|\mathscr{A}\|\,\mathrm{T}}{K+2}\right)^l$$

$$\leqslant \frac{\|\mathscr{A}^{K+1}\|\,\mathrm{T}^{K+1}}{(K+1)!} \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{\|\mathscr{A}\|\,\mathrm{T}}{K+2}\right)^l.$$

Ultimul rînd rezultă din faptul că $(K+1)!\,(K+2)^l/(K+1+l)! \leqslant 1$ pentru orice $l \geqslant 0$. Fie acum K_0 cea mai mică valoare negativă a lui K astfel

încît $K+2>\|\mathscr{A}\|T$; atunci pentru orice $K \geqslant K_0$, avem $\|\mathscr{A}\|T/(K+2)<1$ şi

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{\|\mathscr{A}\|\,T}{K+2}\right)^l = \frac{1}{1-\dfrac{\|\mathscr{A}\|\,T}{K+2}}.$$

Substituind acest rezultat în inegalitatea precedentă, găsim pentru $K \geqslant K_0$ că

$$\|\mathbf{R}\| \leqslant \frac{\|\mathscr{A}\|^{K+1}\,T^{K+1}}{(K+1)\,!}\;\frac{1}{1-\dfrac{\|\mathscr{A}\|\,T}{K+2}}. \tag{92}$$

Partea dreaptă a ecuaţiei constituie o margine superioară pentru norma lui **R**.

Să ne reîntoarcem la norma lui $\varepsilon^{-\mathscr{A}T}$. Dacă se înlocuieşte T prin $-T$ în relaţia (85), obţinem seria de puteri de definiţie pentru $\varepsilon^{-\mathscr{A}T}$; astfel

$$\varepsilon^{-\mathscr{A}T} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\mathscr{A}^k T^k}{k!}.$$

Se poate calcula uşor o margine superioară pentru $\|\varepsilon^{-\mathscr{A}T}\|$. Găsim

$$\|\varepsilon^{-\mathscr{A}T}\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|\mathscr{A}\|^k\,T^k}{k!} = \varepsilon^{\|\mathscr{A}\|T}. \tag{93}$$

Dacă marginea superioară a lui $\|\mathbf{R}\|$ şi $\|\varepsilon^{-\mathscr{A}T}\|$ din (92) şi (93) se înlocuiesc în (91), obţinem

$$\delta \leqslant \frac{\|\mathscr{A}\|^{K+1}\,T^{K+1}}{(K+1)!}\;\frac{1}{1-\dfrac{\|\mathscr{A}\|\,T}{K+2}}\,\varepsilon^{\|\mathscr{A}\|\,T} \tag{94}$$

pentru $K \geqslant K_0$. Partea dreaptă a ecuaţiei (94) este o funcţie descrescătoare în raport cu K care tinde la zero cînd K tinde către infinit. Astfel, pentru orice valoare dată a lui Δ, există valori ale lui K, (de fapt cea mai mică valoare va fi cea considerată aici) astfel încît

$$\frac{\|\mathscr{A}\|^{K+1}\,T^{K+1}}{(K+1)!}\;\frac{1}{1-\dfrac{\|\mathscr{A}\|\,T}{K+2}}\,\varepsilon^{\|\mathscr{A}\|T} < \Delta \tag{95}$$

și deci $\delta < \Delta$. Aceste valori ale lui $K \geqslant K_0$ care satisfac (95), satisfac deasemenea și criteriul anterior pentru alegerea lui K. Din toate valorile satisfăcătoare pentru K este bine să fie aleasă cea mai mică valoare care satisface (95), deoarece numărul de operații aritmetice necesare pentru a evalua seria de puteri trunchiată (87) va fi minimizat.

Erori de calcul

În paragraful precedent, am descompus răspunsul de stare reprezentat prin vectorul $\mathbf{x}(t)$ în suma răspunsului liber $\mathbf{x}^l(t)$ și a celui forțat $\mathbf{x}^f(t)$. Din (74) rezultă

$$\mathbf{x}^l(n\,T) = (\varepsilon^{\mathscr{A}T})^n\,\mathbf{x}(0). \tag{96}$$

Dacă $\mathbf{e}(t)$ este aproximat printr-o serie în timp

$$\hat{\mathbf{e}}(t) = \sum \mathbf{e}(k\,T)\;\delta(t - k\,T)\;T,$$

am găsit în (73b) că

$$\mathbf{x}^c_e(n\,T) = \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon^{\mathscr{A}T})^{n-k}\,\mathscr{B}\,\mathbf{e}\,(k\,T)\,T. \tag{97}$$

Sintem acum interesați în calcularea erorilor rezultate datorită înlocuirii in aceste două ecuații a lui $\varepsilon^{\mathscr{A}T}$ prin aproximația sa.

Erori la calculul răspunsului de stare liber

Considerăm mai întîi răspunsul de stare liber. Fie $\boldsymbol{\varepsilon}^l\,(n T)$ diferența intre răspunsul de stare liber real $(\varepsilon^{\mathscr{A}T})^n\;\mathbf{x}(0)$ și răspunsul de stare liber aproximat prin $\mathbf{A}^n\mathbf{x}\;(0)$; adică

$$\boldsymbol{\varepsilon}^l\,(n\,T) = [(\varepsilon^{\mathscr{A}T})^n - \mathbf{A}^n]\,\mathbf{x}\,(0) \tag{98}$$

Considerînd norma ambelor părți ale acestei ecuații obținem

$$||\boldsymbol{\varepsilon}^l\,(n\,T)|| \leqslant ||(\varepsilon^{\mathscr{A}T})^n - \mathbf{A}^n||\;||\mathbf{x}(0)||. \tag{99}$$

Astfel, în operația de căutare a marginei pentru $||\boldsymbol{\varepsilon}^l\,(nT)||$, trebuie să stabilim o margine superioară a termenilor de forma $||[(\varepsilon^{\mathscr{A}T})]^l - \mathbf{A}^l||$. Am folosit l și nu n pentru a nota puterile la care se ridică $\varepsilon^{\mathscr{A}T}$ și $\mathbf{A}$,

deoarece marginea pe care o vom stabili se va aplica şi altor relaţii în afara lui [99]. În acele alte cazuri, exponentul nu va fi notat cu n.

Conform proprietăţilor normelor matricelor, se poate arăta că

$$\begin{aligned} \|[\varepsilon^{\mathscr{A}T}]^l - \mathbf{A}^l\| &= \|[\mathbf{A}+\mathbf{R}]^l - \mathbf{A}^l\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{l} \binom{l}{k} \mathbf{A}^{l-k}\mathbf{R}^k \right\| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{l} \binom{l}{k} \|\mathbf{A}\|^{l-k} \|\mathbf{R}\|^k \\ &\leqslant [\|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{R}\|]^l - \|\mathbf{A}\|^l. \end{aligned} \tag{100}$$

Rîndul al doilea rezultă din teorema binomială. Următorul rînd rezultă din inegalitatea triunghiului şi din (82). În final, ultimul rînd este un rezultat al reciprocei teoremei binomiale. Dacă impunem pentru K satisfacerea lui (95), ştim din acea ecuaţie că $\|\mathbf{R}\| < \Delta \|\varepsilon^{-\mathscr{A}T}\|^{-1}$. În plus, se poate arăta uşor (problema 15) că

$$\|\varepsilon^{-\mathscr{A}T}\|^{-1} \leqslant \|\varepsilon^{\mathscr{A}T}\|$$

şi prin urmare că $\|\mathbf{R}\| < \Delta \|\varepsilon^{\mathscr{A}T}\|$. Cu observaţia suplimentară că $\|\varepsilon^{\mathscr{A}T}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{R}\|$ şi presupunerea raţională că $\Delta < 1$, obţinem

$$\|\mathbf{R}\| < \frac{\Delta}{1-\Delta} \|\mathbf{A}\|. \tag{101}$$

Combinînd (100) şi (101) rezultă

$$\begin{aligned} \|[\varepsilon^{\mathscr{A}T}]^l - \mathbf{A}^l\| &< \|\mathbf{A}\|^l \left[\left(1 + \frac{\Delta}{1-\Delta}\right)^l - 1 \right] \\ &= \|\mathbf{A}\|^l \left[\left(\frac{1}{1-\Delta}\right)^l - 1 \right]. \end{aligned} \tag{102}$$

Să observăm că această margine a lui $\|[\varepsilon^{\mathscr{A}T}]^l - \mathbf{A}^l\|$ este o funcţie descrescătoare de l dacă şi numai dacă $\|\mathbf{A}\|/(1-\Delta)<1$; prin urmare vom presupune această condiţie îndeplinită în tot restul acestui paragraf.

Să ne reîntoarcem la problema găsirii marginei lui $||\varepsilon^{f}(nT)||$ Rezultatul substituirii lui (102) în (99), după cîteva calcule simple va fi

$$
\begin{aligned}
||\varepsilon^{f}(nT)|| &< ||\mathbf{A}||^{n}\left[\left(\frac{1}{1-\Delta}\right)^{n}-1\right]||\mathbf{x}(0)|| \\
&= \left(\frac{||\mathbf{A}||}{1-\Delta}\right)^{n}[1-(1-\Delta)^{n}]||\mathbf{x}(0)|| \\
&< n\,\Delta\left(\frac{||\mathbf{A}||}{1-\Delta}\right)^{n}||\mathbf{x}||(0)||. \qquad (103)
\end{aligned}
$$

Rîndul al doilea este chiar primul rînd dar cu termenii grupaţi în mod diferit. Ultimul rînd rezultă din faptul că $[1-(1-\Delta)^{n}]$ este o funcţie mărginită crescătoare în raport cu n care nu depăşeşte $n\Delta$. Problema găsirii maximului membrului drept al relaţiei (103) în raport cu n este o problemă de calcul elementar. Efectuînd aceasta vom obţine

$$
||\varepsilon^{f}(nT)|| < ||\mathbf{A}||^{n}\left[\left(\frac{1}{1-\Delta}\right)^{n}-1\right]||\mathbf{x}(0)|| \leqslant -\frac{\varepsilon^{-1}||\mathbf{x}(0)||\Delta}{\ln[||\mathbf{A}||/(1-\Delta)]}. \qquad (104)
$$

Observăm din (104) că $||\varepsilon^{f}(nT)||$ este mărginit şi din (103) observăm că $||\varepsilon_{f}(nT)||$ este o funcţie descrescătoare în raport cu n, tinzînd către zero cînd n tinde către infinit. În plus, $||\varepsilon^{f}(nT)||$ tinde către zero odată cu Δ. Trebuie să reţinem că maşinile de calcul folosite pentru a calcula $\mathbf{x}^{f}(n\mathrm{T})$ recursiv, folosesc numere cu număr limitat de cifre semnificative. Astfel, aşa cum am discutat anterior, eroarea în evaluarea numerică a lui $\mathbf{x}^{f}(nT)$ va fi mărginită conform lui (103) şi (104) numai dacă Δ este mai mare decît o anumită valoare dependentă de precizia calculatorului.

Erori la calculul răspunsului de stare forţat

Vom considera răspunsul de stare forţat $\mathbf{x}^{c}_{f}(nT)$ dat de (97). Fie $\varepsilon^{c}(nT)$ diferenţa între răspunsul de stare forţat real, anume $\sum_{k=1}^{n}(\varepsilon^{\mathscr{A}T})^{n-k}\cdot \mathscr{B}\mathbf{e}(kT).\,T$ şi răspunsul de stare forţat aproximativ, dat de $\sum_{k=1}^{n}\mathbf{A}^{n-k}\mathscr{B}\mathbf{e}(kT).\,T$; adică

$$
\varepsilon^{c}(nT) = \sum_{k=1}^{n}[(\varepsilon^{\mathscr{A}T})^{n-k}-\mathbf{A}^{n-k}]\mathscr{B}\mathbf{e}(kT)T. \qquad (105)
$$

Considerînd norma ambelor părţi ale acestei ecuaţii şi aplicînd inegalitatea (102), stabilim că

$$||\boldsymbol{\varepsilon}^c(n\,T)|| < \sum_{k=1}^{n} ||\mathbf{A}||^{n-k}\left[\left(\frac{1}{1-\Delta}\right)^{n-k} - 1\right]||\mathscr{B}\mathbf{e}\,(k\,T)||. \qquad (106)$$

Presupunem că pentru $k = 1,2,\ldots$, $||\mathscr{B}\mathbf{e}(kT)|| \leqslant E$, unde E este o constantă; adică presupunem că $||\mathscr{B}\mathbf{e}(kT)||$ este o funcţie mărginită în raport cu k. Atunci se găseşte că

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{\varepsilon}^c(n\,T)|| &< T\left\{\sum_{k=1}^{n} ||\mathbf{A}||^{n-k}\left[\left(\frac{1}{1-\Delta}\right)^{n-k} - 1\right]\right\}E \\ &< T\left[\sum_{k=1}^{n}(n-k)\Delta\left(\frac{||\mathbf{A}||}{1-\Delta}\right)^{n-k}\right]E \qquad (107) \\ &< T\left[\sum_{l=0}^{n-1} l\,\Delta\left(\frac{||\mathbf{A}||}{1-\Delta}\right)^{l}\right]E. \end{aligned}$$

Al doilea rînd rezultă din inegalitatea $[1-(1-\Delta)^{n-k}] \leqslant (n-k)\Delta$ pentru orice $k \leqslant n$. Rîndul al treilea rezultă din înlocuirea lui $n-k$ cu l. Conform ipotezei că $||\mathbf{A}||/(1-\Delta) < 1$, membrul drept al lui (107) este o funcţie mărginită crescătoare în raport cu n; prin urmare

$$||\boldsymbol{\varepsilon}^c(n\,T)|| < T\left[\Delta\sum_{l=0}^{\infty} l\left(\frac{||\mathbf{A}||}{1-\Delta}\right)^{l}\right]E = T\,\Delta\,\frac{||\mathbf{A}||/(1-\Delta)}{[1-||\mathbf{A}||/(1-\Delta)]^2}\,E. \qquad (108)$$

Egalitatea din dreapta rezultă din faptul că o serie de tipul $\sum_{m=0}^{\infty} m\,\alpha^m$ este egală cu $\alpha/(1-\alpha)^2$ pentru $\alpha < 1$. Observăm din inegalitatea de mai sus că $||\boldsymbol{\varepsilon}^c(nT)||$ este mărginită şi tinde către zero în raport cu Δ. Totuşi, pentru motive discutate anterior, atunci cînd calculăm o valoare numerică pentru $\mathbf{x}^l(nT)$, limitarea preciziei datorită calculatorului, împiedică limitarea erorii de evaluare a lui $\mathbf{x}^c_\varepsilon(n\,T)$ conform lui (108), atunci cînd Δ este foarte mic.

Exemplu

Să ilustrăm ideile dezvoltate anterior considerind un exemplu. Vom folosi aceleaşi $\mathscr{A}$ şi T ca în ultimul exemplu dat anterior; astfel

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

şi $T = 0.2$. Pentru norma lui $\mathscr{A}$ vom alege în mod arbitrar cea mai mică dintre cele două norme (83 a) şi (83 c). Avem $||\mathscr{A}||_1 = 3$ şi $||\mathscr{A}||_\infty = 2$; prin urmare o vom folosi pe cea de a doua.

Pentru a simplifica exemplul, desigur nu pentru precizie, vom impune condiţia ca Δ să fie numai $\leqslant 0{,}001$.

Reamintim că K_0 este cea mai mică valoare nenegativă întreagă a lui K astfel încît $K+2 > \|\mathscr{A}\| T$. Deoarece $\|\mathscr{A}\| T = 0{,}4$, găsim că $K_0 = 0$. Astfel din (95), trebuie să găsim un $K \geqslant 0$ încît să avem

$$\frac{0{,}4^{K+1}}{(K+1)!} \; \frac{1}{1-0{,}4/(K+2)} \; \varepsilon^{0{,}4} < 0{,}001.$$

Găsim uşor că $K = 4$. Aproximaţia $\mathbf{A}$ este evaluată după cum urmează:

$$\mathbf{A} = \sum_{k=0}^{4} \frac{(0{,}2)^k}{k!} \mathscr{A}^k$$

$$= \mathbf{U} + 0{,}2\,\mathscr{A} + 0{,}02\,\mathscr{A}^2 + 0{,}00133\,\mathscr{A}^3 + 0{,}0000666\,\mathscr{A}^4$$

şi

$$\mathscr{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathscr{A}^3 = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}, \quad \mathscr{A}^4 = \begin{bmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

Deci, pînă la o precizie de cinci cifre

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}81873 & 0{,}14833 \\ 0{,}00000 & 0{,}67040 \end{bmatrix};$$

Observăm că $\|\mathbf{A}\|_\infty = 0{,}967$. Aşadar, conform lui (104), $\|\boldsymbol{\varepsilon}^l(nT)\|$ este mărginită după cum se vede mai jos

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}^l(n\,T)\|_\infty < \frac{0{,}001 \times 0{,}368}{\ln\left(\dfrac{0{,}967}{0{,}999}\right)} \|\mathbf{x}(0)\|_\infty$$

$$< 0{,}0117\|\mathbf{x}(0)\|_\infty$$

şi conform lui (108), $\|\boldsymbol{\varepsilon}^c(nT)\|_\infty$ este mărginită; astfel

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}^c(n\,T)\|_\infty < \frac{0{,}2 \times 0{,}001 \times 0{,}967/0{,}999}{1-\left(\dfrac{0{,}967}{0{,}999}\right)^2} E$$

$$< 0{,}189\ E.$$

Încheiem acest paragraf cu o observaţie asupra unui tip de eroare care nu a fost considerat în acest paragraf şi nici în cel anterior. Fie $\mathbf{e}(t)$ excitaţia reţelei şi $\mathbf{x}(t)$ răspunsul de stare corespunzător. Valorile lui $\mathbf{x}(t)$ la $t = nT$ vor fi $\mathbf{x}(nT)$ şi în afară de cazul în care $\mathbf{e}(t) = \hat{\mathbf{e}}(t)$, vom avea $\mathbf{x}(nT) \neq \mathbf{x}_t(n\,T)$. Diferenţa între $\mathbf{x}(nT)$ şi $\mathbf{x}_t(nT)$ este o eroare ce provine din reprezentarea lui $\mathbf{e}(t)$ prin $\hat{\mathbf{e}}(t)$. Chiar dacă nu am tratat acest tip de eroare, se ştie că dacă transformăm un set de ecuaţii de stare neomogene într-un set de ecuaţii omogene, conform celor arătate în cap. 4, atunci acest tip de eroare nu mai apare deoarece pentru ecuaţiile omogene $\mathbf{e}(t) = \mathbf{0}$.

Probleme

P.1. În text, este introdus conceptul de convoluţie a două matrice de funcţii; să se extindă acest concept la mai mult decît două matrice de funcţii.

P.2. Să se demonstreze că produsul de convoluţie al funcţiilor scalare se bucură de aceleaşi proprietăţi ca înmulţirea obişnuită: Dacă f_1, f_2 şi f_3 sînt funcţii integrabile (astfel încît $f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(x) f_2(t-x)\, dx$ este definită şi analog $f_2 * f_3$ şi $f_1 * f_3$), atunci

(a) $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ (legea comutativităţii)

(b) $f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3$ (legea asociativităţii)

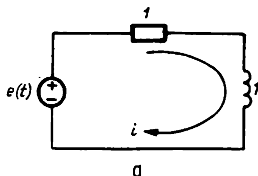
(c) $u * f = f * u = f$, unde u este funcţia treaptă unitate (identitate)

(d) $f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$ (legea distributivităţii)

Care din aceste proprietăţi se menţin atunci cînd considerăm convoluţia matricelor de funcţii?

P.3. În metoda de obţinere a integralei de convoluţie din relaţiile de stare, se obţine o singură formă a integralei, adică cea dată în (21). Arătaţi că celelalte forme sînt de asemenea valabile.

P.4. Să se găsească răspunsul la impulsul unitate şi răspunsul la treapta unitate a circuitelor din fig. 5.P4 presupunînd condiţii iniţiale nule. Răspunsurile cerute sînt indicate în figuri. Să se demonstreze că se satisface (31).



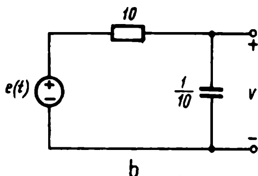
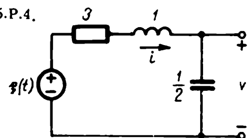
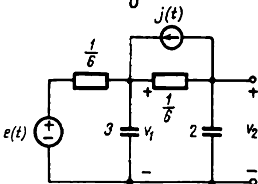
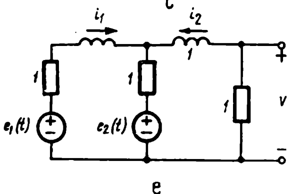
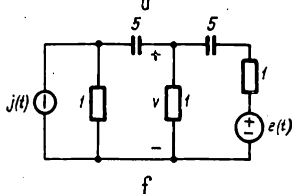


Fig. 5.P.4.









P.5. Să se găsească răspunsul acelorași circuite la funcțiile de excitație din fig. 5.P5 folosind răspunsul la impulsul unitate sau treapta unitate și integrala de superpoziție. (Ordonata are mai multe notări pentru a corespunde diferitelor surse existente în fig. 5.P4.

Fig. 5.P.5.

P.6. Circuitul echivalent al unui amplificator cu cuplaj RC, este arătat în fig. 5.P6. Să se găsească răspunsul amplificatorului la excitațiile arătate în fig. 5.P5 folosind o integrală de superpoziție cu 1) răspunsul la impulsul unitate și 2) răspunsul la treapta unitate.

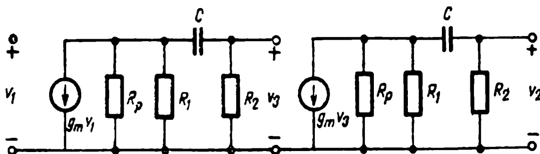


Fig. 5.P.6.

P.7. Să se rezolve ecuaţia integrală de tipul celor de convoluţie:

$$\mathcal{F}(t) + \int_0^t \mathcal{F}(\tau)\mathcal{G}_1(t-\tau)\,d\tau = \mathcal{G}_2(t).$$

Matricea de funcţii necunoscută este $\mathcal{F}(t)$, iar $\mathcal{G}_1(t)$ şi $\mathcal{G}_2(t)$ sînt matrice patrate şi sînt matrice de funcţii (integrabile) cunoscute.

P.8. Să se găsească o soluţie a următoarelor ecuaţii integrale scalare:

(a) $f(t) + \int_0^t f(\tau)\varepsilon^{-2(t-\tau)}\,d\tau = 2t;$

(b) $f(t) + \int_0^t f(\tau)\varepsilon^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau)\,d\tau = 5;$

(c) $\frac{df}{dt} + 2f(t) + 9\int_0^t f(\tau)\,(t-\tau)\,d\tau = 1 - \varepsilon^{-2t},\ f(0) = 0.$

P.9. Să se găsească o soluţie a următoarelor ecuaţii integrale matriceale:

(a) $\mathcal{F}(t) + \int_0^t \mathcal{F}(\tau)\begin{bmatrix} \varepsilon^{-(t-\tau)} & 0 \\ 2 & t+\tau \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \varepsilon^{-2t} & t \\ 0 & t\varepsilon^{-t} \end{bmatrix}$

(b) $\mathcal{F}(t) + \int_0^t \mathcal{F}(\tau)\begin{bmatrix} \varepsilon^{-2(t-\tau)} & 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-2(t-\tau)} & 1 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \sin t & 0 & 1 \\ 0 & \cos t & -1 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-t} \end{bmatrix}$

P.10. Se dă ecuaţia diferenţială

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = \frac{df}{dt} + 3f$$

$$y(0+) = \dot{y}(0+) = 0.$$

Să se găsească o formulă explicită pentru $y(t)$ (soluţia), găsind mai întîi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2+2s+1}\right\}.$$

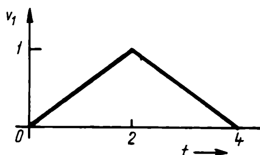
Să se folosească această formulă pentru aflarea soluției cînd $f(t)$ este

$$\text{(a)}\ f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < 1 \\ 0, & 1 \leqslant t \end{cases}$$

$$\text{(b)}\ f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0, & 1 \leqslant t \end{cases}$$

$$\text{(c)}\ f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0, & 1 \leqslant t \end{cases}$$

P.11. Pulsul de tensiune triunghiulară arătat în fig. 5.11a se aplică circuitului din fig. 5.P11b. Să se calculeze răspunsul tensiune de ieșire pentru orice moment de timp, folosind teorema convoluției.



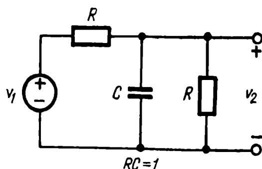
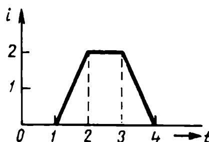


Fig. 5.P.11.

P.12. Să se demonstreze teorema translației (deplasării) din teoria transformatei Laplace folosind teorema integralei de convoluție.

P.13. Pulsul trapezoidal arătat în fig. 5.P13a se aplică circuitului din fig. P5.13b. Să se găsească răspunsul tensiune de ieșire folosind teorema convoluției.



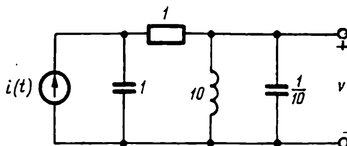


Fig. 5.P.13.

P.14. Circuitului din fig. 5.P 14 a i se aplică drept excitaţii două surse de tensiune. Tensiunile ca funcţii de timp sînt arătate în fig. 5. P 14, b. Folosind teorema convoluţiei să se calculeze răspunsurile indicate pe figură şi anume v, i_1 şi i_2, în funcţie de timp.

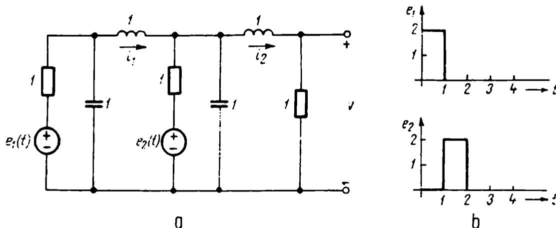


Fig. 5.P.14.

P.15. Să se demonstreze că $\|\varepsilon^{\mathcal{A}T}\| \geqslant \|\varepsilon^{\mathcal{A}T}\|^{-1}$.

P.16. Circuitului din fig. 5.P 11 b i se aplică o excitaţie dată de

$$v_1(t) = \begin{cases} \operatorname{tg} t, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right), & \dfrac{\pi}{4} \leqslant t < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant t \end{cases}$$

Să se găsească impulsul aproximativ al circuitului pentru $0 \leqslant t \leqslant 2$, folosind reprezentarea prin serie în timp. Să se estimeze eroarea maximă apărută în soluţie pentru intervalul ales.

P.17. Să se repete problema 1.16, folosind însă excitaţia

$$v_1(t) = \begin{cases} \arcsin t, \ 0 \leqslant t < 1 \left(0 \leqslant v_1 \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0, \quad 1 \leqslant t \end{cases}$$

Să se folosească aproximarea în trepte şi răspunsul la treapta unitate.
Să se estimeze eroarea.

P.18. Se aplică circuitului din fig. 5.P 18 a funcţia de excitaţie din fig. 5.P 18 b. Să se găsească răspunsul aproximativ $v_2(t)$ pentru $0 \leqslant t \leqslant 5$.

P.19. Pentru fiecare din circuitele din fig. 5. P 4 să se calculeze secvenţa în timp corespunzătoare răspunsului la impulsul unitate, pentru $T=0,1$ şi $n=0,1...15$. Apoi să se calculeze secvenţa în timp a răspunsului circuitului pentru $n = 0, 1, \cdots 15$, cînd exitaţiile circuitului arătate în fig. 5. P 5 sînt aproximate prin secvenţele lor în timp.

P.20. Răspunsul la impulsul unitate $w_\delta(t)$ a unui circuit cu o singură intrare şi o singură ieşire este arătat în fig. 5. P 20, a. Folosind secvenţa în timp pentru răspunsul la impulsul unitate, cu $T = 0,1$, să se calculeze secvenţa în timp a răspunsului circuitului, pentru $n = 0,1,2, ...10$, cînd excitaţiile circuitului $e(t)$ arătate în fig. 5. P 20 b sînt aproximate prin secvenţele lor în timp.

P.21. Se consideră circuitul pentru care

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathscr{B} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathscr{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathscr{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \hat{\mathscr{D}} = 0.$$

Să se evalueze $\mathbf{x}_t(nT)$ potrivit relaţiei de recurenţă (75) şi $\mathbf{w}(nT)$ conform lui (76) pentru $n = 1, \dots 15$, cînd $\mathbf{e}(t) = [u(t)-(t-1)u(t-1)+(t-2)u(t-2)]$, $T = 0,2$ şi $\mathbf{x}(0) = [-1,2]'$.

P.22. Se presupune că o greşeală de calcul aritmetic introduce vectorul eroare $\varepsilon_4 = [0,001 - 0,012]'$ în valoarea calculată a lui $\mathbf{x}_t(4T)$ în problema 21. Va descreşte norma erorii transmise atunci cînd timpul creşte? Să se evalueze conform lui (84) marginea erorii în valoarea calculată a lui $\mathbf{x}_t(14T)$. Să se rezolve problema pentru fiecare din normele date în relaţiile (80).

P.23. Să se repete problemele 21 şi 22 după înlocuirea lui $\mathscr{A}$ cu fiecare din matricele:

$$(a)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (b)\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad (c)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

P.24. Să se repete Problemele 21 şi 22 după înlocuirea lui $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$, $\mathbf{x}(0)$ şi ε_4 prin

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathscr{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathscr{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathscr{D} = 0.$$

$$\mathbf{x}(0) = [1 \ -1 \ 1]', \quad \varepsilon_4 = [0,001 \ 0,020 \ -0,001]'.$$

P.25. Să se repete problema 21 înlocuind $\mathbf{e}(t)$ şi $\mathbf{x}(0)$ cu fiecare din următoarele:

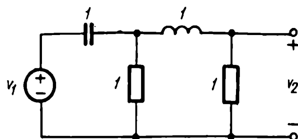
(a) $\mathbf{e}(t) = [t\varepsilon^{-t}]$, $\quad \mathbf{x}(0) = [0 \ 0]'$

(b) $\mathbf{e}(t) = [\sin t]$, $\quad \mathbf{x}(0) = [1 \ -1]'$

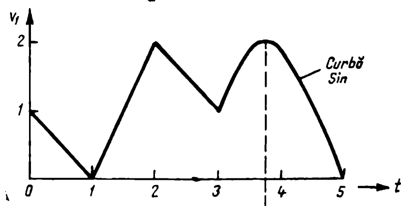
(c) $\mathbf{e}(t) = [2u(t)-u(t-1)]$, $\quad \mathbf{x}(0) = [0 \ 1]'$

(d) $\mathbf{e}(t) = [u(t)-\varepsilon^{-2t}]$, $\quad \mathbf{x}(0) = [0 \ 0]'$

(e) $\mathbf{e}(t) = [2\varepsilon^{-t}-3\varepsilon^{-2t}]$, $\quad \mathbf{x}(0) = [1 \ 0]'$

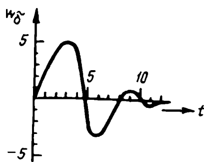


a

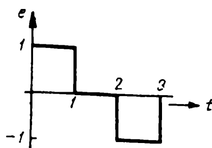


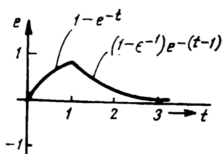
b

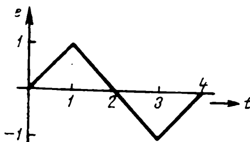
Fig. 5.P.18.

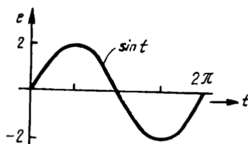


a









b

Fig. 5.P.20.

P.26. Să se repete calculele din exemplul dat în paragraful 5.6. folosind celelalte norme de matrice date în (83).

P.27. Pentru fiecare din matricele $\mathscr{A}$ de mai jos

$$(a)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (b)\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad (c)\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

să se determine K în trunchierea dată de (87) și marginile erorii din (104) și (108), cînd $T = 0{,}1$ și $\Delta = 0{,}001$. Să se folosească cele trei norme de matrice diferite din (83).

P.28. Să se repete calculele din problema 21 după înlocuirea lui $\varepsilon^{0,2\mathscr{A}}$ prin aproximarea sa cu ajutorul seriei de puteri trunchiate $\mathbf{A}$, calculată astfel încît în criteriul de trunchiere, (a) $\Delta = 0{,}01$ și (b) $\Delta = 0{,}001$. În fiecare caz să se folosească cele trei norme diferite date în (83). Să se compare rezultatele acestor calcule cu cele obținute în problema 21.

P.29. Să se repete problema 28 după înlocuirea lui $\mathscr{A}$ de către matricele din problema 23.

P.30. Dacă $\mathbf{e}(t)$ și $\mathbf{r}(t)$ sînt excitația aplicată și respectiv răspunsul unei rețele liniare invariante în timp N, atunci așa cum se arată în fig. 5. P 30, $\mathbf{r}^{(k)}(t)$ va fi răspunsul rețelei la $\mathbf{e}^{(k)}(t)$. Acest lucru sugerează o metodă de calcul a unei aproximări a lui $\mathbf{r}(t)$: (a) se va aproxima $\mathbf{e}$ prin segmente de dreptă, (b) se va deriva o dată, pentru a obține o aproximare în trepte a lui $\dot{\mathbf{e}}$ (sau de două ori, pentru a obține o aproximare cu o succesiune de impulsuri a lui $\ddot{\mathbf{e}}$), (c) se va găsi răspunsul lui N la aproximația lui $\dot{\mathbf{e}}$ (sau $\ddot{\mathbf{e}}$) și (d) se va integra o dată (sau de două ori) pentru a obține răspunsul aproximativ. Folosind această metodă, pentru răspunsul la impulsul unitate sau răspunsul la treapta unitate, să se calculeze răspunsul aproximativ al circuitelor din fig. 5. P 4 pentru excitațiile din fig. 5. P 5.

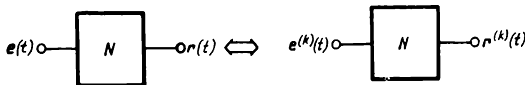


Fig. 5.P.30.

Următoarele patru probleme implică pregătirea unui program pentru a ajuta în aflarea soluției anumitor probleme. În fiecare caz, să se stabilească o organigramă și un set de instrucțiuni de program într-unul din limbajele de utilizare de exemplu FORTRAN IV, pentru un calculator numeric în scopul efectuării calculelor problemei. Să se includă în program un set de instrucțiuni de utilizare.

P.31*. Să se scrie un program pentru evaluarea lui $w_\ell\,(nT)$ pentru $n = 1, \cdots N$ conform cu (65). Valorile lui N, $e(kT)$ și $w_\delta\,(kT)$ vor fi introduse ca date de intrare.

P.32*. Să se scrie un program de evaluare a lui $\mathbf{A}$, aproximația lui $\varepsilon^{\mathscr{A}T}$, în (87). Programul trebuie să conducă la o alegere a lui K pentru care (95) este valabilă. Matricea $\mathscr{A}$ și scalarii T și Δ sînt specificați ca date de intrare. Să se folosească norma matricei din (83. a) sau (83. c).

P.33*. Să se scrie un program pentru evaluarea lui $\mathbf{x}_\ell\,(nT)$ pentru $n = 1,.. N$, conform lui (75) cînd $\mathbf{e}(nT) \equiv \mathbf{0}$ pentru orice n. Valorile lui N, x(0), și $\varepsilon^{\mathscr{A}T}$ vor fi specificate ca date de intrare.

P.34*. Să se combine programele din problemele 32 și 33 pentru a forma un singur program care pornind de la N, x(0), $\mathscr{A}$, T și Δ ca date de intrare, să evalueze $\mathbf{x}_\ell\,(nT)$ pentru $n = 1, \cdots N$ cînd $\mathbf{e}(nT) \equiv \mathbf{0}$.

6

Reprezentări ale funcțiilor de circuit (rețea)

Scopul acestui capitol este de a discuta modul în care se reprezintă funcțiile de circuit și de a începe studiul proprietăților funcționale ale circuitului, ca funcții analitice de o variabilă complexă. Vom insista mai ales asupra acelor proprietăți care se aplică în general funcțiilor de circuit, fără a ține seama de natura lor specifică de funcții de intrare sau de transfer. Deasemeni vom studia relațiile care există între părțile unei funcții de circuit — părțile reală și imaginară, modul și fază — și vom observa cum se reprezintă funcția prin oricare din părțile sale componente.

6.1. POLI, ZEROURI ȘI FRECVENȚE NATURALE

Reamintim că o *funcție de circuit* este definită ca raportul transformatei Laplace a unui *răspuns* la transformata Laplace a unei *excitații* cînd circuitul nu conține energie inițială acumulată. Vom începe prin a releva cîteva proprietăți elementare ale funcțiilor de circuit menționate anterior, chiar dacă unele din ele nu au fost enunțate în mod explicit.

Ne vom ocupa de circuite cu elemente concentrate, liniare, invariante în timp. Funcțiile de circuit ale unor astfel de circuite sînt *funcții raționale*, rapoartele a două polinoame întregi. În capitolul 3 am legat funcțiile de circuit de determinanții și cofactorii matricelor admitanțelor la noduri. sau impedanțelor de contur. Să facem legătura lor cu ecuațiile de stare. Reamintim că ecuațiile de stare pentru un circuit pot fi scrise după cum urmează :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathscr{A}\mathbf{x} + \mathscr{B}\mathbf{e}, \tag{1a}$$

$$\mathbf{w} = \mathscr{C}\mathbf{x} + \mathscr{D}\mathbf{e} + \hat{\mathscr{D}}\frac{d\mathbf{e}}{dt}, \tag{1b}$$

unde x, e şi w sînt respectiv vectorii de stare, de excitaţie şi de ieşire. Ultimul termen din cea de a doua ecuaţie poate să apară numai cînd un element al vectorului de ieşire este un curent printr-un condensator *şi* sursă de tensiune independentă pe contur, sau o tensiune pe bobină *şi* sursă de curent independentă pe secţiune.

Presupunînd condiţii iniţiale nule, luăm transformatele Laplace ale acestor ecuaţii, rezolvăm prima din ele pentru $\mathbf{X}(s)$ şi substituim în cea de a doua. Rezultatul va fi [1]):

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{U} - \mathscr{A})^{-1} \mathscr{B} \mathbf{E}(s), \tag{2a}$$

$$\mathbf{W}(s) = \{\mathscr{C}(s\mathbf{U} - \mathscr{A})^{-1} \mathscr{B} + \mathscr{D} + s\hat{\mathscr{D}}\} \mathbf{E}(s). \tag{2b}$$

Termenul din acoladă este matricea de transfer $\mathbf{H}(s)$, în care fiecare din elemente este o funcţie de circuit. Astfel :

$$\mathbf{H}(s) = \mathscr{C}(s\mathbf{U} - \mathscr{A})^{-1} \mathscr{B} + \mathscr{D} + s\hat{\mathscr{D}}. \tag{3}$$

Să examinăm această expresie cu atenţie. Ultimii doi termeni indică o relaţie directă între excitaţie şi răspuns fără intervenţia vectorului de stare. Aceşti termeni determină comportarea răspunsului cînd s tinde către infinit. De fapt aşa cum s-a observat în ultimul capitol $\hat{\mathscr{D}}$ este matricea reziduurilor lui $\mathbf{H}(s)$ la infinit.

În primul termen din (3) $\mathscr{C}$ şi $\mathscr{B}$ sînt matrice de numere reale. Variabila complexă s apare numai în $(s\mathbf{U}-\mathscr{A})^{-1}$. Notînd $d(s)$ polinomul caracteristic al lui $\mathscr{A}$, acest termen poate fi scris

$$\mathscr{C}(s\mathbf{U} - \mathscr{A})^{-1} \mathscr{B} = \frac{1}{d(s)} \mathscr{C}\,[\mathrm{adj}\,(s\mathbf{U} - \mathscr{A})]\,\mathscr{B}. \tag{4}$$

Elementele lui adj $(s\mathbf{U}-\mathscr{A})$ sînt cofactorii lui det $(s\mathbf{U}-\mathscr{A})$ şi deci sînt polinoame. Acest fapt nu este modificat cînd adj $(s\mathbf{U}-\mathscr{A})$ este premultiplicată cu $\mathscr{C}$ şi postmultiplicată cu $\mathscr{B}$. Prin urmare întregul termen este o matrice ale cărei elemente sînt polinoame împărţite prin $d(s)$. S-a verificat astfel că funcţiile de circuit sînt funcţii raţionale de s.

---

[1]) Observăm că $\mathbf{e}(0)$ nu apare în (2*b*), deşi derivata lui e apare în (1*b*). Acest lucru este impus de condiţia ca circuitul să nu conţină energie iniţială acumulată. Valoarea iniţială a lui e poate apare numai dacă derivata termenului excitaţiei apare în ecuaţie. Deoarece ea va apare numai atunci cînd există contururi numai din condensatoare sau secţiuni conţinînd numai bobine, punînd tensiunile iniţiale pe condensatoare şi curenţii iniţiali prin bobine egali cu zero, va fi necesar ca valorile iniţiale ale excitaţiei să fie deasemenea zero.

Din cele precedente pot fi stabilite şi alte lucruri. În capitolele precedente ne-am referit la *frecvenţele naturale* ale unui circuit. În capitolul 3 ele au fost considerate zerourile determinantului matricei impedanţelor de contur, sau al matricei admitanţelor la noduri. S-a arătat că aceşti doi determinanţi pot diferi cel mult prin multiplicatorul Ks^p şi prin urmare zerourile lor nenule sînt aceleaşi. În capitolul 4 frecvenţele naturale s-au tratat ca valori proprii ale matricei A, anume ca zerouri ale lui $d(s)$. Vedem că zerourile lui $d(s)$ sînt aceleaşi ca şi cele ale determinantului impedanţelor de contur şi ale determinantului admitanţelor la noduri. Aceasta rezultă din faptul că $\mathbf{W}(s)$ se referă la *oricare* ieşire. Astfel, dacă alegem ca ieşiri toate tensiunile la noduri, şi numai acestea, $\mathbf{W}(s)$ este matricea transformatelor tensiunilor la noduri. Deoarece soluţiile circuitelor sînt unice, (2*b*) trebuie să dea aceleaşi rezultate ca soluţia ecuaţiilor la noduri. În ultimul caz, numitorul soluţiei va fi Δ_y. Prin urmare Δ_y şi $d(s)$ au aceleaşi zerouri nenule. O concluzie similară rezultă cu privire la Δ_z. Pentru uşurinţa referirii vom enunţa acest rezultat sub forma unei teoreme.

Teorema 1. *Zerourile nenule ale lui* det $(s\mathbf{U}-\mathscr{A})$ *sînt aceleaşi ca şi zerourile nenule ale lui* det $(\mathbf{AYA}')$ *şi* det $(\mathbf{BZB}')$

Poziţiile polilor

Fie $F(s)$ simbolul generic pentru o funcţie de circuit. Fiind o funcţie raţională ea poate fi scrisă în următoarele forme:

$$F(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}, \tag{5a}$$

$$F(s) = K\frac{(s-s_{01})\,(s-s_{02})\cdots(s-s_{0m})}{(s-s_{p1})\,(s-s_{p2})\cdots(s-s_{pn})}. \tag{5b}$$

Deoarece fiecare din matricele $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ şi $\hat{\mathscr{D}}$ din membrul drept al lui (3) sînt matrice de numere reale şi $F(s)$ reprezintă orice element al lui $\mathbf{H}(s)$, toţi coeficienţii lui s din (5 a) trebuie să fie reali [1]). Dacă s ia numai valori reale în (5 *a*), atunci $F(s)$ va fi real. O funcţie de variabilă complexă

[1]) Acest enunţ trebuie privit în mod obişnuit, deoarece este posibil a multiplica fiecare coeficient din numărător şi numitor printr-un număr complex arbitrar, fără a schimba funcţia. Această dificultate este depăşită făcînd, să zicem, coeficientul puterii celei mai mari a numitorului să fie egal cu unitatea.

care este reală cînd variabila este reală, se numeşte *funcţie reală*. Astfel, funcţiile de circuit sînt funcţii reale de s. Din aceasta rezultă imediat *proprietatea de reflexie*, anume

$$F(\bar{s}) = \bar{F}(s); \tag{6}$$

adică funcţiile de circuit iau valori conjugate în punctele conjugate din planul complex.

Să privim cea de a doua formă a lui (5) în care sînt puşi în evidenţă polii s_{pk} şi zerourile s_{ok}. Pînă la un factor de multiplicare K, funcţia de circuit este complet determinată de polii şi zerourile sale care îi determină

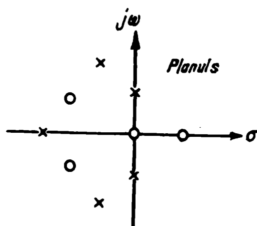


Fig. 6.1. Reprezentarea poli-zerourilor.

proprietăţile analitice. De fapt, polii şi zerourile dau reprezentarea unei funcţii de circuit aşa cum este ilustrat în fig. 6.1. Zerourile sînt reprezentate prin cercuri şi polii prin cruciuliţe. Acestor reprezentări le spunem *diagrame poli—zerouri*. Proprietatea de reflexie (6) implică faptul că polii şi zerourile unei funcţii de circuit sînt fie reale, fie în perechi complex conjugate.

Altă proprietate simplă a funcţiilor de circuit rezultă dintr-o consideraţie de stabilitate. Cunoaştem că răspunsul liber este determinat de polii funcţiei de circuit. Deoarece

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a_{-k}}{(s-s_p)^k}\right] = \frac{a_{-k}t^{k-1}\varepsilon^{s_p t}}{(k-1)!}, \tag{7}$$

tragem concluzia că funcţia de circuit a unui circuit stabil nu poate avea nici unul din poli în semiplanul drept şi oricare din polii de pe axa $j\omega$ trebuie să fie simpli. În caz contrar, răspunsul liber va creşte nelimitat şi circuitul va fi instabil.

Această concluzie este mai restrictivă în cazul funcţiilor de intrare. Atît funcţia impedanţă cît şi funcţia admitanţă de intrare au această

proprietate și deoarece una este reciproca celeilalte, funcțiile de intrare nu pot avea nici poli nici zerouri în semiplanul drept. Mai mult, atît polii cît și zerourile de pe axa imaginară trebuie să fie simple.

În cazul unei funcții de transfer, reciproca nu este o funcție de circuit. Prin urmare, nu putem spune nimic despre zerourile sale. Ele pot fi situate oriunde în planul complex, fiind supuse numai proprietății de reflexie.

Părțile pară și impară ale unei funcții

În general $F(s)$ va avea atît puteri pare cît și puteri impare ale lui s: ea nu va fi nici funcție pară nici funcție impară. Prin urmare putem scrie

$$F(s) = \text{Par}\, F(s) + \text{Imp}\, F(s), \tag{8}$$

unde Par $F(s)$ înseamnă „partea pară a lui $F(s)$" și Imp $F(s)$ înseamnă „partea impară a lui $F(s)$". O funcție pară $g(s)$ este caracterizată de proprietatea $g(-s) = g(s)$ și o funcție impară de proprietatea $g(-s) = -g(s)$. Utilizînd aceste proprietăți și ținînd seama de (8), putem exprima părțile pară și impară ale unei funcții după cum urmează:

$$\text{Par}\, F(s) = \tfrac{1}{2}\, [F(s) + F(-s)], \tag{9a}$$

$$\text{Imp}\, F(s) = \tfrac{1}{2}\, [F(s) - F(-s)]. \tag{9b}$$

Pot fi obținute și alte forme dacă puterile pară și impară ale lui s sînt grupate atît la numărătorul cît și numitorul lui $F(s)$. Astfel scriem

$$F(s) = \frac{m_1(s) + n_1(s)}{m_2(s) + n_2(s)}, \tag{10}$$

unde m_1 și m_2 sînt polinoame pare, iar n_1 și n_2 sînt polinoame impare. Ținînd seama de aceasta în (9), avem

$$\text{Par}\, F(s) = \frac{m_1(s)\, m_2(s) - n_1(s)\, n_2(s)}{m_2^2(s) - n_2^2(s)}, \tag{11a}$$

$$\text{Imp}\, F(s) = \frac{n_1(s) m_2(s) - n_2(s) m_1(s)}{m_2^2(s) - n_2^2(s)}; \tag{11b}$$

Notăm că numitorul este acelaşi atît pentru partea pară cît şi pentru partea impară a lui $F(s)$ şi este un polinom par. Numărătorul lui Par $F(s)$ este par şi acela al lui Imp $F(s)$ este impar, aşa cum, de fapt, trebuie să fie.

Este interesant de a observa unde sînt situaţi polii lui Par $F(s)$ (şi de asemenea ai lui Imp $F(s)$). Din (9) rezultă clar că Par $F(s)$ are polii lui $F(s)$ şi $F(-s)$. Dar polii lui $F(-s)$ sînt imagini ale polilor lui $F(s)$ oglindite în raport cu axa imaginară. Aceasta poate fi ilustrat luînd următoarele funcţii $F(s)$ şi $F(-s)$:

$$F(s) = \frac{m_1 + n_1}{(s+1)(s^2+2s+2)},$$

$$F(-s) = \frac{m_1 - n_1}{(-s+1)(s^2-2s+2)}.$$

$F(s)$ are un pol pe axa reală negativă şi un pol complex conjugat în semiplanul stîng. Polii lui $F(-s)$ sînt imaginile oglindite ale acestora, aşa cum este arătat în fig. 6.2. Par $F(s)$ are toţi polii din fig. 6.2, atît pe cei din semiplanul stîng (s.p.s) cît şi din semiplanul drept (s.p.d).

Reprezentarea polilor din fig. 6.2 posedă o anumită simetrie. O reprezentare a polilor care are simetrie în raport atît cu axa reală cît şi cu axa imaginară se spune că are o *simetrie cuadrantală*. Astfel spunem că polii lui Par $F(s)$ şi Imp $F(s)$ au simetrie cuadrantală.

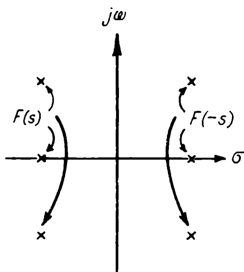


Fig. 6.2. **Polii** lui Par $F(s)$.

Funcţia $F(s)$ specifică o valoare a lui F pentru toate valorile complexe ale lui s. Dintre toate valorile lui s, de un interes deosebit sînt acelea de pe axa $j\omega$. Pentru $s = j\omega$, sîntem deseori interesaţi în comportarea uneia din următoarele componente: partea reală, partea imaginară, faza

şi modulul (sau logaritmul din modul). Acestea sînt componentele implicate în răspunsul în regim staţionar la excitaţie sinusoidală. Oricare din aceste componente poate fi interpretată ca un *răspuns în frecvenţă.* Aceste componente ale unei funcţii sînt legate prin

$$F(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = |F(j\omega)|\,\varepsilon^{j\Phi(\omega)}, \tag{12}$$

unde semnificaţiile simbolurilor sînt evidente.

Să considerăm relaţia (9) presupunînd că $s = j\omega$. Dorim să vedem ce devin părţile pară şi impară ale lui $F(j\omega)$. Deoarece $F(-j\omega) = F(\overline{j\omega}) = \overline{F}(j\omega)$ din (6) vedem că

$$\text{Par}\, F(j\omega) = \tfrac{1}{2}[F(j\omega) + \overline{F}(j\omega)] = \text{Re}\, F(j\omega) = R(\omega), \tag{13a}$$

$$\text{Imp}\, F(j\omega) = \tfrac{1}{2}[F(j\omega) - \overline{F}(j\omega)] = j\,\text{Im}\, F(j\omega) = jX(\omega). \tag{13b}$$

Aceasta înseamnă că partea reală a unei funcţii pe axa $j\omega$ este partea sa pară, iar partea imaginară pe axa $j\omega$ este partea sa impară împărţită prin j. Altfel spus, partea reală a lui $F(j\omega)$ este o funcţie pară de frecvenţa unghiulară ω, iar partea imaginară este o funcţie impară de ω.

Modulul şi faza unei funcţii

Enunţuri similare se pot face pentru modul şi fază. Astfel, utilizînd notaţia din (12) putem scrie pătratul lui $F(j\omega)$ după cum urmează:

$$F^2(j\omega) = F(j\omega)\,F(-j\omega)\frac{F(j\omega)}{F(-j\omega)} = |F(j\omega)|^2\,\varepsilon^{j2\Phi(\omega)}.$$

Prin urmare

$$|F(j\omega)|^2 = F(j\omega)\,F(-j\omega), \tag{14a}$$

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2j}\, ln \frac{F(j\omega)}{F(-j\omega)}. \tag{14b}$$

Înlocuind ω prin $-\omega$ vedem că modulul la pătrat este o funcţie raţională pară de ω. Observăm că $|F(j\omega)|^2$ este valoarea funcţiei raţionale pare $G(s) = F(s)F(-s)$ pe axa $j\omega$. Este interesant de notat că atît polii cît şi zerourile lui $G(s)$ apar în simetrie cuadrantală, proprietate a oricărei funcţii raţionale pare.

Pentru fază avem

$$\Phi(-\omega) = \frac{1}{2j} \ln \frac{F(-j\omega)}{F(j\omega)} = -\frac{1}{2j} \ln \frac{F(j\omega)}{F(-j\omega)} = -\Phi(\omega) \cdot \quad (15)$$

Prin urmare, sîntem tentaţi a spune că faza este o funcţie impară de ω. Însă faza este o funcţie multiformă. De aceea, afirmaţia de mai sus este intemeiată numai dacă rămînem pe o suprafaţă Riemann adecvată.

Funcţia de întîrziere

O funcţie de transfer va fi numită ideală dacă este de forma $F(s) = \varepsilon^{-s\tau}$. Pentru $s = j\omega$ modulul este identic egal cu unitatea şi faza este proporţională cu ω. Dacă un circuit avînd această funcţie de transfer este excitat de un semnal $e(t)$, răspunsul circuitului, ţinînd seama de teorema intîrzierii din teoria transformării Laplace, va fi $w(t) = e(t-\tau)$. Semnalul de răspuns este acelaşi ca şi excitaţia, cu excepţia faptului că este întîrziat in timp cu o valoare τ, numit timp de întîrziere. Deoarece $\Phi(\omega) = -\omega\tau$ pentru funcţia ideală, timpul de întîrziere este minus derivata funcţiei de fază.

Pe baza celor precedente, *funcţia întîrziere*, pentru o funcţie de transfer arbitrară, este definită astfel

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \Phi(\omega). \quad (16)$$

În contrast cu funcţia de fază, întîrzierea este o funcţie raţională.

6.2. FUNCŢII DE FAZĂ MINIMĂ

Aşa cum am observat mai înainte în acest capitol, zerourile funcţiilor de transfer pot apare în orice parte a planului complex. Funcţiile care nu au zerouri în semiplanul drept au anumite proprietăţi care sînt foarte importante. Pentru acest motiv dăm acestor funcţii un nume distinct pentru o identificare mai uşoară. Definim *funcţie de transfer de fază minimă ca fiind acea funcţie care nu are zerouri în semiplanul drept.* Dimpotrivă, orice funcţie de transfer care are zerouri (chiar un zero) în semiplanul drept este numită funcţie de *fază neminimă.* Motivul acestor denumiri va deveni evident în cele ce urmează.

În scopul de a determina efectul zerourilor din semiplanul drept asupra modulului și fazei unei funcții de transfer, considerăm fig. 6.3*a*. În această figură se arată o pereche de zerouri conjugate în semiplanul drept și imaginea din semiplanul stîng a acestei perechi. Fie $P_r(s)$ și $P_l(s)$

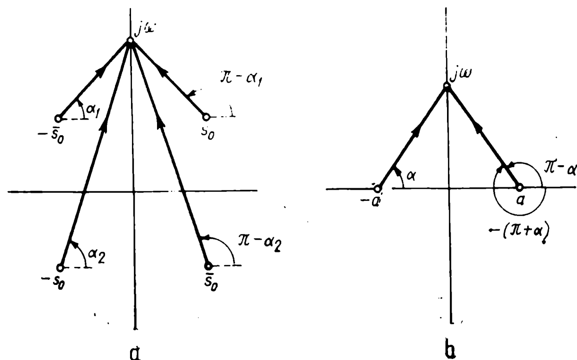


Fig. 6.3. Zerouri reale și complexe în simetrie cuadrantală.

polinoamele de gradul doi care au respectiv perechea de factori din semiplanul drept și perechea de factori din semiplanul stîng, adică

$$P_r(s) = (s - s_0)(s - \bar{s}_0) \tag{17a}$$

$$P_l(s) = (s + s_0)(s + \bar{s}_0). \tag{17b}$$

Este clar că $P_r(s) = P_l(-s)$. Construcția geometrică din figură arată că modulele lui P_r și P_l sînt aceleași cînd $s = j\omega$. Astfel pentru faze găsim

$$\arg P_r(j\omega) = \pi - \alpha_1 - [2\pi - (\pi - \alpha_2)] = -(\alpha_1 + \alpha_2), \tag{18a}$$

$$\arg P_l(j\omega) = \alpha_1 + \alpha_2 = -\arg P_a(j\omega). \tag{18b}$$

Notăm că, pentru ca faza lui P_r să fie zero la $\omega = 0$, așa cum de fapt trebuie să fie dacă faza este o funcție impară, faza lui $(s - \bar{s}_0)$ s-a scris $-(\pi + \alpha_2)$ în loc de $\pi - \alpha_2$. Diferența de 2π corespunde specificării fazei pe una din foile suprafeței Riemann în loc de o alta. Această dorință de a

avea funcția fază o funcție impară de ω este foarte înrădăcinată la teoreticienii circuitelor. Motivul principal pentru această dorință este că ea simplifică enunțul multor teoreme pe care le vom trata ulterior în acest capitol.

Din fig. 6.3 rezultă clar că $\alpha_1 + \alpha_2$, faza datorată zerourilor din semiplanul stîng este pozitivă pentru orice ω pozitiv. Ea variază de la 0 la $\omega=0$, pînă la π la $\omega = \infty$. Acest lucru este ilustrat în fig. 6.4. Rezultă atunci că faza unei perechi de zerouri conjugate în semiplanul drept este

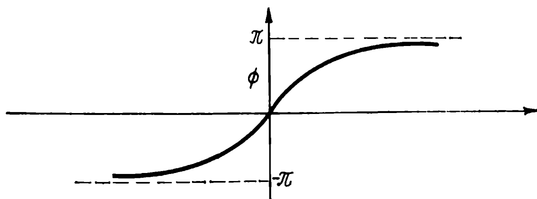


Fig. 6.4. Unghiul unei perechi de zerouri complexe în semiplanul stîng.

întotdeauna negativă pentru valori pozitive ale lui ω, variind de la 0 la $\omega=0$ pînă la $-\pi$ la $\omega = \infty$. Să considerăm situația din fig. 6.3 *b* în care se arată un zero real pe axa reală pozitivă și imaginea sa în semiplanul stîng. Din nou modulele celor doi factori $(j\omega - a)$ și $(j\omega + a)$ sînt egale. Faza factorului din semiplanul stîng $(j\omega + a)$ este α pentru ω pozitiv. (Faza va fi $-\alpha$ pentru ω negativ). Cu scopul de a face ca faza să fie o funcție impară, vom alege pentru faza factorului din semiplanul drept $j\omega - a$, valoarea $-(\pi + \alpha)$ pentru ω pozitiv și $(\pi - \alpha)$ pentru ω negativ. Graficele acestor faze sînt arătate în fig. 6.5. Observăm că în cea de a doua figură există

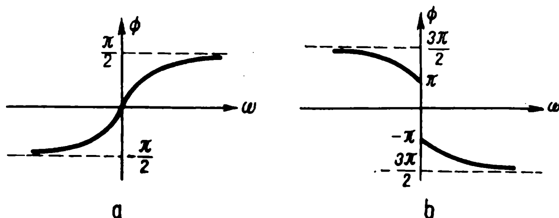


Fig. 6.5. Exemple de funcții de fază:
(*a*) arg $(j\omega + a)$; (*b*) arg $(j\omega - a)$

o discontinuitate de 2π, care este introdusă din dorința de a face ca faza să fie o funcție impară. Această discontinuitate corespunde la trecerea de la o suprafață Riemann la alta.

Dacă considerăm două zerouri în semiplanul drept, putem defini fazele astfel ca această discontinuitate să fie eliminată. Situația devine similară cu aceea a unei perechi de zerouri conjugate din semiplanul din dreapta. Astfel saltul apare în origine numai cînd există un număr impar de zerouri în semiplanul drept.

Funcții trece tot și de fază minimă

Pe baza celor discutate să considerăm acum următoarele două funcții de transfer:

$$F_1(s) = (s-s_0)(s-\bar{s}_0)F(s) = P_l(-s)F(s), \tag{19a}$$

$$F_2(s) = (s+s_0)(s+\bar{s}_0)F(s) = P_l(s)F(s), \tag{19b}$$

unde s_0 și conjugatul său sînt situați în semiplanul drept. Aceste două funcții sînt identice, exceptînd faptul că $F_1(s)$ are o pereche de zerouri in semiplanul drept, în timp ce în $F_2(s)$ acestea sînt înlocuite de imaginile lor din semiplanul stîng. Funcția comună $F(s)$ poate avea factori suplimentari în semiplanul drept. Presupunem că multiplicăm numărătorul și numitorul lui $F_1(s)$ cu factorii din semiplanul stîng $(s+s_0)(s+\bar{s}_0) = P_l(s)$. Rezultatul va fi:

$$F_1(s) = \frac{P_l(s)}{P_l(s)} P_l(-s) F(s) = F_2(s) \frac{P_l(-s)}{P_l(s)} = F_2(s) F_0(s), \tag{20}$$

unde

$$F_0(s) = \frac{P_l(-s)}{P_l(s)} = \frac{(s-s_0)(s-\bar{s}_0)}{(s+s_0)(s+\bar{s}_0)}. \tag{21}$$

Să definim o *funcție trece tot* ca o funcție de transfer avînd toate zerourile în semiplanul drept și toți polii ca imagini ale zerourilor sale în semiplanul stîng. Rezultă prin urmare că o funcție trece tot are modulul egal cu unitatea pentru toate valorile lui $s = j\omega$. (Acesta este motivul pentru care s-a numit astfel). Ultima ecuație arată că $F_0(s)$ este o funcție trece tot. Ea este o funcție trece tot de *ordinul doi*, ordinul referindu-se la numărul de poli. Din (18), faza lui F_0 este:

$$\arg F_0(j\omega) = \arg P_l(-j\omega) - \arg P_l(j\omega) = -2(\alpha_1+\alpha_2). \tag{22}$$

Pentru frecvenţe pozitive faza este negativă. Astfel faza unei funcţii trece tot este negativă pentru toate frecvenţele pozitive. Utilizînd această ecuaţie putem scrie

$$\arg F_1(j\omega) = \arg F_2(j\omega) + \arg F_0(j\omega) < \arg F_2(j\omega), \quad (\omega > 0). \tag{23}$$

Acest rezultat ne arată că pentru toate frecvenţele pozitive faza unei funcţii avînd zerourile în semiplanul drept este mai mică decît aceea a funcţiei obţinută cînd o pereche din aceste zerouri este înlocuită cu imaginea sa din semiplanul stîng.

Acest procedeu de exprimare a unei funcţii de transfer ca produsul altor două poate fi repetat. În fiecare etapă o pereche de zerouri complexe, sau un zero real din semiplanul drept, pot fi înlocuite cu imaginile lor din semiplanul stîng. Se obţine astfel o succesiune de funcţii, din care F_1 şi F_2 sînt primele două. Fiecare factor al succesiunii va avea mai puţine zerouri în semiplanul drept decît cel precedent. Ultimul factor din această succesiune nu va mai avea zerouri în semiplanul drept. Fie el $F_m(s)$. Prin definiţie $F_m(s)$ este o funcţie de fază minimă. Folosind (23) şi rezultatele similare pentru celelalte funcţii, putem scrie

$$\arg F_1(j\omega) < \arg F_2(j\omega) < \cdots < F_m(j\omega), \quad (\omega > 0). \tag{24}$$

Fiecare din funcţiile din acestă succesiune va avea acelaşi modul pe axa j, dar fazele vor fi progresiv mai mari. În mod paradoxal, funcţia de fază minimă va avea faza cea mai mare (algebric, dar nu în mod necesar în modul). Motivul acestei nepotriviri este următorul. Am definit funcţiile de transfer ca rapoarte ale transformatei Laplace a ieşirii la transformata Laplace a intrării. Cînd conceptul de fază minimă a fost introdus pentru prima dată de Bode, el a definit funcţiile de transfer ca rapoarte ale transformatei Laplace a intrării la transformata Laplace a ieşirii. Cu o astfel de definiţie, inegalităţile din (24) vor fi inversate şi funcţia de fază minimă va avea, algebric, faza cea mai mică.

În fiecare etapă din procedeul de mai sus se obţine o funcţie trece tot de ordinul doi, sau de ordinul unu. Produsul unui număr oarecare de funcţii trece tot este din nou o funcţie trece tot. Rezultă că *orice funcţie de transfer de fază neminimă poate fi scrisă ca produsul unei funcţii de fază minimă şi al unei funcţii trece tot*, adică

$$F(s) = F_m(s)F_a(s), \tag{25}$$

unde F_m este o funcţie de fază minimă şi F_a este o funcţie trece tot.

Diferenţa de fază

Un alt rezultat se poate stabili considerînd variaţia fazei unei funcţii trece tot cînd ω creşte de la zero la infinit.

Ecuaţia (22) împreună cu fig. 6.3 *a*, arată că schimbarea fazei $\Delta\Phi$, definită ca faza la plus infinit minus faza la $\omega = 0$, pentru o funcţie trece tot de ordinul doi este -2π. În mod similar, pentru o funcţie trece-tot de ordinul unu putem găsi din fig. 6.5 că această variaţie, neluînd în consideraţie discontinuitatea la $\omega = 0$, este $\Delta\Phi = -\pi$. Este uşor de apreciat că pentru o funcţie trece tot de ordinul n variaţia fazei este $-n\pi$, neluînd în consideraţie nici o discontinuitate la $\omega=0$. Dacă n este par, nu va exista discontinuitate la $\omega=0$; dacă însă n este impar, va exista o discontinuitate de $-\pi$ şi variaţia totală a fazei va deveni $-n\pi-\pi$.

Considerăm acum o funcţie de fază neminimă care are n zerouri în semiplanul drept. Aceasta poate fi exprimată ca produsul unei funcţii de fază minimă şi a unei funcţii trece tot de ordinul n. Diferenţa de fază a funcţiei de fază neminimă cînd ω variază de la zero la plus infinit, va fi diferenţa de fază a funcţiei de fază minimă corespunzătoare, plus diferenţa de fază a funcţiei trece tot. Deoarece aceasta din urmă este o cantitate negativă, rezultă că o funcţie de fază neminimă are o diferenţă de fază mai mică (numai algebric) cînd ω variază de la zero la infinit, decît funcţia de fază minimă corespunzătoare, diferenţa fiind $n\pi$, sau $n\pi+\pi$, unde n este numărul de zerouri din semiplanul drept.

Este de asemenea interesant de a determina diferenţa de fază a unei funcţii de fază minimă cînd ω variază de la zero la plus infinit. Contribuţia fazei fiecărui zero la această diferenţă este $\frac{\pi}{2}$, în timp ce contribuţia fiecărui pol este $-\frac{\pi}{2}$. Prin urmare diferenţa de fază va fi de $\frac{\pi}{2}$ ori numărul de zerouri finite, minus numărul de poli finiţi. Rezultă că dacă funcţia este analitică la $s=\infty$, *funcţia de fază minimă va avea* $|\Delta\Phi|$ *mai mic decît funcţia de fază neminimă corespunzătoare*, deoarece ambele faze sînt nepozitive.

Polinoame Hurwitz

Să considerăm acum un alt aspect al funcţiilor de fază minimă şi neminimă, anume relaţiile între coeficienţii unui polinom şi poziţiile zerourilor sale. Polinoamele fără zerouri în semiplanul drept deschis sînt numite *polinoame Hurwitz*. Dacă în plus aceste polinoame nu au zerouri nici pe axa $j\omega$ se numesc *polinoame strict Hurwitz*. Pe baza acestor definiţii rezultă că polinomul numărătorului unei funcţii de fază minimă este Hurwitz.

O condiţie necesară pentru ca un polinom să fie Hurwitz este ca toţi coeficienţii săi să aibă acelaşi semn. Aceasta însă nu este o condiţie suficientă (verificarea afirmaţiei se poate face uşor luînd un exemplu în care cel puţin unul din coeficienţi să fie de semn contrar cu al celorlalţi). Înseamnă că anumite polinoame cu zerouri în semiplanul drept pot avea toţi coeficienţii pozitivi, sau toţi coeficienţii negativi, fără a fi polinoame Hurwitz. Totuşi, dacă un polinom are toţi coeficienţii de acelaşi semn există o restricţie asupra poziţiei permise a zerourilor sale. Restricţia este dată de următoarea teoremă.

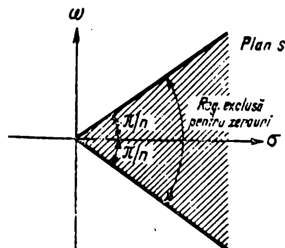


Fig. 6.6. Domeniu interzis pentru zerourile unui polinom fără coeficienţi negativi.

Teorema 2. *Dacă un polinom real $P(s)$ de gradul n are toţi coeficienţii de acelaşi semn, el nu va avea zerouri în sectorul deschis al planului s dat de* $|\arg s|<\pi/n$. Domeniul interzis este arătat [1] în fig. 6.6. În cazul limită, dacă singurii coeficienţi diferiţi de zero ai unui polinom sînt primul şi ultimul (adică $P(s)=s^n+a_0$), atunci va exista un zero pe conturul $|\arg s|=\dfrac{\pi}{n}$. Observăm că reciproca teoremei nu este în general adevărată adică dacă zerourile unui polinom sînt excluse din sectorul $|\arg s|<\dfrac{\pi}{n}$, nu este necesar ca coeficienţii săi să aibă acelaşi semn. Astfel toate polinoamele

$$P_1(s) = s^3+0{,}2s^2+0{,}2s+1,$$

$$P_2(s) = s^3 + s^2-0{,}44s+1{,}8,$$

$$P_3(s) = s^3-0{,}3s^2+0{,}6s+0{,}5$$

au un zero real negativ şi acelaşi factor $s^2-0{,}8\,s+1$ în semiplanul drept, ale cărui zerouri nu sînt situate în sectorul $|\arg s|<\pi/3$; şi totuşi două dintre polinoame au coeficienţi cu semne diferite.

[1]) O demonstraţie utilizînd principiul argumentului este dată în Norman Balabanian, *Network Synthesis*, Prentice-Hall, Englewood Chiffs, NJ, 1958.

6.3. CIRCUITE DE FAZĂ MINIMĂ ŞI FAZĂ NEMINIMĂ

Pînă acum am discutat despre funcţii. Acum, vom considera circuitele ale căror funcţii sînt funcţii de transfer. Poziţiile zerourilor de transmisie ale unui circuit depind atît de tipurile de elemente pe care le conţine circuitul, cît şi de structura circuitului. În ceea ce priveşte restricţiile poziţiei zerourilor de transmisie datorate tipurilor de elemente nu poate fi făcută nici o precizare definitivă. Astfel circuitele *RC* care au numai un singur tip de componente reactive pot avea zerouri de transmisie complexe. reale şi chiar în semiplanul drept. Numai structura este aceea care impune restricţiile.

Circuite în scară

Cea mai importantă restricţie este dată de teorema următoare:

Teorema 3. *Funcţia de transfer a unui circuit în scară reciproc, pasiv. fără cuplaj mutual între braţe este o funcţie de fază minimă.*

Graful unui circuit în scară este arătat în fig. 6.7. Laturile serie şi derivaţie nu trebuie să fie formate dintr-un singur element, ci pot fi circuite uniport arbitrare fără cuplaj între laturi. Prima şi ultima latură in derivaţie pot să existe sau nu. Folosind formule topologice pentru funcţiile de circuit din capitolul 3, impedanţa de transfer de gol poate fi scrisă astfel

$$z_{21}(s) = \frac{\sum {}^2T_{12,0}(y)}{\sum T(y)} = \frac{Y_2 Y_4 \cdots Y_{2m}}{\sum T(y)}. \qquad (26)$$

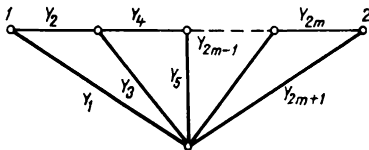


Fig. 6.7. Circuit în scară.

Partea dreaptă rezultă pentru că nu poate să apară nici o latură în derivaţie într-un bi-arbore, care include ambele noduri 1 şi 2 dar exclude nodul 0. Zerourile lui $z_{21}(s)$ vor apare acolo unde numărătorul are zerouri şi acolo unde numitorul are poli care nu se anulează cu polii numărătorului. Fiecare arbore trebuie să conţină nodul 0 şi prin urmare fiecare produs al admitanţelor arborelui trebuie să conţină cel puţin una din admitanţele latu-

rilor derivaţie, Y_1, $Y_3 \cdots Y_{2m+1}$. Prin urmare polii acestor admitanţe trebuie să fie polii numitorului lui z_{21} (s). Unele din laturile serie pot fi deasemeni dintr-un arbore, dar polii admitanţelor Y_2, Y_4 etc., din aceste produse ale admitanţelor arborelui se anulează cu polii numărătorului lui z_{21}. În concluzie, ***zerourile lui z_{21} (s) apar la zerourile admitanţelor laturilor serie Y_2, Y_4 etc. şi la polii admitanţelor laturilor derivaţiei Y_1, Y_3, etc.*** Dar polii şi zerourile admitanţei unui circuit reciproc pasiv nu pot fi situaţi în semiplanul drept. Prin urmare, teorema este demonstrată.

Deşi dezvoltarea s-a făcut pentru funcţia z_{21}, rezultatul este adevărat şi pentru alte funcţii de transfer, aşa cum s-a discutat în problema **P. 48** din capitolul 3.

S-a arătat mai sus că zerourile de transmisie ale unui circuit în scară sînt date de polii admitanţelor laturilor paralel (latura constituie un scurt circuit), sau de zerourile admitanţelor laturilor serie (latura reprezintă o întrerupere). Totuşi, nu este adevărat că un zero de transmisie *trebuie* să apară întotdeauna în asemenea puncte, ci numai că acestea sînt singurele puncte la care el *poate* să apară. Exemple în care un zero al admitanţei laturii serie şi un pol al admitanţei laturii derivaţie nu sînt zerouri de transmisie sînt date în problema 6.

Aceste chestiuni sînt foarte utile în sinteza circuitelor în scară. Nu vom mai insista aici asupra acestor chestiuni, dar subliniem că afirmaţiile făcute se utilizează în sinteza unei funcţii de intrare ca de exemplu impedanţa de gol sau admitanţa de scurt circuit a unui circuit în scară avînd prescrise anumite zerouri de transmisie. De asemenea, dacă se pune pro-

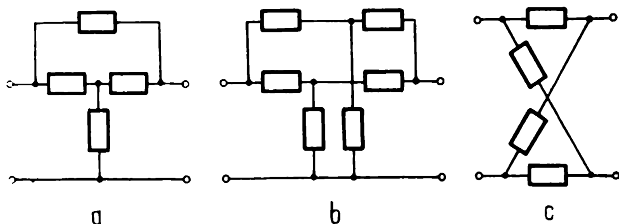


Fig. 6.8. Circuite care ar putea fi de fază neminimă :
(a) T podit; (b) dublu T; (c) structură X.

blema proiectării unui filtru cu zerourile de transmisie în semiplanul drept, vom şti cel puţin că un circuit în scară nu poate realiza asemenea zerouri şi deci că trebuie căutate alte structuri.

Structurile cele mai simple ale căror funcţii de transfer pot fi funcţii de fază neminimă sînt structurile în T podit, dublu T şi X, aşa cum este arătat în fig. 6.8. Dacă ele sînt într-adevăr structuri de fază neminimă sau

nu, depinde de tipul elementelor conţinute şi de valorile lor. Astfel circuitul dublu T din fig. 6.9 va fi de fază minimă pentru anumite valori ale rezistenţelor şi de fază neminimă pentru alte valori, după cum se vede in cele două cazuri particulare din figură.

Circuit de fază neminimă
Zerourile de transmisie la:
$s = 1 \pm j3, -\frac{9}{2}$
pentru $G_1 = 2{,}28$
$G_2 = 0{,}22$
$G_3 = 90$

Circuit de fază minimă
Zerourile de transmisie la:
$s = -1 \pm j3, -\frac{9}{2}$
pentru $G_1 = 4{,}28$
$G_2 = 2{,}22$
$G_3 = 1{,}43$

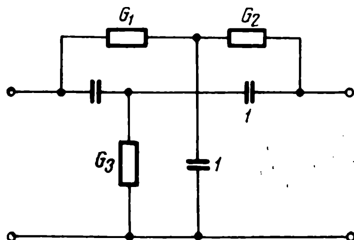


Fig. 6.9. Circuit dublu T care poate fi atît de fază minimă cît şi neminimă.

Circuite de rezistenţă constantă

Am văzut în (25) că o funcţie de transfer de fază neminimă poate fi scrisă ca produs al unei funcţii de fază minimă şi al unei funcţii trece tot. Acest lucru are mare importanţă în sinteză. Dacă $F_m(s)$ şi $F_a(s)$ pot fi realizate separat, interconectarea lor va da circuitul cerut. Fie de exemplu conectarea în cascadă a celor doi diporţi arătaţi în fig. 6.10, fiecare realizînd una din cele două tipuri de funcţii. Din nefericire această interconec-

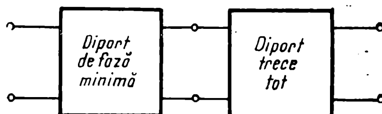


Fig. 6.10. Diporţi conectaţi în cascadă.

tare nu constituie o realizare adecvată, din cauză că folosirea celui de al doilea diport ca sarcină pentru primul îi modifică primului diport funcţia de transfer. Dacă s-ar putea face astfel încît cei doi diporţi să nu se influenţeze unul pe altul, neexplicînd deocamdată cum se realizează aceasta, atunci s-ar putea folosi conectarea în cascadă.

O cale de eliminare a influenţei reciproce este aceea de a face ca cei doi diporţi să fie circuite de ***rezistenţă constantă***, aşa cum se arată în fig. 6.11. Un circuit de rezistenţă constantă este definit ca *un diport a cărui impedanţă de intrare la o poartă este R atunci cînd cealaltă poartă este terminată pe o rezistenţă R*. Astfel oricare ar fi funcţia de transfer a celui

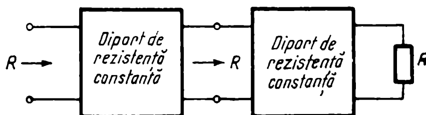


Fig. 6.11. Diporţi de rezistenţă constantă conectaţi în cascadă

de al doilea diport din fig. 6.11, impedanţa de sarcină pe care el o prezintă la poarta de ieşire a primului diport este R. Cele de mai sus se aplică oricărui număr de circuite de rezistenţă constantă conectate în cascadă şi indiferent dacă diporţii sînt sau nu de fază minimă.

Calculînd impedanţa de intrare se găseşte că diporţii din fig. 6.12 închişi pe rezistenţa R sînt de rezistenţă constantă cu condiţia $Z_aZ_b = R^2$, adică atunci cînd impedanţele Z_a şi Z_b sînt inverse în raport cu R^2. Să considerăm acum că fiecare din aceşti diporţi este terminat pe

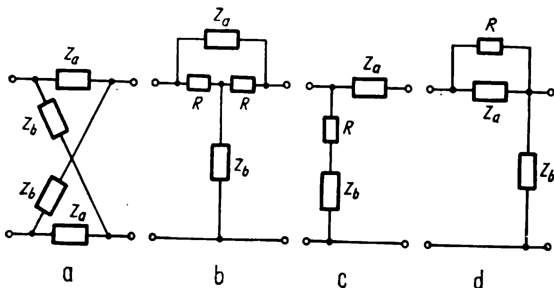


Fig. 6.12. Diporţi de rezistenţă constantă cu $Z_aZ_b = R^2$:
(*a*) structură X; (*b*) T podit; (*c*) structură Γ; (*d*) structură ꓶ.

rezistența R și să calculăm funcția de transfer. Pentru a concretiza, ne vom ocupa de cîștigul de tensiune $G_{21}(s) = V_2/V_1$. Se găsește

$$G_{21}(s) = \frac{R - Z_a}{R + Z_a} = \frac{1 - \dfrac{Z_a}{R}}{1 + \dfrac{Z_a}{R}} \text{ (pentru X)} \tag{27 a}$$

$$G_{21}(s) = \frac{R}{R + Z_a} = \frac{1}{1 + \dfrac{Z_a}{R}} \text{ (pentru T podit și } \Gamma\text{)}. \tag{27 b}$$

Cititorul poate verifica aceste formule.

Circuitele de rezistență constantă reprezintă un mijloc de realizare a unei funcții de transfer de orice ordin. În acest scop, funcția se descompune într-un produs de oricîte funcții de transfer simple, fiecare din ele putîndu-se realiza separat ca un circuit de rezistență constantă, iar diporții rezultați se conectează în cascadă. Vom discuta această problemă mai în detaliu.

Începem cu o funcție trece-tot. Orice funcție trece-tot poate fi scrisă ca produs al următoarelor funcții trece tot de ordinul unu și doi[1]:

$$F_{a1} = \frac{a - s}{a + s} = \frac{1 - \dfrac{s}{a}}{1 + \dfrac{s}{a}}, \tag{28a}$$

$$F_{a2} = \frac{(s^2 - a_1 s + a_0)}{(s^2 + a_1 s + a_0)} = \frac{1 - \dfrac{a_1 s}{s^2 + a_0}}{1 + \dfrac{a_1 s}{s^2 + a_0}}. \tag{28b}$$

Dacă se compară aceste expresii cu (27 a) se observă că ele sînt de aceeași formă. Prin urmare putem identifica pe Z_a direct și apoi vom găsi pe

[1]) Se observă că factorul de la numărător în cazul funcției trece tot de ordinul unu se scrie $a-s$ și nu $s-a$. Aceasta este echivalent cu schimbarea semnului funcției de transfer, sau inversarea polarității tensiunii de ieșire. Procedînd în acest fel se evită discontinuitatea de fază de π radiani.

Z_b din relația $Z_a Z_b = R^2$. Astfel, pentru schema în X de ordinul unu găsim

$$Z_a(s) = \frac{R}{a} s, \qquad Z_b(s) = \frac{1}{\dfrac{s}{aR}}, \tag{29}$$

iar pentru schema în X de ordinul doi

$$Z_a(s) = \frac{a_1 R s}{s^2 + a_0}, \qquad Z_b(s) = \frac{R}{a_1} s + \frac{1}{\dfrac{a_1}{R a_0} s}, \tag{30}$$

Diporții ce realizează funcțiile trece tot de ordinul unu și doi sînt arătați în fig. 6.13.

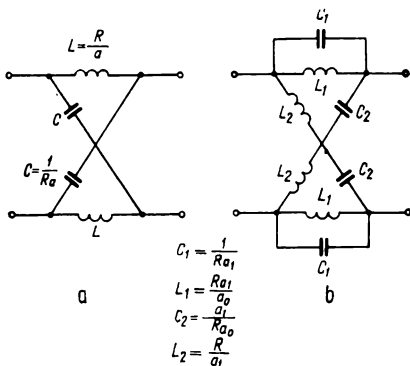


Fig. 6.13. Structură X de rezistență constantă:
(a) de ordinul unu; (b) de ordinul doi.

Structura în X prezintă dezavantajul că nu are o bornă comună de masă pentru cele două porți. Acest dezavantaj nu poate fi evitat în cazul structurii X de ordinul unu, deoarece nu există diport echivalent cu bornă comună care să realizeze un zero pe axa reală pozitivă[1]). Pentru

[1]) Această afirmație este valabilă numai în cazul în care nu sînt admiși diporți cu bornă comună avînd cuplaj magnetic. (N.T.).

structura în X trece tot de ordinul doi poate exista totuși un diport echivalent cu bornă comună la cele două porți. Aceasta va depinde de poziția zerourilor. În problema **P. 10** se discută diporții T podit și dublu T echivalenți unei structuri în X.

Funcțiile trece tot fiind discutate, rămîne problema realizării funcției de fază minimă. Vom ilustra realizarea unei funcții raport de transfer al tensiunii cu ajutorul circuitelor de rezistență constantă, pe un exemplu. Fie rezistența de sarcină $R = 1$ și fie

$$G_{21}(s) = K\frac{s^2 - \frac{s}{2} + 1}{s^2 + 6s + 1} = \frac{s^2 - \frac{s}{2} + 1}{s^2 + \frac{s}{2} + 1} K \frac{\left(s^2 + \frac{s}{2} + 1\right)}{s^2 + 6s + 1},$$

unde K este o constantă de multiplicare pe care o vom lua egală cu 1 în acest exemplu. Funcția dată a fost înmulțită și împărțită prin *factorul suplimentar* $s^2 + s/2 + 1$ pentru a pune rezultatul sub forma produsului funcției trece tot cu o funcție de fază minimă, $G_{21} = F_a F_m$. Funcția trece tot se poate realiza imediat cu ajutorul schemei în X de ordinul doi din fig. 6.13 *b*. Unghiul zeroului de transmisie este 69°. Prin urmare sînt satisfăcute condițiile de echivalență ale structurii în X cu T podit și dublu T discutate în problema **P. 10**.

Pentru a realiza F_m cu ajutorul unuia din circuitele din fig. 6.12 trebuie să scriem această funcție în forma (27 *b*).
Astfel

$$F_m(s) = \frac{s^2 + \frac{s}{2} + 1}{s^2 + 6s + 1} = \frac{1}{1 + \frac{11s/2}{s^2 + s/2 + 1}}$$

Din aceasta rezultă

$$Y_a = \frac{1}{Z_a} = \frac{s^2 + \frac{s}{2} + 1}{\frac{11s}{2}} = \frac{2}{11}s + \frac{1}{11} + \frac{1}{(11/2)s}.$$

Cu $Z_a Z_b = R^2$ și $R=1$, obținem $Z_b = Y_a$. Observăm că latura $Z_a = 1/Y_a$ este formată din conectarea în paralel a unei capacități, a unei inductanțe și a unei rezistențe. Dacă folosim pentru realizare fig. 6.12 *d*, rezistența

R poate fi combinată cu rezistenţa paralel din latura Z_a. Realizarea finală este arătată în fig. 6.14, unde s-a folosit unul din diporţii T podit echivalenţi cu schema în X.

Partea de fază minimă a funcţiei de transfer din exemplul precedent a fost realizată cu ajutorul unui circuit Γ în scară. Deşi aici nu vom face aşa, se poate arăta că orice funcţie de transfer de fază minimă se poate realiza printr-un circuit în scară de rezistenţă constantă (o conectare în cascadă de circuite Γ) alegînd o valoare suficient de mică pentru K[1].

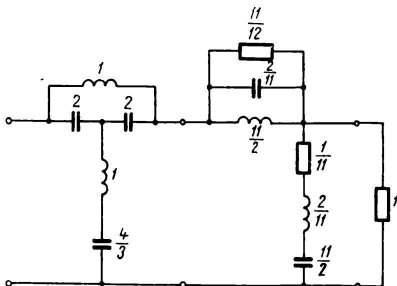


Fig. 6.14. Realizarea lui $G_{21} = \dfrac{s^2 - s/2 + 1}{s^2 + 6s + 1}$.

În anumite cazuri aceasta poate cere introducerea de factori suplimentari, care prin multiplicarea atît a numărătorului cît şi a numitorului lasă funcţia neschimbată, dar permit identificarea cu forma (27 *b*). Astfel o funcţie de transfer $G_{21} = 1/(s^2 + 2s + 2)$ poate fi scrisă ca

$$G_{21} = \frac{s+1}{s^2+2s+2} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{1 + \dfrac{s^2+2s+2}{s+1}} \frac{1}{s+1} = \frac{1}{1 + \left(s + 1 + \dfrac{1}{s+1}\right)} \cdot \frac{1}{1+s} = G_{21a}\, G_{21b}. \tag{31}$$

Factorul suplimentar $(s + 1)$ transformă funcţia de transfer în produsul a două funcţii, fiecare din ele putînd fi pusă sub forma (27 *b*).

Faptul că toate funcţiile trece tot au modulul egal cu unitatea pentru orice valoare a lui $s = j\omega$ este utilizat în proiectarea sistemelor de transmi-

[1] Pentru demonstraţie vezi Norman Balabanian, *Network Sânthesis*, Prantice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1958.

siune, dînd posibilitatea unei proiectări independente a modulului şi a fazei unei funcţii de transfer. Astfel, se proiectează circuitul care realizează modulul cerut, fără a ţine seamă de fază. Se determină apoi funcţia de fază a reţelei proiectate. În final, se conectează în cascadă cu circuitul proiectat un număr de scheme în X trece tot de rezistenţă constantă pentru a corecta faza. Dezvoltarea ulterioară a acestei idei va fi lăsată părţii ce se ocupă de sinteză.

6.4. DETERMINAREA UNEI FUNCŢII DE CIRCUIT DIN MODULUL SĂU

Paragrafele precedente s-au ocupat în mare parte de determinarea proprietăţilor unei funcţii de circuit. Fiind dată o funcţie raţională este posibil de a determina printre alte elemente partea sa reală şi imaginară. modulul şi faza sa. Vom considera acum operaţia inversă anume aceea de determinare a unei funcţii de circuit cînd se cunosc numai una din părţile sale reală sau imaginară, sau numai modulul, sau numai faza.

Începem prin a considera pătratul modulului funcţiei. (Este mai simplu de a discuta despre pătratul modului decît despre modulul însuşi). Condiţia necesară ca o funcţie raţională $G(j\omega)$ să fie pătratul modulului unei funcţii de circuit este simplă : $G(j\omega)$ trebuie să fie o funcţie pară de ω, iar gradul numărătorului nu trebuie să depăşească gradul numitorului cu mai mult de doi. Aceasta din cauză că funcţia de circuit nu poate avea mai mult decît un pol simplu la infinit. Suplimentar, orice pol finit al lui $G(s)$ pe axa $j\omega$ trebuie să fie dublu, deoarece polii unei funcţii de circuit pe axa $j\omega$ trebuie să fie simpli.

Fiind dată o astfel de funcţie $G(j\omega)$ se înlocuieşte $j\omega$ cu s şi se identifică polii şi zerourile funcţiei de circuit $F(s)$ din aceia ai lui $G(s)$. Polii şi zerourile lui $G(s)$ prezintă simetrie cuadrantală. Deoarece $F(s)$ trebuie să fie analitică în semiplanul drept, observăm din (14 *a*) că toţi polii din semiplanul stîng ai lui $G(s)$ trebuie atribuiţi lui $F(s)$. [Polii din semiplanul drept ai lui $G(s)$ vor fi imaginile oglindă ale acestora şi vor deveni în mod automat poli ai lui $F(-s)$]. Orice pol al lui $G(s)$ pe axa $j\omega$ va fi dublu şi va fi atribuit ca pol simplu lui $F(s)$. În privinţa zerourilor nu există o regulă unică. În general nu există restricţii privind poziţia zerourilor unei funcţii de circuit, în afara de cazul funcţiilor de intrare pentru care zerourile trebuie să se afle în semiplanul stîng. Pentru funcţiile de transfer nu este nevoie să atribuim lui $F(s)$ toate zerourile din semiplanul stîng al lui $G(s)$. Astfel zerourile lui $F(s)$ nu sînt unic determinate din funcţia $G(s)$ dată, în afară de cazul în care se specifică că funcţia este de fază minimă. Pentru funcţia de fază minimă atît zerourile lui $F(s)$ cît şi polii trebuie să fie situaţi în semiplanul stîng.

Să considerăm acum cîteva exemple care ilustrează acest procedeu şi prezintă interes practic. Cerinţele pentru cele mai uzuale filtre electrice implică funcţii de transfer avînd modulul pe axa $j\omega$ ideal adică constant într-un interval dat de frecvenţe denumit *bandă de trecere* şi zero în restul axei $j\omega$, interval denumit *bandă de oprire* (blocare). Dar nu este posibil ca modulul unei funcţii raţionale pe axa $j\omega$ să se comporte în acest mod ideal. Totuşi, este posibil de a găsi o funcţie de transfer a cărui modul pe axa $j\omega$ să aproximeze modulul cerut într-un anumit mod. Considerăm funcţia unui filtru trece jos ideal arătată în fig. 6.15 *a*.

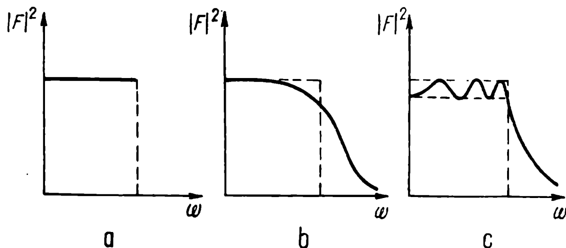


Fig. 6.15. Aproximări ale filtrului trece jos :
(*a*) ideală ; (*b*) Butterworth ; (*c*) Cebîşev

În fig. 6.15. *b* şi 6.15. *c* sînt arătate două moduri de aproximare a acestei funcţii ideale. Primul dintre ele se numeşte *aproximare maxim plat*, sau *aproximare Butterworth*, în timp ce cel de al doilea este numit *aproximare cu ondulaţii egale*, sau *aproximare Cebîşev*. Aproximarea de tip maxim plat este monotonă atît în banda de trecere cît şi în banda de oprire, erorarea maximă apărînd la frecvenţa de tăiere. Aproximarea Cebîşev este oscilatorie în banda de trecere, vîrfurile ondulaţiilor fiind egale. În acest fel, eroarea este distribuită mai uniform în banda de trecere.

Formele analitice ale acestor funcţii, pînă la un factor de scală, sînt date de

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2n}}, \quad \text{(maxim plat)} \tag{32}$$

şi

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\delta^2 T_n^2(\omega)}, \quad \text{(ondulaţii egale)}, \tag{33}$$

unde δ este un număr mic care controlează amplitudinea ondulației. $\omega = 1$ corespunde la capătul benzii de trecere și $T_n(\omega)$ este polinomul[1] Cebîșev definit de

$$T_n(s/j) = \cosh(n \cosh^{-1} s/j), \tag{34}$$

care pentru $s = j\omega$ se reduce la

$$T_n(\omega) = \cos(n \cos^{-1} \omega) \text{ pentru } |\omega| \leqslant 1. \tag{35}$$

Problema care se pune este de a găsi funcția de transfer $F(s)$ cînd este cunoscut modulul la pătrat pe axa $j\omega$.

Răspunsul maxim plat

Să considerăm răspunsul Butterworth. În concordanță cu cele discutate anterior, se înlocuiesc mai întîi ω^2 cu $-s^2$ în (32). Rezultă

$$G(s) = F(s)\,F(-s) = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}}. \tag{36}$$

Această funcție nu are zerouri finite, deci se va factoriza numai numitorul. În acest caz aceasta este o chestiune relativ simplă. Zerourile numitorului se găsesc scriind

$$s^{2n} = \varepsilon^{j(2k-1+n)\pi} \tag{37a}$$

care este pur și simplu

$$s^{2n} = \pm 1, \tag{37b}$$

unde semnul minus apare pentru n par. Luînd rădăcina $2n$ în (37 a) găsim că polii lui $G(s)$ sînt

$$s_k = \varepsilon^{j(2k-1+n)\pi/2n};\ k = 1,2,\ldots,2n. \tag{38}$$

[1]) Folosirea literei T pentru polinoamele Cebîșev este legată de trecut. Unele din lucrările lui Cebîșev au fost prima dată publicate în limba franceză, conducînd la folosirea ortografiei franceze „Tschebyscheff”, sau varianta sa „Tchebycheff”. Această ortografie a numelui nu se mai folosește în prezent în literatura americană.

Astfel, există $2n$ poli, fiecare din ei avînd modulul egal cu unitatea. Polii sînt uniform distribuiţi pe cercul unitate, aşa cum este arătat în fig. 6.16 pentru cazul $n=4$. Observăm că părţile imaginare ale polilor sînt situate în banda de trecere în intervalul $\omega^2 < 1$.

Pentru a forma pe $F(s)$ luăm cei n poli din semiplanul stîng ai lui $G(s)$. Aceştia sînt daţi de valorile lui k de la 1 la n. Pentru $n=4$ rezultă

$$s_1 = \varepsilon^{j(5\pi/8)}, \quad s_3 = \varepsilon^{j(9\pi/8)},$$

$$s_2 = \varepsilon^{j(7\pi/8)}, \quad s_4 = \varepsilon^{j(11\pi/8)}.$$

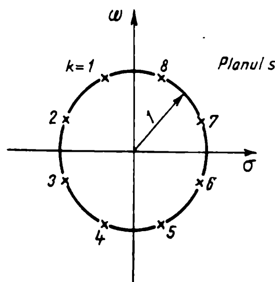


Fig. 6.16. Distribuţia polilor pătratului modulului funcţiei de transfer Butterworth de gradul $n=4$.

În sfîrşit, $F(s)$ pentru $n = 4$ este

$$F(s) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)}$$
$$= \frac{1}{1 + 2{,}613s + 3{,}414s^2 + 2{,}613s^3 + s^4}. \tag{39}$$

Coeficienţii polinoamelor Butterworth pînă la gradul 10 şi factorii acestor polinoame sînt daţi în tab. 6.1, respectiv tab. 6.2.

Denumirea „maxim plat" a apărut ca rezultat al următoarei consideraţii. Scriem seria Taylor a funcţiei (32) pentru intervalul $\omega^2<1$. Eroarea între funcţia modul dorită în acest interval, anume 1, şi seria Taylor va fi

$$1-|F(j\omega)|^2 = \omega^{2n} - \omega^{4n} + \cdots. \tag{40}$$

Deoarece eroarea începe cu puterea ω^{2n} rezultă că primele $n-1$ derivate în raport cu ω^2 sînt zero la $\omega = 0$. De aici rezultă denumirea de maxim plat.

Tabelul 6.1.

Coeficienții polinoamelor Butterworth: $b_0 + b_1 s + \cdots b_n s^n$

Nr. n	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9
2	1,4142								
3	2,0000	2,0000							
4	2,6131	3,4142	2,6131						
5	3,2361	5.2361	5,2361	3,2361					
6	3,8637	7,4641	9,1416	7,4641	3,8637				
7	4,4940	10,0978	14,5920	14,5920	10,0978	4,4940			
8	5,1528	13,1371	21,8462	25,6884	21,8462	13,1371	5,1258		
9	5,7688	16,5817	31,1634	41,9864	41,9864	31,1634	16,5817	5,7588	
10	6,3925	20,4317	42,8021	64,8824	74,2334	64,8824	42,8021	20,4317	6,3925

Notă: b_0 și b_n sînt întotdeauna egali cu unitatea.

Tabelul 6.2.

Factorii polinoamelor Butterworth

Nr. n	Factori
1	$s + 1$
2	$s^2 + 1,4142s + 1$
3	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0,7654s + 1)(s^2 + 1,8478s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0,6180s + 1)(s^2 + 1,6180s + 1)$
6	$(s^2 + 0,5176s + 1)(s^2 + 1,4142s + 1)(s^2 + 1,9319s + 1)$
7	$(s + 1)(s^2 + 0,4450s + 1)(s^2 + 1,2470s + 1)(s^2 + 1,8019s + 1)$
8	$(s^2 + 0,3002s + 1)(s^2 + 1,111s + 1)(s^2 + 1,1663s + 1)(s^2 + 1,9616s + 1)$
9	$(s + 1)(s^2 + 0,3473s + 1)(s^2 + s + 1)(s^2 + 1,5321s + 1)(s^2 + 1,8794s + 1)$
10	$(s^2 + 0,3129s + 1)(s^2 + 0,008s + 1)(s^2\ 1,1142s + 1)(s^2 + 1,7820s + 1)(s^2 + 1,9754s + 1)$

Funcția Butterworth ilustrată este deosebit de simplă, deoarece toate zerourile sale sînt la infinit. Este însă posibil de a introduce o funcție de tip maxim plat modificată, care să conțină unele zerouri finite. Observăm că funcțiile modul la pătrat (32) și (33) sînt de forma

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+f(\omega^2)}, \tag{41}$$

unde $f(\omega^2)$ este o funcție pară de ω; variabila este exprimată în ω^2 pentru a accentua acest fapt. În cazul funcției Butterworth $f(\omega^2)$ este ω^2 ridicat la o putere; în cazul ondulațiilor egale $f(\omega^2)$ este un polinom.

Acum presupunem că $f(\omega^2)$ este o funcție rațională

$$f(\omega^2) = \frac{\omega^{2n}}{P(\omega^2)}, \tag{42}$$

unde

$$P(\omega^2) = 1 + a_2\omega^2 + a_4\omega^4 + \cdots + a_{2k}\omega^{2k}$$

este un polinom al cărui grad $2k$ în ω este mai mic decît $2n$. Atunci $|F(j\omega)|^2$ și diferența dintre funcția dorită în banda de trecere, anume 1, și această funcție devin

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{P(\omega^2)}{P(\omega^2) + \omega^{2n}}, \tag{43}$$

și respectiv

$$\begin{aligned} 1 - |F(j\omega)^2| &= \frac{\omega^{2n}}{P(\omega^2) + \omega^{2n}} \\ &= \omega^{2n}[1 - a_2\omega^2 + (a_4 + a_2{}^2)\omega^4 - \cdots]. \end{aligned} \tag{44}$$

În ultima expresie s-a obținut o serie de puteri. Din nou seria începe cu puterea ω^{2n} și în felul acesta primele $n-1$ derivate în raport cu ω^2 ale erorii sînt zero la $\omega = 0$. Funcția modul la pătrat din (43) este de asemenea de tip maxim plat. Spre deosebire de funcția Butterworth ea are însă unele zerouri finite.

Ca exemplu considerăm următoarea funcție modul la pătrat

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{1{,}838 - 1{,}346\omega^2 + 0{,}246\omega^4}{1{,}838 - 1{,}346\omega^2 + 0{,}246\omega^4 + \omega^8} = \frac{(1{,}355 - 0{,}496\omega^2)^2}{(1{,}355 - 0{,}496\omega^2)^2 + \omega^8}.$$

Observăm că coeficienţii corespunzători din numărător şi numitor sînt egali pînă la cea mai mare putere a numărătorului, aşa cum cere (43). Punînd $\omega^2 = -s^2$ se obţine

$$F(s)F(-s) = \frac{(1{,}355 + 0{,}496s^2)^2}{(1{,}355 + 0{,}496s^2)^2 + s^8}$$

$$= \frac{(1{,}355 + 0{,}496s^2)}{(s^2 + 1{,}9s + 1)(s^2 + 1{,}05s + 1{,}355)}$$

$$\times \frac{(1{,}355 + 0{,}496s^2)}{(s^2 - 1{,}9s + 1)(s^2 - 1{,}05s + 1{,}355)}$$

sau

$$F(s) = \frac{0{,}496\,(s^2 + 2{,}73)}{(s^2 + 1{,}9s + 1)(s^2 + 1{,}05s + 1{,}355)}.$$

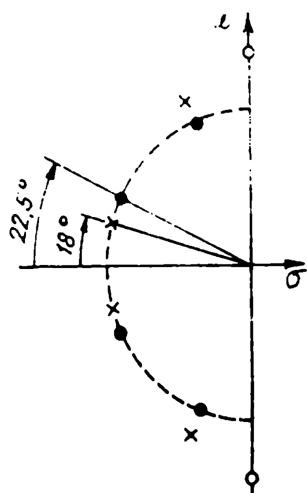


Fig. 6.17. Distribuţia polilor pentru exemplu. Punctele corespund polilor răspunsului Butterworth.

Observăm că zerourile duble ale lui $F(s)$. $F(-s)$ sînt repartizate în mod egal lui $F(s)$ şi lui $F(-s)$. Poziţiile polilor şi zerourilor lui $F(s)$ sînt arătate în fig. 6.17 şi sînt comparate cu polii funcţiei Butterworth de gradul 4.

Răspunsul Cebîşev

În continuare examinăm răspunsul Cebîşev din (33). În prima etapă inlocuim pe $j\omega$ prin s. Apoi pentru a găsi polii facem numitorul egal cu zero. Utilizînd (34) rezultă

$$T_n\left(\frac{s}{j}\right) = \cosh\left(n \cosh^{-1}\frac{s}{j}\right) = \frac{\pm j}{\delta}. \tag{45}$$

Pentru rezolvarea acestei ecuaţii definim o nouă variabilă $w = x + jy$ şi scriem

$$s = j \cosh w = j \cosh (x + jy) \tag{46a}$$

şi in consecinţă

$$T_n\left(\frac{s}{j}\right) = \cosh nw = \cosh n(x + jy) = \frac{\pm j}{\delta}; \tag{46b}$$

Dacă dezvoltăm cosh nw din ultima ecuaţie şi egalăm părţile reale şi respectiv, părţile imaginare din ambii membrii ai ecuaţiei, găsim valorile lui x şi y ce satisfac ecuaţia. Substituind aceste valori în (46 a) găsim valorile corespunzătoare ale lui s. Acestea sînt poziţiile polilor. Dacă le notăm prin $s_k = \sigma_k + j\omega_k$, rezultatul operaţiilor indicate va fi

$$\sigma_k = \sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\delta}\right)\sin\frac{2k-1}{\pi}\,\frac{\pi}{2}, \tag{47a}$$

$$\omega_k = \cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\delta}\right)\cos\frac{2k-1}{n}\,\frac{\pi}{2}. \tag{47b}$$

Cititorul poate verifica aceste ecuaţii.

În scopul obţinerii unor interpretări pentru aceste expresii aparent complicate, le împărţim pe fiecare din ele prin funcţia hiperbolică, ridicăm la pătrat ambele părţi şi adunăm ; rezultatul va fi

$$\frac{\sigma_k^2}{\sinh^2\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\delta}\right)} + \frac{\omega_k^2}{\cosh^2\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\delta}\right)} = 1. \tag{48}$$

Aceasta este ecuaţia unei elipse în planul s. Axa mare a elipsei va fi dealungul axei $j\omega$, deoarece cosinusul hiperbolic de variabilă reală este

totdeauna mai mare decît sinusul hiperbolic. Pozițiile polilor pentru $n=4$ sînt arătate în fig. 6.18.

În sfîrșit, polii din semiplanul stîng ai lui $G(s)$ sînt repartizați lui $F(s)$ și operațiunea este terminată

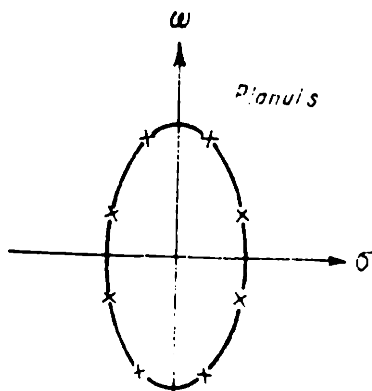


Fig. 6.18. Distribuția polilor pătratului modulului funcției de transfer Cebîșev de gradul $n=4$.

Pentru un caz tipic, dacă ondulația permisă dată este $\delta = 0{,}1$ și gradul este $n = 4$, pozițiile polilor se găsesc din (47) și funcția de transfer ce se obține este

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + 0{,}644s + 1{,}534)(s^2 + 1{,}519s + 0{,}823)}$$

$$= \frac{1}{s^4 + 2{,}16s^3 + 3{,}31s^2 + 2{,}86s + 1{,}26}.$$

6.5. CALCULUL UNEI FUNCȚII DE CIRCUIT DINTR-O FAZĂ DATĂ

În ultimul paragraf am găsit că pornind de la o funcție rațională pară, care satisface condițiile necesare pentru realizabilitate, sub forma pătratului modulului unei funcții de circuit — putem determina o funcție rațională $F(s)$ (uneori mai mult decît una) astfel ca pătratul modulului lui $F(s)$ pe axa $j\omega$ să fie egal cu funcția dată. Funcția devine unică cînd se cere să fie de fază minimă.

În prezentul paragraf vom discuta posibilitatea unui procedeu similar pentru determinare unei funcţii raţionale din funcţia fază. Repetăm aici expresia fazei unei funcţii de transfer dată în (14 *b*);

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{j2} \ln \frac{F(j\omega)}{F(-j\omega)}, \tag{49 a}$$

$$\frac{F(j\omega)}{F(-j\omega)} = \varepsilon^{j2\Phi(\omega)}. \tag{49 b}$$

În cele ce urmează vom presupune că funcţia dată este tangenta lui $\Phi(\omega)$ pe care o vom denumi *funcţia tangentă*. În plus, deoarece vom utiliza destul de des raportul din membrul stîng al relaţiei (49 *b*), să-l notăm cu un simbol. Fie

$$A(s) = \frac{F(s)}{F(-s)}. \tag{50}$$

În continuare vom numi această funcţie, funcţia A.

Cu aceste precizări, observăm că pentru tan $\Phi(\omega)$ putem scrie

$$j\tan\Phi(\omega) = \frac{\varepsilon^{j\Phi} - \varepsilon^{j\Phi}}{\varepsilon^{j\Phi} + \varepsilon^{-j\Phi}} = \frac{\varepsilon^{j2\Phi} - 1}{\varepsilon^{j2\Phi} + 1} = \frac{A(j\omega) - 1}{A(j\omega) + 1}. \tag{51}$$

Ultimul membru rezultă din (49) şi (50). Explicitînd pe A din (51) rezultă

$$A(j\omega) = \frac{1 + j\tan\Phi(\omega)}{1 - j\tan\Phi(\omega)}. \tag{52}$$

Să stabilim condiţiile pe care funcţia tangentă trebuie să le satisfacă pentru a fi o funcţie realizabilă. Notăm că

$$\tan\Phi(\omega) = \frac{X(\omega)}{R(\omega)}, \tag{53}$$

unde R şi X sînt părţile reală şi imaginară ale unei funcţii de circuit. Cunoaştem că acestea sînt respectiv funcţii pare şi impare de ω. Prin urmare tan $\Phi(\omega)$ trebuie în mod necesar să fie o funcţie raţională impară. Nu există alte restricţii pe care să le impunem acestei funcţii, în afară de cazul cînd specificăm, că funcţia $F(s)$ dorită trebuie să fie o funcţie de intrare sau de transfer.

Dacă o funcţie raţională impară este prescrisă ca funcţie tangentă, prima etapă va fi formarea lui $A(j\omega)$ în conformitate cu (52). Dacă acum înlocuim pe $j\omega$ prin s obţinem raportul lui $F(s)$ la $F(-s)$, în conformitate

cu (50). Intrebarea este: cum determinăm $F(s)$ din acest raport? Aici, situația nu mai este atît de simplă cum a fost în cazul funcției modul.

Pentru a determina pe $F(s)$ îl scriem ca raportul a două polinoame

$$F(s) = \frac{P_1(s)}{P_2(s)}. \tag{54}$$

Atunci $A(s)$ poate fi scris

$$A(s) = \frac{F(s)}{F(-s)} = \frac{P_1(s)}{P_1(-s)} \frac{P_2(-s)}{P_2(s)}. \tag{55}$$

Problema poate fi pusă acum din nou ca o problemă de determinarea lui $P_1(s)$ și $P_2(s)$ cînd se cunoaște funcția din partea dreaptă a ultimei ecuații. Observăm că $A(s)$ va avea întotdeauna zerouri în semiplanul drept și va avea în mod obișnuit și poli în acest semiplan. $A(s)$ diferă de o funcție trece tot prin aceea că poate avea atît poli, cît și zerouri în semiplanul drept. Pe de altă parte, ea este asemănătoare cu o funcție trece tot în care fiecare zero este negativul unui pol. De fapt, ea poate fi exprimată ca raportul a două funcții trece tot, dar acest lucru nu este util pentru scopul nostru. Ea nu poate avea nici zerouri nici poli pe axa $j\omega$, deoarece dacă $P_1(s)$ are o pereche de astfel de zerouri, la fel va avea și $P_1(-s)$, astfel încît ele se vor simplifica în raport; raționăm în mod analog dacă $P_2(s)$ are zerouri pe axa j.

Să considerăm acum repartizarea polilor din $A(s)$ lui $P_1(-s)$, sau $P_2(s)$. Orice pol al lui $A(s)$ din semiplanul drept trebuie să aparțină lui $P_1(-s)$, deoarece $P_2(s)$ nu poate avea zerouri în semiplanul drept. Pe de altă parte polii din semiplanul stîng nu pot fi repartizați în mod unic lui $P_2(s)$, sau lui $P_1(-s)$. Dacă repartizăm unul din polii din semiplanul stîng lui $P_1(-s)$, atunci $P_1(s)$ va avea factorul corespunzător în semiplanul drept, indicînd că funcția de transfer este de fază neminimă. Firește, distribuția polilor și zerourilor va fi dictată de gradele admise pentru numărătorul și numitorul lui $F(s)$.

Odată ce $P_2(s)$ și $P_1(-s)$ au fost stabilite din numitorul lui $A(s)$, nu mai este necesar de a examina numărătorul, deoarece acum funcția de transfer va fi cunoscută; este necesar numai a înlocui $-s$ prin s în $P_1(-s)$ pentru a obține $P_1(s)$.

Să ilustrăm acest procedeu cu ajutorul unui exemplu. Presupunem că se dă

$$\tan\Phi(\omega) = \frac{\omega^3 - 4\omega}{2 - 3\omega^2}. \tag{56}$$

Prima etapă este substituția lui (56), în (52) pentru a obține $A(j\omega)$. Rezultatul este

$$A(j\omega) = \frac{2 - 3\omega^2 + j\omega^3 - j4\omega}{2 - 3\omega^2 - j\omega^3 + j4\omega}.$$

Dacă înlocuim $j\omega$ cu s, obținem

$$A(s) = \frac{-s^3 + 3s^2 - 4s + 2}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2} = \frac{(1-s)(s^2 - 2s + 2)}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)}.$$

Găsim că toți polii lui $A(s)$ sînt în semiplanul stîng, în timp ce zerourile sînt în semiplanul drept. Deci nu există un mod unic de repartizare a polilor și zerourilor lui $F(s)$. Oricare din următoarele funcții vor fi convenabile

$$F_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)}, \qquad (57\,a)$$

$$F_2(s) = \frac{1-s}{s^2 + 2s + 2}, \qquad (57b)$$

$$F_3(s) = \frac{(s^2 - 2s + 1)}{s+1}. \qquad (57\,c)$$

Observăm că ultimele două au zerouri în semiplanul drept. Fiecare din aceste funcții vor avea aceeași fază pentru toate valorile lui ω, dar modulele lor vor fi diferite. Dacă se cere ca $F(s)$ să fie de fază minimă, soluția va fi unică și anume prima funcție din (57)[1].

În calculele de pînă acum am presupus că $\Phi(\omega)$ este specificat ca funcție continuă de ω. Dacă, însă, o funcție $F(s)$ are poli sau zerouri pe axa $j\omega$, funcția corespunzătoare de fază $\Phi(\omega)$ va avea discontinuități de $\pm\pi$ la fiecare pol și zero. În astfel de cazuri considerăm discontinuitățile separat, aplicînd procedeul de mai sus „părții continue" a funcției, adică scriem

$$\Phi(\omega) = \Phi_c(\omega) + \sum_j \pm \pi u(\omega - \omega_j). \qquad (58)$$

unde $\Phi_c(\omega)$ este o funcție continuă. Indicele j se extinde asupra tuturor zerourilor și polilor de pe axa $j\omega$, iar semnul minus se aplică polilor.

[1]) Chiar și această unicitate este pînă la o constantă de multiplicare. Faza este în mod evident independentă de o constantă de cîștig real pozitivă.

Acum trebuie să identificăm discontinuitățile. Pentru aceasta examinăm un factor tipic din $F(s)$ (factor pol sau zero):

$$(s - j\omega_0)|_{s=j\omega} = j(\omega - \omega_0).$$

Evident acest factor variază de la $-j$ la $+j$ cînd ω crește trecînd prin ω_0. Așadar, cînd se trece printr-un zero pe axa $j\omega$, în direcția creșterii lui ω, faza lui $F(s)$ crește brusc cu π; cînd trecem printr-un pol, $\Phi(\omega)$ descrește cu π. Astfel putem reconstitui toți polii și zerourile lui $F(s)$ observînd discontinuitățile în funcția dată.

6.6. CALCULUL UNEI FUNCȚII DE CIRCUIT DIN PARTEA REALĂ DATĂ

În ultimele două paragrafe am studiat posibilitatea determinării unei funcții de circuit dintr-o funcție rațională de ω dată, care era fie modulul funcției, fie tangenta unghiului său pe axa $j\omega$. Am găsit că în cele mai multe cazuri, nu este posibil a obține o soluție unică, în afară de cazul în care funcția este de fază minimă. Cu toate acestea este posibil să se determine un număr de funcții care vor satisface cerințele. În cazul unui modul dat putem găsi un număr de funcții de transfer care au modulul pe axa $j\omega$ egal cu cel dat, dar diferă una de alta prin fazele lor. Analog, fiind dată o funcție tangentă putem găsi un număr de funcții de transfer care au aceeași fază pe $j\omega$, dar diferă prin modul. În acest paragraf vom discuta anumite procedee de calcul care vor permite calcularea funcției de circuit din partea sa reală pe axa $j\omega$.

Din nou trebuie soluționată problema unicității. Cunoscînd partea reală pe axa j a unei funcții de circuit este aceasta din urmă, determinată în mod unic? Putem imediat să concepem mai multe circuite diferite ale căror funcții de circuit să aibă aceeași parte reală, astfel că răspunsul la întrebarea anterioară este negativ. Ca exemplu presupunem că funcția cerută este o funcție admitanță de intrare. Considerăm circuitul arătat în fig. 6.19 *a*. În partea (*b*) a figurii este conectată o latură suplimentară la bornele de intrare. Admitanța celui de al doilea circuit este

$$Y_1(s) = Y(s) + \frac{sC}{s^2 LC + 1}.$$

Partea sa reală pe axa j este

$$\mathrm{Re}[Y_1(j\omega)] = \mathrm{Re}[Y(j\omega)] + \mathrm{Re}\left[\frac{j\omega C}{1-\omega^2 LC}\right] = \mathrm{Re}[Y(j\omega)];$$

adică părţile reale ale celor două admitanţe sînt aceleaşi, deşi admitanţele sînt diferite. Funcţia $Y_1(s)$ diferă de $Y(s)$ deoarece are o pereche de poli pe axa $j\omega$. Dacă se dă partea reală, nu putem determina alegerea între $Y(s)$ sau $Y_1(s)$. De fapt un număr infinit de funcţii, care diferă de $Y(s)$ prin poli adiţionali pe axa $j\omega$, vor avea aceeaşi parte reală pe axa $j\omega$. Atunci, ceea ce putem spera să obţinem dintr-o parte reală dată, este funcţia particulară, care nu are nici un pol pe axa $j\omega$.[1]

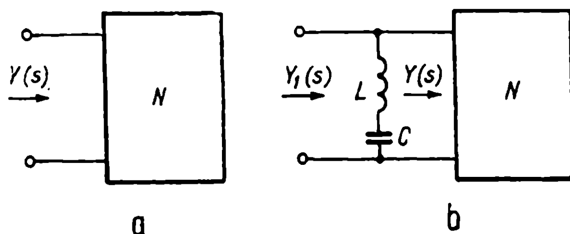


Fig. 6.19. Două circuite a căror admitanţe au aceeaşi parte reală.

Metoda Bode

Să ne reîntoarcem la paragraful 6.1 şi să considerăm partea reală a funcţiei începînd cu (8) şi sfîrşind cu (13). Dacă o funcţie de ω raţională, pară, fără poli la frecvenţe reale finite sau la infinit, este partea reală a unei funcţii de circuit, înlocuim pe $j\omega$ cu s şi obţinem partea pară a lui $F(s)$. Astfel

$$R(\omega) \underset{j\omega = s}{\rightarrow} \text{Par } F(s) = \tfrac{1}{2}\,[F(s) + F(-s)]. \qquad (59)$$

Problema care ne interesează este de a găsi $F(s)$ din partea sa pară. Conform celor discutate în paragraful 6.1, polii lui Par $F(s)$ au simetrie cuadrantală. Polii lui Par $F(s)$ din semiplanul stîng aparţin lui $F(s)$; polii din semiplanul drept aparţin lui $F(-s)$. Dacă $F(s)$ are o valoare diferită de zero la infinit, atunci $F(-s)$ va avea aceeaşi valoare. Este evident acum cum se va găsi $F(s)$ din Par $F(s)$: se dezvoltă Par $F(s)$ în fracţii parţiale şi se grupează toţi termenii cu polii în semiplanul stîng; dacă există un termen constant în dezvoltare, se adaugă jumătate din el grupului; în final se multiplică prin 2.

---

[1] O astfel de funcţie este o *funcţie de susceptanţă minimă* dacă este vorba despre o admitanţă, sau o *funcţie de reactanţă minimă* dacă este vorba despre o impedanţă. Această condiţie impusă funcţiilor de intrare este analogă condiţiei de fază minimă la funcţiile de transfer.

Pentru exemplificare fie

$$R(\omega) = \frac{1}{1+\omega^6}$$

partea reală dată. Prima etapă este înlocuirea lui ω^2 cu $-s^2$, ceea ce conduce la

$$\begin{aligned}\text{Par}\,F(s) &= \frac{1}{1-s^6} = \frac{1}{(s+1)\,(s^2+s+1)\,(1-s)\,(s^2-s+1)} \\ &= \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{s+1} + \frac{s+2}{s^2+s+1}\right) + \left(\frac{1}{1-s} + \frac{2-s}{s^2-s+1}\right)\right].\end{aligned} \qquad (60)$$

Am discutat deja poziţiile polilor acestei funcţii particulare în legătură cu răspunsul Butterworth. Numitorul poate fi factorizat, aşa cum s-a arătat, obţinînd astfel dezvoltarea în fracţii parţiale. $F(s)$ se identifică uşor din polii situaţi în semiplanul stîng. Se obţine

$$F(s) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{s+2}{s^2+s+1}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{2s^2+4s+3}{s^3+2s^2+2s+1}\,. \qquad (61)$$

Procedeul descris aici a fost propus pentru prima dată de Bode, astfel încît îl vom denumi *metoda Bode.*

Metoda Gewertz

O altă abordare a fost propusă pentru prima dată de Gewertz. Pentru a schiţa această metodă, să scriem $F(s)$ ca raportul a două polinoame. Astfel

$$F(s) = \frac{a_0+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ms^m}{b_0+b_1s+b_2s^2+\cdots+b_ns^n} = \frac{m_1(s)+n_1(s)}{m_2(s)+n_2(s)} \qquad (62)$$

unde m-urile se referă la partea pară a numărătorului şi numitorului, iar n-urile la părţile impare. Partea pară a lui $F(s)$ se poate scrie ca în (11*a*) Astfel

$$\text{Par}\,F(s) = \frac{m_1m_2-n_1n_2}{m_2{}^2-n^2{}_2} = \frac{A_0+A_1s^2+A_2s^4+\cdots+A_ms^{2m}}{B_0+B_1s^2+B_2s^4+\cdots+B_ns^{2n}}\,, \qquad (63)$$

în care partea din dreapta s-a scris sub formă dezvoltată. Cînd o funcţie parte reală este specificată ca funcţie raţională pară în ω, membrul drept al lui (63) se obţine înlocuind ω^2 prin $-s^2$. Vom opera mai întîi asupra numitorului. Deoarece polii lui Par $F(s)$ sînt aceia ai lui $F(s)$ şi $F(-s)$, cei care aparţin lui $F(s)$ vor fi situaţi în semiplanul stîng. Deci, cînd factorizăm numitorul lui (63), atribuim lui $F(s)$ toţi factorii din semiplanul stîng. În acest mod, numitorul lui $F(s)$ din (62) devine cunoscut.

Să ne întoarcem la numărător. Presupunem că scriem funcţia raţională $F(s)$ ca în (62), cu coeficienţi literali necunoscuţi la numărător, dar avînd coeficienţii numitorului cunoscuţi. Formăm atunci expresia $m_1m_2-n_1n_2$ şi o egalăm cu numărătorul funcţiei date în (63). Egalarea coeficienţilor aceloraşi puteri ale lui s în cei doi membrii ai acestei ecuaţii permite aflarea necunoscutelor. Observăm că aici sînt implicaţi trei seturi de coeficienţi : literele a, literele A şi literele b. Din aceştia în această etapă, ultimele două seturi sînt cunoscute; numai coeficienţii a sînt necunoscuţi.

Să aplicăm procedeul indicat mai sus. Identificînd m_1, m_2, n_1, n_2 din (62) putem scrie

$$\begin{aligned} m_1m_2 - n_1n_2 &= (a_0+a_2s^2+\cdots)(b_0+b_2s^2+\cdots) - \\ &-(a_1s+a_3s^3+\cdots)(b_1s+b_3s^3+\cdots) = \\ &= A_0+A_1s^2+\cdots+A_ms^{2m}. \end{aligned} \tag{64}$$

Egalînd coeficienţii obţinem

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0b_0, \\ A_1 &= a_0b_2+b_0a_2-a_1b_1, \\ A_2 &= a_0b_4+a_2b_2+a_4b_0-a_1b_3-a_3b_1 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_k &= \sum_{j=-k}^{k}(-1)^{k+j}a_{k+j}\,b_{k-j}. \end{aligned} \tag{65}$$

Pentru a găsi necunoscutele a, trebuie să rezolvăm acest sistem de ecuaţii liniare.

Vom exemplifica folosind funcţia din (60) deja tratată prin metoda Bode. Factorii din semiplanul stîng de la numitorul acestei expresii sînt

$$m_2+n_2 = (s+1)(s^2+s+1) = s^3+2s^2+2s+1.$$

Deoarece $R(\omega)$ dat este zero la infinit, la fel trebuie să fie şi $F(s)$ la infinit. Deci numărătorul lui $F(s)$ trebuie să fie de forma

$$m_1+n_1 = a_2s^2+a_1s+a_0.$$

Introducînd ultimele două ecuaţii în (65) şi utilizînd faptul că toţi coeficienţii „A" sînt zero cu excepţia lui A_0 care este egal cu unitatea, obţinem

$$1 = a_0,$$

$$0 = 2a_0 + a_2 - 2a_1,$$

$$0 = 2a_2 - a_1.$$

Aceste ecuaţii se rezolvă şi se găsesc următorii coeficienţi $a_0=1$, $a_1=\frac{4}{3}$, $a_2=\frac{2}{3}$. Funcţia de circuit astfel obţinută verifică pe cea găsită anterior în (61).

Metoda Miyata

O variantă a acestor metode este datorată lui Miyata. Fiind dată $F(s)$ din (62), partea pară este dată de (63). Acum considerăm o nouă funcţie $F_0(s)$ a cărei parte pară este

$$\text{Par } F_0(s) = \frac{1}{m_2^2-n_2^2}, \tag{66}$$

unde m_2+n_2 este acelaşi numitor ca şi al lui $F(s)$. Folosind metoda Bode sau Gewertz, găsim funcţia $F_0(s)$ în care Par F_0 este partea pară. Să o scriem astfel

$$F_0(s) = \frac{m_0+n_0}{m_2+n_2}. \tag{67}$$

Numărătorul părţii pare a acestei expresii este $m_0m_2-n_0n_2$ şi conform lui (66) este egal cu 1. Considerăm apoi o nouă funcţie $\hat{F}(s)$ formată prin

multiplicarea lui $F_0(s)$ prin $m_1m_2-n_1n_2$, care este numărătorul părții pare a lui $F(s)$ și formăm partea sa pară

$$\hat{F}(s) = \frac{(m_1m_2-n_1n_2)(m_0+n_0)}{m_2+n_2}, \tag{68a}$$

$$\text{Par } \hat{F}(s) = \frac{(m_0m_2-n_0n_2)\ (m_1m_2-n_1n_2)}{m_2{}^2-n_2{}^2} = \frac{m_1m_2-n_1n_2}{m_2^2-n_2^2} = \text{Par } F(s). \tag{68b}$$

Ultima expresie rezultă din faptul că $m_0m_2-n_0n_2 = 1$. Astfel $\hat{F}(s)$ și $F(s)$ au aceeași parte pară, dar $\hat{F}(s)$ în (68a) poate avea un pol de ordin mai mare la infinit (din cauză că gradul numărătorului poate fi mai mare decît al numitorului). Presupunem că numărătorul se divide prin numitor, rezultînd un polinom cît, $q(s)$, și un rest de grad mai mic, sau de grad egal gradul numitorului.

Astfel

$$\hat{F}(s) = q(s)+\mathrm{F}_r(s) \tag{69a}$$

și

$$\text{Par } \hat{F}(s) = \text{Par } q(s) + \text{Par } F_r(s). \tag{69b}$$

Partea pară a polinomului $q(s)$ este suma tuturor puterilor sale pare, dacă acestea există. Dacă $q(s)$ ar avea cel puțin o putere pară, atunci partea dreaptă a ultimei ecuații ar deveni infinită cînd s tinde către infinit, in timp ce după cum se vede din (68b), partea stîngă nu are această comportare. În concluzie, $q(s)$ este un polinom impar, astfel încît Par $\hat{F}$ = = Par F_r și deci Par F_r=Par F din (68b). În plus, funcția rest are aceiași poli ca și funcția specificată; prin urmare ea este funcția dorită, adică $F_r(s) = F(s)$.

În rezumat, putem spune că atunci cînd se dă o funcție pară rațională $(m_1m_2-n_1n_2)/(m_2^2-n_2^2)$, se determină funcția de circuit $F_0(s)$ a cărei parte pară este $1/(m_2^2-n_2^2)$. Această funcție este apoi multiplicată cu $(m_1m_2-n_1n_2)$ și împărțită, pînă ce funcția rest nu are pol la infinit. Aceasta este funcția dorită a cărei parte pară este funcția dată.

Pentru a exemplifica fie

$$\text{Par } F(s) = \frac{3s^4+6s^2+6}{1-s^6}.$$

Atunci

$$\operatorname{Par} F_0(s) = \frac{1}{1-s^6}.$$

Dar aceasta este aceeaşi funcţie ca cea anterioară considerată în (60 şi (61). Astfel

$$F_0(s) = \frac{1}{3}\,\frac{2s^2+4s+3}{s^3+2s^2+2s+1}$$

şi

$$(3s^4+6s^2+6)F_0(s) = \frac{2s^6+4s^5+7s^4+8s^3+10s^2+8s+6}{s^3+2s^2+2s+1} =$$

$$= 2s^3+3s+\frac{4s^2+5s+6}{s^3+2s^2+2s+1},$$

deci

$$F(s) = \frac{4s^2+5s+6}{s^3+2s^2+2s+1}.$$

6.7. RELAŢII INTEGRALE ÎNTRE PĂRŢILE REALĂ ŞI IMAGINARĂ

În paragrafele precedente s-au discutat metodele algebrice pentru determinarea unei funcţii de circuit ca o funcţie raţională de s, dîndu-se una din componentele funcţiei ca funcţie raţională, unde prin „o componentă a funcţiei'' înţelegem: partea reală, partea imaginară, faza (sau tangenta fazei), modulul (sau logaritmul modulului). Un dezavantaj al acestor metode este că componenta dată trebuie întotdeauna să fie într-o formă raţională realizabilă. Dacă, spre exemplu, se dă partea reală grafic, sau chiar analitic dar nu sub forma unei funcţii raţionale, este necesar mai întîi să se determine o aproximare raţională realizabilă înainte de a trece la găsirea funcţiei de circuit, şi din aceasta, oricare din celelalte componente.

Funcţiile de circuit sînt funcţii analitice de variabilă complexă şi deci părţile lor reală şi imaginară sînt legate prin ecuaţiile Cauchy-Riemann. Totuşi aceste ecuaţii sînt relaţii implicite şi nu constituie formule explicite de calcul a unei componente din cealaltă. În acest paragraf vom prezenta un număr de relaţii între părţile unei funcţii de circuit. Acestea sînt

binecunoscute în matematică ca *transformate Hilbert*. Totuși, deoarece ele au fost folosite în teoria circuitelor pentru prima dată de Bode, le vom numi *formulele Bode*. Un avantaj imediat al acestor relații este acela că componenta unei funcții poate fi dată grafic: mai mult decît atît, formulele Bode au multe implicații și aplicații uzuale, unele din ele fiind discutate aici.

Deoarece ne ocupăm de funcții analitice de variabilă complexă, un punct de plecare pentru a lega componentele unei funcții poate fi formula integrală a lui Cauchy (vezi Anexa 2), care spune că

$$F(s) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{F(z)}{z - s} dz. \quad (70)$$

În această expresie C este un contur închis în interiorul căruia și pe care $F(s)$ este analitică; z este un punct de pe contur, în timp ce s este un punct în interiorul conturului. Dacă conturul este un cerc și exprimăm atît z cît și s în coordonate polare, vom putea exprima partea reală și imaginară a lui $F(s)$ în funcție de partea sa reală sau imaginară, pe cerc. În sfîrșit, cu ajutorul unei transformări, cercul este transformat în axa imaginară. Expresiile rezultate legînd părțile reală și imaginară vor fi *transformatele Hilbert*.

O altă abordare a problemei, pe care o vom adopta aici, are ca punct de plecare teorema integralei lui Cauchy (vezi Anexa 2). Această teoremă spune că integrala de contur a unei funcții, de-a lungul unui contur în interiorul căruia și pe care funcția este analitică, este egală cu zero. Pentru a aplica această teoremă, este necesar de a cunoaște 1) conturul de integrare și 2) funcția ce urmează a fi integrată. În problema noastră, conturul de integrare trebuie să includă axa imaginară deoarece dorim ca rezultatul final să conțină părțile reală și imaginară pe axa j, ale funcției de circuit. Prin urmare, deoarece funcțiile de care ne ocupăm sînt analitice în întreg semiplanul drept, conturul de integrare ce-l vom alege va fi axa $j\omega$ și un semicerc de rază infinită în semiplanul drept. Conform teoremei lui Cauchy, integrala pe acest contur închis va fi zero. Rămîne deci să calculăm contribuția fiecărei părți a conturului.

Fie $F(s)$ o funcție de circuit, de intrare sau de transfer; în mod obișnuit scriem

$$F(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega), \quad (71a)$$

$$\ln F(j\omega) = \alpha(\omega) + j\Phi(\omega), \quad (71b)$$

in care $\alpha(\omega) = \ln|F(j\omega)|$ este funcția cîștig și $\Phi(\omega)$ funcția fază. Dacă $F(s)$ este o funcție de intrare, ea nu va avea poli și zerouri în semiplanul drept. Deci $\ln F(s)$ va fi analitică în semiplanul drept. Dacă $F(s)$ este func-

ţie de transfer, atunci ln $F(s)$ va fi analitică în semiplanul drept, numai dacă $F(s)$ este funcţie de fază minimă. Deci rezultatele ce le vom obţine se vor aplica atît lui $F(s)$ cît şi lui $\ln F(s)$, cît timp $F(s)$ este funcţie de fază minimă.

Să considerăm acum polii posibili ai lui $F(s)$ pe axa $j\omega$. Ştim că asemenea poli trebuie să fie simpli. În efectuarea integralei de contur, astfel de poli trebuie ocoliţi printr-o mică deviere spre dreapta inclusă în contur. Contribuţia acestei ocoliri la integrala totală va fi de $2\pi j$ ori jumătatea reziduului integrandului în polul respectiv (vezi Anexa 2). Scopul nostru este acela de a obţine expresiile ce leagă partea reală a unei funcţii de circuit de partea imaginară, astfel încît cînd se dă una din ele să putem calcula pe cealaltă. Astfel e posibil să nu cunoaştem reziduurile în polii de pe *axa j*. Prin urmare vom presupune că $F(s)$ nu are poli pe axa $j\omega$. aceasta include punctele zero şi infinit, deci $F(s)$ este *presupusă analitică la zero şi la infinit.*

Dacă $F(s)$ are un pol pe axa $j\omega$, atunci ln $F(s)$ va avea acolo un punct singular logaritmic. Dacă integrandul se referă la $\ln F(s)$, vom alege din nou un contur ce ocoleşte această singularitate. Dar din cauză că singularitatea este logaritmică această ocolire nu va aduce nici o contribuţie la integrala de contur (vezi Anexa 2). Deci, în caz că integrandul pe care îl alegem se referă la ln $F(s)$, putem permite ca $F(s)$ să aibă poli simpli pe axa $j\omega$. În cele ce urmează vom considera totdeauna funcţia din integrand ca fiind $F(s)$. Totuşi, se obţin rezultate identice dacă se înlocuieşte $F(s)$ prin ln $F(s)$. În formule, $R(\omega)$ va fi înlocuit prin $\alpha(\omega)$ şi $X(\omega)$ prin Φ (ω).

Să considerăm acum integrarea unei funcţii de circuit $F(s)$, care este analitică pe axa $j\omega$ incluzînd zero şi infinit, de-alungul unui contur ca cel arătat în fig. 6.20 *a*, care constă din întreaga axă $j\omega$ şi un arc semicircular de rază infinită în dreapta axei. Conform teoremei lui Cauchy, integrala lui $F(s)$ va fi zero. Procedeul nostru va consta în evaluarea contribuţiilor acelor părţi ale conturului unde integrala se poate face, după care exprimăm părţile rămase în funcţie de aceasta. Plecînd de la aceste conside-

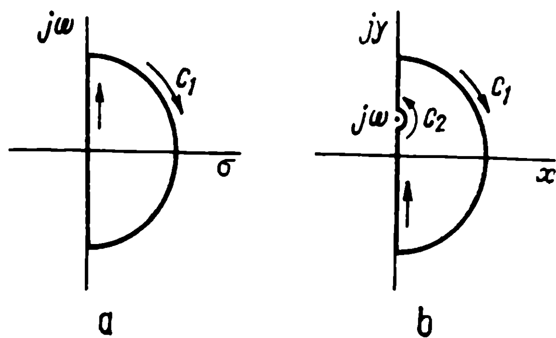


Fig. 6.20. Conturul de integrare.

rente este evident că nu vom putea obţine tipul de relaţii căutate avînd ca integrand numai pe $F(s)$. Nu va fi ales nici un punct particular pe axa $j\omega$ asupra căruia să ne îndreptăm atenţia.

Presupunem că împărţim $F(s)$ prin $s-j\omega_0$ înaintea integrării, unde ω_0 poate fi orice valoare a lui ω. Aceasta va introduce un pol pe axa $j\omega$ in integrand. Pentru a aplica teorema lui Cauchy vom ocoli acest pol cu ajutorul unui mic arc semicircular C_2, aşa cum se vede în fig. 6.20 *b*. Conturul complet cuprinde acum trei părţi. Să evaluăm contribuţia arcului C_2. Aceasta duce la considerarea valorii lui $F(s)$ în $s=j\omega_0$. Observăm că rezultatul integrării nu va fi o funcţie de s care este numai o variabilă auxiliară, ci de ω_0, care este un punct arbitrar pe axa $j\omega$. Va fi convenabil să folosim un simbol diferit pentru variabila auxiliară, de exemplu $z=$ $=x+jy$. Atunci punctul $j\omega_0$ poate fi notat din nou $j\omega$.

Dacă $F(s)$ este o funcţie de circuit care este analitică pe întreaga axă $j\omega$ şi în semiplanul drept, aplicarea teoremei lui Cauchy conduce la următorul rezultat :

$$\oint_C \frac{F(z)}{z-j\omega}\,dz = 0, \tag{72}$$

unde conturul închis este cel din fig. 6.20 *b*.

Conturul complet cuprinde trei părţi : semicercul mare C_1, semicercul mic C_2 din jurul punctului $z=j\omega$ şi axa imaginară. Contribuţia semicercului mic este de $2\pi j$ ori jumătatea reziduului integrandului în $z=j\omega$, care este $F(j\omega)$. Pentru calculul contribuţiei semicercului de rază infinită să presupunem iniţial că acesta are raza finită, cu $z = R_0\varepsilon^{j\theta}$. Atunci

$$\int_{C_1} \frac{F(s)}{z-j\omega}\,dz = \int_{C_1} \frac{F(R_0\varepsilon^{j\theta})}{R_0\varepsilon^{j\theta}-j\omega}\, jR_0\varepsilon^{j\theta}d\theta \xrightarrow[R_0\to\infty]{} jF(\infty)\int_{\pi/2}^{-\pi/2} d\theta \tag{73}$$
$$= -\,j\pi F(\infty),$$

unde $F(\infty)$ este valoarea lui $F(s)$ la $s = \infty$. Astfel cînd R_0 tinde către infinit, integrala pe C_1 tinde către $-j\pi F(\infty)$. Deoarece partea imaginară trebuie să fie zero la infinit, $F(\infty)$ este de asemenea egal cu $R(\infty)$.

Acum a mai rămas restul conturului. Pentru acesta se poate scrie.

$$\lim_{\substack{R_0\to\infty\\ r\to 0}} \left[\int_{-R_0}^{\omega-r} \frac{F(jy)}{y-\omega}\,dy + \int_{\omega+r}^{R_0} \frac{F(jy)}{y-\omega}\,dy\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(jy)}{y-\omega}\,dy. \tag{74}$$

Observăm că integrarea de-alungul axei imaginare trebuie să evite polul $z=j\omega$ în mod simetric. Aceasta va conduce la *valoarea principală* a

integralei din dreapta. În toate integrale ce urmează vom presupune acest lucru. Ținînd seama de toate aceste rezultate și de (72) putem scrie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(jy)}{y-\omega}\, dy = j\pi[F(\infty)-F(j\omega)]. \tag{75}$$

Dacă scriem apoi $F(j\omega)$ și $F(jy)$ în funcție de părțile reală și imaginară și egalăm respectiv părțile reală și imaginară din cei doi membri obținem în sfîrșit

$$R(\omega) = R(\infty) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(y)}{y-\omega}\, dy, \tag{76a}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(y)}{y-\omega}\, dy. \tag{76b}$$

Lăsăm cititorului detaliile de calcul pentru a obține aceste relații.

Semnificația acestor două expresii este foarte importantă. Cea de a doua expresie arată că fiind dată o funcție care este partea reală a unei funcții de circuit pentru orice frecvență, partea imaginară a funcției este complet determinată, presupunînd că funcția de circuit nu are poli pe axa $j\omega$. Analog, dacă se dă partea imaginară la toate frecvențele, atunci partea reală este complet determinată pînă la o constantă aditivă.

Reamintim că rezultatele se aplică și în cazul în care $F(s)$ se înlocuiește prin logaritmul său. Totuși în acest caz, trebuie să impunem ca $F(s)$ să fie de fază minimă (dacă reprezintă o funcție de transfer). Pe de altă parte, putem să renunțăm la condiția de analiticitate a lui $F(s)$ pe axa $j\omega$. Un pol simplu al lui $F(s)$ pe axa $j\omega$ devine o singularitate logaritmică a lui $\ln F(s)$, iar o astfel de singularitate nu aduce nici o contribuție la integrală după cum s-a menționat anterior. Astfel pentru funcții de transfer de fază minimă, relațiile (76) avînd pe R și X înlocuite prin α și Φ, dau legătura între cîștig și fază pentru orice frecvență.

Să obținem acum alte forme pentru cele două expresii de bază din (76), care vor da noi informații asupra relațiilor și vor pune în evidență detalii care nu sînt imediat aparente din aceste expresii. Reamintim că părțile reală și imaginară sînt respectiv funcții pară și impară de frecvență. Să folosim acest fapt și să scriem (76 b) după cum urmează:

$$X(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{R(y)}{y-\omega} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{R(y)}{y-\omega}\, dy. \tag{77}$$

În prima din aceste integrale înlocuim y prin $-y$ şi schimbăm limitele în mod corespunzător. Rezultatul este

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{R(y)}{y-\omega}\, dy = \int_{\infty}^{0} \frac{R(-y)}{-(y+\omega)}(-dy) = -\int_{0}^{\infty} \frac{R(y)}{y+\omega}\, dy. \tag{78}$$

Ultima egalitate rezultă din faptul că $R(y) = R(-y)$. Substituind aceasta în (77) obţinem

$$X(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} R(y)\left[\frac{1}{y-\omega} - \frac{1}{y+\omega}\right] dy = \frac{2\omega}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{R(y)}{y^2-\omega^2}\, dy. \tag{79}$$

În mod complet analog plecînd de la (76 *a*) obţinem

$$R(\omega) = R(\infty) - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{yX(y)}{y^2-\omega^2}\, dy. \tag{80}$$

În ultimele două expresii se vede că integrandul tinde la infinit pe conturul de integrare în punctul $y=\omega$. Acest lucru este numai aparent, deoarece trebuie să luăm integrala numai prin valoarea sa principală. Chiar această dificultate aparentă se poate înlătura dacă observăm prin integrare directă că

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dy}{y^2-\omega^2} = 0, \tag{81}$$

folosind din nou valoarea principală a integralei. Deci, se poate scădea $R(\omega)/(y^2-\omega^2)$ din integrandul din (79) şi $\omega X(\omega)/(y^2-\omega^2)$ din integrandul din (80), fără a modifica valorile acestor integrale. Rezultatele acestor etape vor fi

$$R(\omega) = R(\infty) - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{yX(y)-\omega X(\omega)}{y^2-\omega^2}\, dy, \tag{82 a}$$

$$X(\omega) = \frac{2\omega}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{R(y)-R(\omega)}{y^2-\omega^2}\, dy. \tag{82 b}$$

O caracteristică foarte importantă a rezultatelor stabilite mai sus este faptul că nu este necesar ca partea reală (sau imaginară) să fie o funcţie raţională realizabilă. Corespunzător oricărei părţi reale date în formă grafică sau analitică, se poate calcula o parte imaginară cu ajutorul in-

tegralei. De fapt, expresiile sînt foarte utile atunci cînd partea reală este dată aproximativ şi se doreşte să se obţină o comportare aproximativă pentru partea imaginară.

De exemplu, presupunem că se cere să aflăm comportarea aproximativă a funcţiei de fază în banda de trecere a unui filtru trece jos. În această discuţie vom interpreta R şi X ca reprezentînd cîştigul α şi respectiv faza Φ. În banda de trecere cîştigul este aproximativ zero pînă la o frecvenţă ω_0. Deci în (82 *b*) limita inferioară devine ω_0. În plus, punctul ω ce se află în banda de trecere este mai mic decît ω_0; astfel în integrand putem neglija ω faţă de y, deoarece y variază de la ω_0 la infinit. Valoarea aproximativă a fazei este

$$\Phi(\omega) \simeq \frac{2\omega}{\pi}\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\alpha(y)}{y^2}\, dy. \tag{83}$$

Să facem schimbarea de variabilă $y = 1/p$; atunci $dy/y^2 = -dp$. După modificarea limitelor de integrare, ecuaţia devine

$$\Phi(\omega) \simeq \frac{2\omega}{\pi}\int_{0}^{1/\omega_0} \alpha\left(\frac{1}{p}\right) dp. \tag{84}$$

Observăm că integrala din (83) sau (84) nu este o funcţie de ω şi că pentru o anumită valoare a lăţimii de bandă ω_0, va fi o constantă. Astfel faza va fi aproximativ o funcţie liniară de ω în interiorul benzii de trecere[1]). Desigur aproximarea va fi din ce în ce mai eronată pe măsură ce ω se apropie de frecvenţa de tăiere, deoarece atunci ω nu mai poate fi neglijat faţă de y în integrand.

Teoremele integralei de reactanţă şi a integralei de rezistenţă

Cele două perechi de expresii obţinute pînă acum în (76) şi (82) leagă partea imaginară la o frecvenţă oarecare de valorile părţii reale la toate frecvenţele, sau partea reală la o frecvenţă oarecare de valorile părţii imaginare la toate frecvenţele. Putem găsi forme limită pentru aceste expresii cînd frecvenţa tinde către zero sau infinit.

---

[1]) O astfel de caracteristică liniară de fază corespunde la un timp de întîrziere constant pentru transmisia unor funcţii sinusoidale în acest domeniu de frecvenţe. Aşadar pentru semnale care au numai acest spectru de frecvenţe, obţinem o transmisiune fără distorsiuni. Din acest motiv, este de dorit o caracteristică liniară de fază.

Să considerăm mai întîi relaţia (82 *a*) cînd ω tinde către zero. Aceasta conduce imediat la rezultatul

$$\int_0^\infty \frac{X(y)}{y}\, dy = \frac{\pi}{2}\,[R(\infty) - R(0)]. \tag{85}$$

Această expresie este cunoscută ca teorema *integralei de reactanţă*. Ea exprimă faptul că integrala părţii imaginare pe întregul domeniu de frecvenţe, ponderată cu inversul frecvenţei, este proporţională cu diferenţa valorilor părţii reale la cele două frecvenţe extreme. Ea este de asemenea denumită *teorema ariei fazei* deoarece rezultatul rămîne valabil atunci cînd $F(s)$ este înlocuit prin logaritmul său, R prin α şi X prin Φ.

Se obţine o expresie mai convenabilă dacă luăm frecvenţa în scară logaritmică

$$u = \ln\frac{y}{\omega}, \quad \text{sau} \quad \frac{y}{\omega} = \varepsilon^u, \tag{86}$$

în care ω este o frecvenţă de referinţă arbitrară. Atunci dy/y devine du şi (85) se poate scrie după cum urmează:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(y)\, du = \frac{\pi}{2}\,[R(\infty) - R(0)]. \tag{87}$$

Se observă schimbarea la limita inferioară, deoarece $u = -\infty$ cînd $y = 0$. Variabila lui $X(y)$ a fost menţinută pentru simplitate tot y, deşi mai precis integrandul este $X(\omega\,\varepsilon^u)$. Altfel spus, putem defini o nouă funcţie $X_1(u) = X(\omega\varepsilon^u)$. Totuşi aceasta ar introduce notaţii în plus care complică lucrurile. În ecuaţiile de mai jos vom reţine y ca variabilă a integrandului şi vom scrie $X(y)$ sau $R(y)$ după caz, subînţelegînd faptul că înainte de efectuarea oricărei operaţii vom trece la funcţia de u prin substituţia $y = \omega\,\varepsilon^u$. Astfel observăm că *aria sub curba părţii imaginară reprezentată la o scară logaritmică a frecvenţelor este proporţională cu diferenţa părţii reale la frecvenţa zero şi infinit.*

Să multiplicăm ambele părţi ale lui (82 *b*) cu ω şi apoi să considerăm limita cînd ω tinde către infinit. Reamintim că limita superioară a integralei are semnificaţia integrării pînă la R_0, după care se impune ca R_0 să tindă către infinit. Astfel (82 *b*) devine

$$\lim_{\omega\to\infty} \omega X(\omega) = \frac{2}{\pi} \lim_{\omega\to\infty}\left[\lim_{R_0\to\infty}\int_0^{R_0} \frac{R(y) - R(\omega)}{\dfrac{y^2}{\omega^2} - 1}\, dy\right]. \tag{88}$$

În partea dreaptă a ecuaţiei (88) există două operaţii de trecere la limită. Dacă schimbăm ordinea acestor două operaţii, expresia poate fi evaluată în mod direct; trebuie totuşi să vedem dacă operaţia de schimbare a celor două limite este permisă. Răspunsul este afirmativ dacă integrala este uniform convergentă pentru orice valoare a lui ω, cum de fapt este. Schimbind între ele cele două operaţii şi trecînd la limită se obţine

$$\int_0^\infty [R(y) - R(\infty)]\,dy = -\frac{\pi}{2} \lim_{\omega\to\infty} \omega X(\omega). \tag{89}$$

Rezultatul exprimat de această ecuaţie este cunoscut sub denumirea de *teorema integralei de rezistenţă*. (Este deasemenea numită *teorema integralei de atenuare*, deoarece rezultatul rămîne valabil dacă înlocuim $F(s)$ prin logaritmul său). Dacă este dată comportarea asimptotică a părţii imaginare a funcţiei de circuit, atunci fără a avea importanţă variaţia cu frecvenţa a părţii reale pe axa j, aria cuprinsă sub curba părţii reale şi axa orizontală deplasată în sus cu cantitatea $R(\infty)$, trebuie să rămînă constantă. Invers, dacă se dă integrala părţii reale a unei funcţii pe întreaga axă a frecvenţelor, rezultă comportarea la frecvenţa infinit a părţii imaginare.

Considerăm cazul special în care $F(s)$ are un zero simplu la infinit; atunci $F(\infty) = R(\infty) = 0$. Deci

$$-\lim_{\omega\to\infty} \omega X(\omega) = \lim_{s\to\infty} sF(s)\cdot \tag{90}$$

Totuşi, conform teoremei valorii iniţiale, limita membrului drept este valoarea iniţială a răspunsului la impulsul unitate al circuitului reprezentat de $F(s)$. În acest caz (89) devine

$$\int_0^\infty R(\omega)\,d\omega = \frac{\pi}{2} \lim_{s\to\infty} sF(s) = \frac{\pi}{2} f(0), \tag{91}$$

în care $f(t) = \mathscr{L}^{-1}F(s)$ este răspunsul la impulsul unitate. Observăm că variabila auxiliară a fost schimbată în ω pentru a sugera sensul fizic.

Limitări impuse circuitelor

Dezvoltările anterioare pot fi folosite pentru a determina cîteva limitări de bază asupra comportării circuitelor atunci cînd se iau în considerare anumite efecte parazite inevitabile. Considerăm situaţia ilustrată

in fig. 6.21 *a*. Capacitatea C reprezintă efectele parazite care au loc în mod inevitabil, de exemplu capacităţile joncţiunii într-un tranzistor, sau chiar capacitatea între fire. Prezenţa unei astfel de capacităţii impune anumite restricţii pe care le vom discuta în continuare.

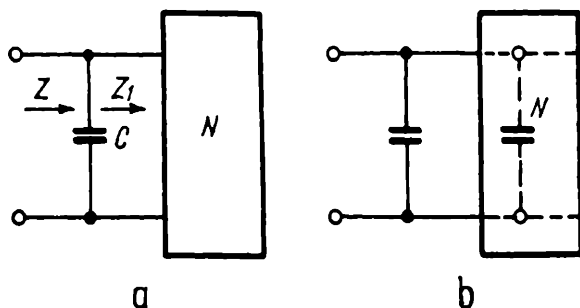


Fig. 6.21. Circuit avînd o capacitate parazită în derivaţie pe bornele de intrare.

Fie $Z_1(s)$ impedanţa de intrare a unui circuit N fără a considera capacitatea. Impedenţa totală $Z(s)$ este dată de

$$Z(s) = \frac{Z_1(s)}{Cs\, Z_1(s) + 1} = \frac{1}{Cs + \frac{1}{Z_1(s)}}. \tag{92}$$

Oricare ar fi comportarea lui $Z_1(s)$ la infinit, observăm că impedanţa totală $Z(s)$ va avea un zero simplu la infinit. Vom presupune iniţial că circuitul N nu începe cu o capacitate în derivaţie ca în fig. 6.21, *b*, aceasta însemnînd că $Z_1(s)$ nu este zero la infinit. Dacă totuşi capacitatea există, aceasta are ca efect o creştere a valorii capacităţii C.

Cu aceste considerente, (90) este valabil pentru $F(s) = Z(s)$. Introducînd (92) în partea dreaptă a lui (90) şi calculînd limita găsim

$$\lim_{s\to\infty} s\,Z(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{sZ_1(s)}{CsZ_1(s) + 1} = \frac{1}{C}.$$

În sfîrşit introducînd aceasta în (91) rezultatul devine

$$\int_0^\infty R(\omega)\, d\omega = \frac{\pi}{2C}. \tag{93}$$

Observăm că existenţa capacităţii în derivaţie impune o limită efectivă asupra ariei cuprinse sub curba părţii reale. Deşi această *integrală de rezistenţă* a rezultat ca valoare limită a expresiei generale legînd părţile reală şi imaginară ale unei funcţii de circuit, ea furnizează informaţii privind posibilităţile circuitului.

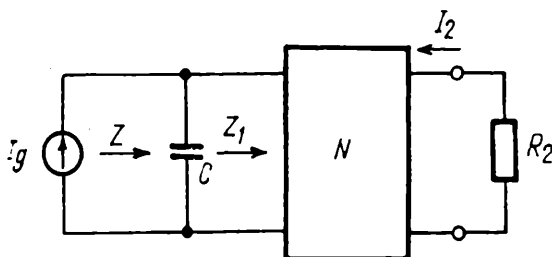


Fig. 6.22. Diport terminat pe rezistenţă.

Deoarece teorema integralei de rezistenţă se aplică funcţiilor care nu au poli pe axa $j\omega$, relaţia (93) este valabilă numai pentru astfel de funcţii. Dacă o funcţie are poli pe axa $j\omega$ conturul de integrare trebuie să ocolească aceşti poli, după care trebuie luate în consideraţie contribuţiile acestor ocoliri. Privind atent dezvoltarea anterioară, se găseşte că, în acest caz, din membrul drept (93) se vor scădea termenii adiţionali, aceştia fiind proporţionali cu reziduurile în polii de pe axa $j\omega$. În capitolul următor vom arăta că toate aceste reziduri sînt reale şi pozitive, pentru funcţiile de intrare. Deci, cînd $Z(s)$ are poli pe axa $j\omega$, partea dreaptă a lui (93) se reduce ca valoare. Atunci pentru toate cazurile indiferent dacă $Z(s)$ este analitică sau nu pe axa $j\omega$, rezultatul se poate scrie :

$$\int_0^{\infty} R(\omega)\, d\omega \leqslant \frac{\pi}{2C}. \tag{94}$$

O nouă interpretare a acestui rezultat important se obţine considerînd, aşa cum se arată în fig. 6.22, un diport terminat pe rezistorul R_2. Presupunînd excitaţia sinusoidală, calculul puterii reale debitată la bornele de intrare de către sursă şi al puterii debitată de circuit sarcinii, va da rezultatele

$$\text{puterea de la sursă} = \tfrac{1}{2}\,|I_g(j\omega)|^2\, Re\, Z(j\omega), \tag{95 a}$$

$$\text{puterea în sarcină} = \tfrac{1}{2}\,|I_2(j\omega)|^2\, R_2. \tag{95 b}$$

Evident, puterea în sarcină nu poate depăşi puterea debitată de sursă pentru un diport pasiv. Deci a doua expresie nu poate fi mai mare decît prima, astfel că

$$\left|\frac{I_2(j\omega)}{I_g(j\omega)}\right|^2 \leqslant \frac{1}{R_2}\, Re\; Z(j\omega). \tag{96}$$

Semnul egal apare cînd diportul nu are pierderi. Astfel pătratul modulului cîştigului în curent, pentru un diport fără pierderi, este proporţional cu partea reală a impedanţei la bornele de intrare ale diportului cu ieşirea terminată pe R_2. Introducînd (96) în (94) şi interpretînd $R(\omega)$ ca ReZ $(j\omega)$ vom avea

$$\int_0^\infty \left|\frac{I_2(j\omega)}{I_0(j\omega)}\right|^2 d\omega \leqslant \frac{\pi}{2R_2C}. \tag{97}$$

Presupunem că diportul din fig. 6.22 este un filtru cu cîştig constant in putere intr-o bandă de frecvenţe dată şi zero în afara acestei benzi. Atunci integrala din (97) va fi egală cu produsul acestui cîştig în putere cu lăţimea de bandă respectivă. În cazul mai general, chiar dacă funcţia de transfer nu este a unui filtru ideal, aria de sub curbă, reprezentată de această integrală, este din punct de vedere dimensional cîştigul de putere înmulţit cu lăţimea de bandă. Pentru acest motiv integrala din (97) este în general numită integrala *cîştig-bandă*. Astfel găsim o limitare de bază asupra produsului cîştig-bandă datorată prezenţei condensatorului C din derivaţie.

O altă formă a relaţiilor integrale

În cele dezvoltate anterior, au fost găsite două seturi de expresii integrale echivalente în (76) şi (82) legînd părţile reală şi imaginară ale funcţiilor de circuit pentru toate frecvenţele. Alte forme sînt de asemenea posibile, una din ele în special, fiind convenabilă pentru calcule şi conducînd la o evaluare simplă a stabilităţii, în sistemele de control cu buclă închisă. Această formă este cea mai semnificativă cînd se referă la $\ln F$ (cîştig şi fază) şi nu la funcţia de circuit însăşi. Expresia utilizează frecvenţa logaritmică definită în (86).

Să începem cu (82 *b*) şi să efectuăm cîteva calcule preliminare utilizînd ca variabilă frecvenţa logaritmică. De asemenea vom folosi α şi Φ în loc de R şi X. Astfel

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha(y)-\alpha(\omega)dy}{\left(\frac{y}{\omega}\right)-\left(\frac{\omega}{y}\right)y} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\alpha(y)-\alpha(\omega)}{\varepsilon^u-\varepsilon^{-u}}\,du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\alpha(y)-\alpha(\omega)}{\sinh\,u}\,du\,.\end{aligned} \tag{98}$$

Observăm schimbarea limitei inferioare, deoarece $u = -\infty$ cînd $y = 0$. A fost menţinută variabila y în $\alpha(y)$, aşa cum am discutat anterior.

În următoarea etapă, integrăm prin părţi ultima expresie. Folosind formula generală

$$\int a db = ab - \int b da$$

cu

$$a = \alpha(y) - \alpha(\omega), \quad db = \frac{du}{\sinh u},$$

$$da = \frac{d\alpha(y)}{du} du, \quad b = -\ln \operatorname{cth} \frac{u}{2}.$$

Deci (98) devine

$$\Phi(\omega) = -\frac{1}{\pi}\left\{[\alpha(y) - \alpha(\omega)] \ln \operatorname{cth} \frac{u}{2}\right\}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha(y)}{du} \ln \operatorname{cth} \frac{u}{2} du. \tag{99}$$

Observăm că $\operatorname{cth} u/2$ este o funcţie impară de u, fiind pozitivă cînd u este pozitiv şi negativă cînd u este negativ. Deci logaritmul său pentru u negativ va fi complex, partea imaginară fiind π. Pentru u negativ se poate scrie

$$\ln \operatorname{cth} \frac{u}{2} = \ln \operatorname{cth} \frac{|u|}{2} + j\pi, \quad u < 0. \tag{100}$$

Cînd $u = +\infty$, $\ln \operatorname{cth} u/2 = 0$, iar cînd $u = -\infty$, $\ln \operatorname{cth} u/2 = j\pi$. Deci partea integrată a ultimei ecuaţii devine $j[\alpha(0) - \alpha(\omega)]$.

Considerăm acum integrala rămasă. Dacă folosim (100) pentru valori negative ale lui u, rezultatul va fi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha(y)}{du} \ln \operatorname{cth} \frac{u}{2} du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha(y)}{du} \ln \operatorname{cth} \frac{|u|}{2} du + j\pi \int_{-\infty}^{0} \frac{d\alpha(y)}{du} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha(y)}{du} \ln \operatorname{cth} \frac{|u|}{2} du + j\pi\alpha(y)\Big|_{u=-\infty}^{u=0}$$

În final, utilizînd toate aceste rezultate în (99), obţinem:

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha(y)}{du} \ln \operatorname{cth} \frac{|u|}{2} du. \tag{101}$$

Această ecuaţie este uşor de interpretat chiar dacă pare a fi complicată. Observăm că cîştigul α nu este o funcţie pară de frecvenţa logaritmică u şi deci nu este posibilă integrarea numai pe o jumătate din intervalul total. Ecuaţia exprimă faptul că faza la o frecvenţă oarecare depinde de panta cîştigului la toate frecvenţele (cînd cîştigul este reprezentat la scara logaritmică a frecvenţelor), importanţa relativă a diferitelor frecvenţe fiind determinată de factorul de pondere.

$$\ln \operatorname{cth} \frac{|u|}{2} = \ln \left| \frac{y+\omega}{y-\omega} \right|. \tag{102}$$

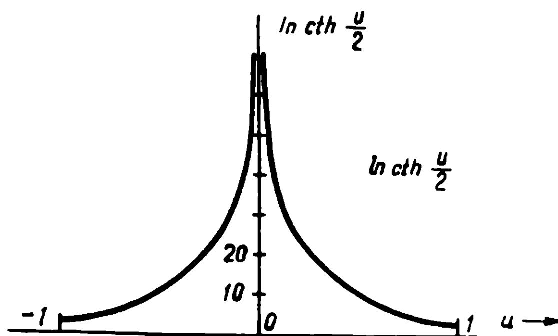


Fig. 6.23. Reprezentarea factorului pondere $\ln \operatorname{cth} \frac{|u|}{2} = \ln \left| \frac{y+\omega}{y-\omega} \right|$.

Această funcţie este reprezentată grafic în fig. 6.23. Ea creşte rapid în vecinătatea lui $u = 0$ $(y = \omega)$, luînd apoi valori foarte mici în ambele părţi ale acestui punct. Aceasta înseamnă că cea mai mare contribuţie la valoarea fazei, la o frecvenţă ω, o are panta cîştigului în imediata vecinătate a lui ω.

O altă formă utilă se poate obţine simplu prin adunarea şi scăderea pantei evaluate la $u = 0$ $(y = \omega)$ sub integrala din (101). Lăsăm cititorului sarcina efectuării acestor calcule. Rezultatul va fi

$$\Phi(\omega) = \frac{\pi d\alpha(\omega)}{2\, du} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d\alpha(y)}{du} - \frac{d\alpha(\omega)}{du}\right] \ln \operatorname{cth} \frac{u}{2}\, du. \tag{103}$$

Observăm că prin $\frac{d\alpha(\omega)}{du}$ înţegem panta cîştigului ca funcţie de u, evaluată pentru $u = 0$ $(y = \omega)$. Panta $d\alpha(\omega)/du$ este măsurată în neperi pe unitatea de variaţie a lui u. O unitate de variaţie a lui u înseamnă o variaţie în frecvenţă cu un factor ε.

Observăm că la o frecvenţă oarecare faza este de $\pi/2$ ori panta cîştigului la aceeaşi frecvenţă, plus un termen dat de integrală. Dacă cîştigul este o funcţie continuă, atunci diferenţa în integrand va fi mică în vecinătatea lui $y = \omega$, chiar acolo unde factorul de pondere are valori mari. Deci, în acest caz, contribuţia integralei la valoarea fazei va fi mică. Atunci, într-o primă aproximaţie putem spune că faza va avea o valoare de $\pi/2$ radiani cînd panta cîştigului este 1, o valoare de π radiani cînd panta cîştigului este 2 etc.

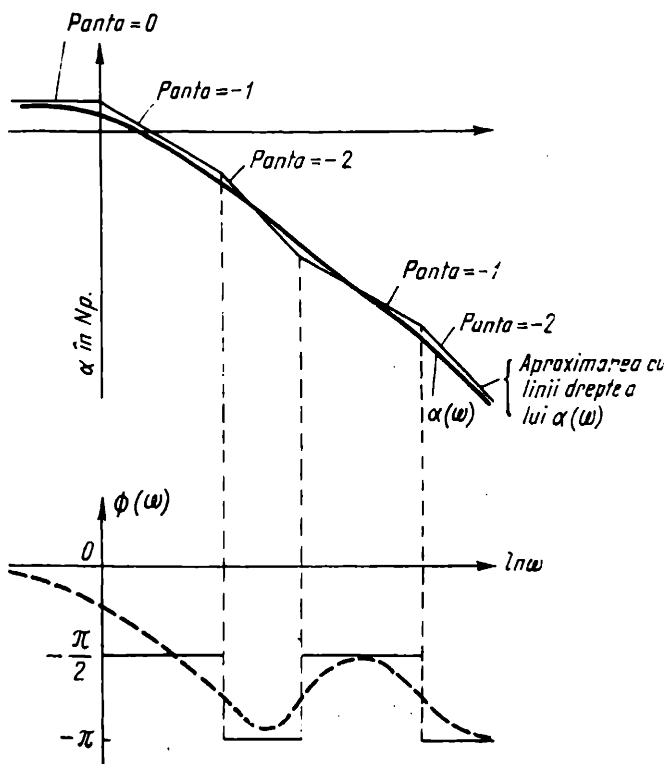


Fig. 6.24. Faza aproximativă corespunzînd unei funcţii de cîştig dată.

Presupunem acum că funcţia cîştig este dată grafic. Putem aproxima curba cu o serie de segmente de dreaptă avînd pante egale cu n, unde n este un întreg. O aproximare a funcţiei de fază (funcţie de fază minimă) corespunzătoare funcţiei date a cîştigului se poate trasa rapid conform discuţiei din ultimul paragraf.

Ca exemplu al acestei metode, presupunem un grafic al funcţiei cîştig[1]) dat în fig. 6.24. Aproximarea cu linii drepte este figurată suprapus.

[1]) Pînă la o schimbare de scală pe ambele axe, aceasta este diagrama Bode a lui $|F(j\omega)|$, care se utilizează foarte mult în teoria reglării automate. Diagrama Bode, adică $20 \log |F(j\omega)|$ în raport cu $\log \omega$, este descrisă în lucrările de bază despre analiza sistemelor de reglare automată.

Se poate obţine o diagramă aproximativă a fazei, arătată în figură prin linie discontinuă folosind numai aproximarea cu linii drepte a cîştigului şi neglijînd complet integrala din (103). Funcţia de fază trasată mai exact poate avea forma arătată prin curba punctată.

Relaţii obţinute pentru diferite funcţii pondere

Pentru obţinerea relaţiilor integrale din acest paragraf am pornit de la integrandul din (72) şi conturul închis arătat în fig. 6.20. Funcţia $1/(z - j\omega)$ cu care s-a multiplicat funcţia de circuit $F(z)$ în (72) este o *funcţie pondere*. Aceleaşi relaţii ca cele obţinute aici se pot obţine folosind diferite funcţii pondere şi integrînd pe acelaşi contur de bază. Desigur, dacă funcţiile pondere introduc poli adiţionali pe axa $j\omega$ va trebui să evităm aceşti poli prin mici devieri ale conturului de integrare; de exemplu teorema integralei de rezistenţă se poate obţine rapid prin integrarea funcţiei $[F(z) - R(\infty)]$ pe conturul de bază. Aici funcţia pondere este 1. Analog, teorema integralei de reactanţă rezultă imediat dacă integrăm funcţia $F(z)/z$ pe conturul de bază, în care introducem un mic ocol al originii. Funcţia pondere este $1/z$. Cititorul poate verifica aceste afirmaţii.

Din această discuţie rezultă posibilitatea obţinerii unor relaţii suplimentare între părţile reală şi imaginară, folosind diferite funcţii pondere. De fapt, se poate găsi o mare varietate de relaţii. Aici au fost prezentate cele mai importante şi folositoare dintre ele. Dacă considerăm cele două cazuri menţionate în paragraful precedent, criteriul pentru alegerea unei anumite funcţii pondere pare a fi alegerea ei astfel încît, termenul în care apare componenta cunoscută a funcţiei de circuit să fie o funcţie pară în raport cu frecvenţa, iar termenul în care apare componenta necunoscută să fie o funcţie impară de frecvenţă. Astfel, cînd se face integrarea pe axa $j\omega$ componenta necunoscută va dispărea şi va apărea numai în termenii ce reprezintă contribuţia micilor contururi de ocolire a singularităţilor şi în termenii ce reprezintă contribuţia arcului de rază infinită. Se pare că această consideraţie în alegerea unei funcţii pondere se aplică în mod cu totul general.

Pînă acum, am găsit în acest paragraf, că pentru o funcţie de circuit avînd anumite restricţii, dacă partea reală este dată pentru toate frecvenţele, atunci partea imaginară este complet determinată. În mod analog, cînd partea imaginară este dată pentru toate frecvenţele, partea reală este complet determinată (pînă la o constantă). Întrebarea care se pune este : presupunînd că partea reală este dată într-un anumit interval de frecvenţe, iar partea imaginară pe întreg spectrul de frecvenţe rămas, este funcţia complet determinată ?

În loc să considerăm această problemă în forma cea mai generală, să presupunem că partea reală este cunoscută pentru toate frecvenţele mai mici decît ω_0, iar partea imaginară este cunoscută pentru toate frecvenţele mai mari decît ω_0. Vrem să găsim o expresie care să dea părţile necunoscute ale celor două componente. Discuţia privind alegerea funcţiilor pondere sugerează că, dacă putem alege o funcţie pondere care schimbă caracterul la ω_0, astfel încît sub ω_0 termenul ce se referă la partea reală să fie par, iar peste ω_0 termenul ce se referă la partea imaginară să fie par, atunci problema va fi rezolvată. Deci este necesară o funcţie pondere multiformă.

Presupunem că alegem următoarea funcţie pondere

$$\frac{1}{(z^2+\omega^2)\sqrt{1+\dfrac{z^2}{\omega_0^2}}}.$$

Din nou luăm $z = x + jy$ ca variabilă auxiliară. Factorul iraţional de la numitor este multiform avînd punctele de ramificaţie la $z = \pm j\omega_0$. Trebuie să alegem tăietura astfel încît integrarea dealungul axei j să se afle pe o singură foaie a suprafeţei Riemann. Putem obţine aceasta dacă, pentru $z = jy$, luăm

$$\sqrt{1-\frac{y^2}{\omega_0^2}} \text{ real şi pozitiv pentru } -\omega_0 < y < \omega_0,$$

$$\sqrt{1-\frac{y^2}{\omega_0^2}} \text{ imaginar şi pozitiv pentru } y > \omega_0,$$

$$\sqrt{1-\frac{y^2}{\omega_0^2}} \text{ imaginar şi negativ pentru } y < -\omega_0.$$

Cu această alegere, $\sqrt{1-y^2/\omega_0^2}$ este o funcţie pară în intervalul $-\omega_0 < y < \omega_0$, şi impară în restul axei. Conturul de integrare constă din conturul de bază din fig. 6.20 dar cu ocolirea punctelor $z = \pm j\omega$. În cazul nostru arcul de rază infinită nu aduce nici o contribuţie deoarece integrandul tinde la zero cel puţin tot atît de repede ca $1/z^3$ la infinit. Contribuţiile conturulrilor de ocolire sînt de $j\pi$ ori reziduul integrandului în polul corespunzător, care se calculează uşor. Rămîne integrarea pe axa $j\omega$. Aceasta se

face despărţind intervalul în două părţi, una de la zero la ω_0, cealaltă de la ω_0 la infinit. Detaliile de calcul sînt lăsate cititorului. Rezultatul va fi

$$\frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\omega_0} \frac{R(y)}{\sqrt{1-\frac{y^2}{\omega_0^2}}} \frac{dy}{(y^2-\omega^2)} + \frac{2\omega}{\pi}\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{X(y)}{\sqrt{\frac{y^2}{\omega_0^2}-1}} \frac{dy}{(y^2-\omega^2)}$$

$$= \frac{X(\omega)}{\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}, \qquad \omega<\omega_0 \tag{104}$$

$$= \frac{-R(\omega)}{\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-1}}, \qquad \omega>\omega_0.$$

Am răspuns deci la întrebarea pusă la începutul acestei discuţii, în măsura in care ea se referă la prezenta problemă. Dacă se dă partea reală a unei funcţii pe un interval al axei imaginare şi partea imaginară pe restul axei, atunci funcţia este complet determinată. Metoda de obţinere a rezultatului din ultima ecuaţie se poate extinde şi pentru cazul în care există mai mult decît două intervale pe care una din cele două componente ale funcţiei de circuit este cunoscută. Se introduc factori iraţionali adiţionali, care dau puncte de ramificaţie adiţionale în punctele corespunzătoare de pe axă. Totuşi, expresiile care rezultă devin complicate şi deci au utilitate limitată.

Să rezumăm rezultatele acestui paragraf. Scopul nostru este obţinerea relaţiilor între părţile reală şi imaginară ale unei funcţii de circuit $F(s)$ (sau între cîştig şi fază), astfel încît atunci cînd una din ele este dată să se poată calcula cealaltă. Punctul de plecare este teorema integralei lui Cauchy, conturul de integrare cuprinzînd axa imaginară şi un arc semicircular de rază infinită în semiplanul drept. Se alege un integrand ce conţine $F(s)$ sau $\ln F(s)$, multiplicat cu o funcţie pondere. Conturul este deformat pentru a ocoli polii integrandului introduşi de această funcţie.

Dacă integrandul se referă la o funcţie de circuit $F(s)$, atunci singura restricţie este ca $F(s)$ să fie analitică pe axa $j\omega$, incluzînd punctele zero şi infinit. Dacă integrandul se referă la $\ln F(s)$, atunci $F(s)$ nu trebuie să fie analitică pe axa $j\omega$, dar acum nu trebuie să aibă nici un zero în semiplanul drept; ea trebuie să fie de fază minimă.

Conturul total se împarte în segmentele de dreaptă de pe axa imaginară, curbele semicirculare ce ocolesc singularităţile pe axa j introduse în integrand în mod deliberat şi arcul semicircular de rază infinită. Contri-

buțiile contururilor semicirculare se pot calcula, iar singura integrală care rămîne este cea de pe axa imaginară.

O caracteristică foarte folositoare a acestor expresii este faptul că funcția prescrisă, poate să nu fie dată într-o formă analitică realizabilă. O formă grafică aproximativă este suficientă. Mai mult decît atît, chiar integralele se pot efectua grafic.

6.8. RELAȚIILE ÎNTRE RĂSPUNSUL ÎN DOMENIUL TIMP ȘI ÎN DOMENIUL FRECVENȚĂ

Paragrafele precedente au cuprins proprietățile funcțiilor de circuit și relațiile de legătură dintre componentele acestor funcții în domeniul frecvență. Deoarece o funcție de circuit este raportul transformatelor Laplace ale funcției răspuns și funcției excitație, este de așteptat ca între componentele unei funcții de circuit și răspunsul în domeniul timp să existe relații de legătură. În acest paragraf se vor examina aceste relații.

Să ne referim la notațiile din capitolul 5 și fie $w_u(t)$ răspunsul (scalar) la o excitație treaptă unitate și $w_\delta(t)$ răspunsul la o excitație impuls unitate. Funcția de circuit corespunzătoare $F(s)$ este legată de acestea astfel

$$\mathscr{L}[w_\delta(t)] = F(s) \tag{105 a}$$

$$\mathscr{L}[w_u(t)] = \frac{F(s)}{s}. \tag{105 b}$$

În cele ce urmează *ne vom referi numai la funcții de circuit fără poli pe axa* $j\omega$.

Răspunsul la treapta unitate

Mai întîi din definiția integralei Laplace rezultă

$$\frac{F(s)}{s} = \int_0^\infty w_u(t)\varepsilon^{-st}\,dt. \tag{106}$$

Dacă se face înlocuirea $s = j\omega$, exponențiala nu se stinge cînd t tinde către infinit, dar integrala va converge dacă $w_u(t) \to 0$ cînd $t \to \infty$. Apoi din teorema valorii finale se găsește că

$$\lim_{t\to\infty} w_u(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{F(s)}{s} = \lim_{s\to 0} F(s).$$

Impunînd ca $w_u(t) \to 0$ cînd $t \to \infty$ înseamnă că $F(s)$ *trebuie să conțină un zero la* $s=0$. Cu această remarcă, (106) se poate scrie

$$F(j\omega) = R(\omega) + jX(w) = j\omega \int_0^\infty w_u(t) \; [\cos\omega t - j\sin\omega t] \; dt.$$

Din aceasta rezultă că

$$R(\omega) = \int_0^\infty \omega w_u(t) \sin \omega t \; dt, \tag{107a}$$

$$X(\omega) = \int_0^\infty \omega w_u(t) \cos \omega t \; dt. \tag{107b}$$

Astfel părțile reală și imaginară ale unei funcții de circuit se pot obține direct din răspunsul la treapta unitate.

Sint de asemenea posibile și relații inverse care dau răspunsul la treapta unitate în funcție de partea reală sau imaginară. Ele se pot obține cu ajutorul integralei de inversiune pentru răspunsul la treapta unitate. Deoarece $w_u(t) = \mathscr{L}^{-1} \{F(s)/s\}$, se obține

$$w_u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_B \frac{F(s)}{s} \varepsilon^{st} \, ds. \tag{108}$$

Am presupus că $F(s)$ nu are poli pe axa $j\omega$, dar n-am făcut nici o restricție relativ la un zero în origine. Atunci integrandul din ultima expresie poate avea un pol în origine. Dacă nu ar fi fost acel pol, conturul Bromwich ar fi putut să fie luat pe axa $j\omega$. În locul acesteia luăm conturul arătat în fig. 6.25 care constă din axa $j\omega$, cu excepția unui arc semicircular care ocolește originea. Cînd raza semicercului tinde la zero, conturul tinde să devină întreaga axă $j\omega$. Cele trei părți ale conturului au fost denumite C_1, C_2 și C_3. Ecuația (108) poate fi scrisă acum

$$w_u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_1} \frac{F(s)}{s} \varepsilon^{st} \, ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{C_2} \frac{F(s)}{s} \varepsilon^{st} \, ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{C_3} \frac{F(s)}{s} \varepsilon^{st} \, ds. \tag{109}$$

Pe contururile C_1 și C_3, $s = j\omega$ și $ds = jd\omega$. Pe conturul C_2 care este arătat mărit în partea (*b*) din fig. 6.25 se poate scrie

$$s = R_0 \varepsilon^{j\alpha} = R_0 \cos \alpha + jR_0 \sin \alpha,$$

$$ds = j\mathrm{R}_0 \varepsilon^{j\alpha} d\alpha.$$

Prin urmare (109) devine

$$w_u(t) = \frac{1}{2\pi j}\left\{\int_{-\infty}^{-R_0} \frac{F(j\omega)}{j\omega}\,\varepsilon^{j\omega t} j\,d\omega + \int_{R_0}^{\infty} \frac{F(j\omega)}{j\omega}\,\varepsilon^{j\omega t} j\,d\omega\right\}$$

$$+\frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(s)\exp\,[t(R_0\cos\alpha + jR_0\sin\alpha)]j\,d\alpha. \quad (110)$$

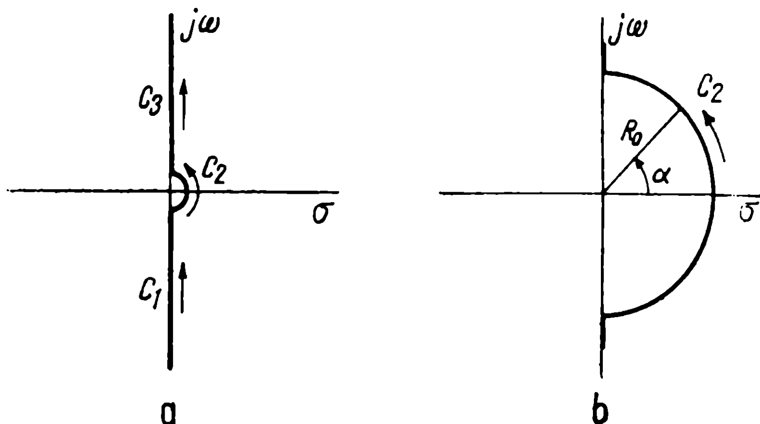


Fig. 6.25. Contururi de integrare.

Ultima integrală din partea dreaptă conține raza R_0 într-o formă complicată. Intenționăm însă să facem ca R_0 să tindă către zero, în care caz acest termen se reduce la $F(0)/2$. Cititorul poate verifica aceasta. Observăm că impunînd restricția suplimentară ca $F(s)$ să aibă un zero la $s = 0$, atunci acest termen va dispărea. Cînd punem $R_0 \to 0$ cele două integrale rămase în (110) se combină pentru a da valoarea principală a integralei mergînd de la $-\infty$ la $+\infty$. În concluzie

$$w_u(t) = \frac{F(0)}{2} + \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(j\omega)}{\omega}\,\varepsilon^{j\omega t}\,d\omega. \quad (111)$$

(Notăm că deși nu este arătat în mod explicit, ultima integrală trebuie înțeleasă ca reprezentînd valoarea principală). Această expresie poate fi simplificată în continuare scriind $F(j\omega)$ în funcție de părțile reală și imaginară, dezvoltînd exponențiala și utilizînd proprietățile pare și impare ale funcțiilor rezultate, pentru a schimba domeniul de integrare pe axa pozitivă ω. Detaliile revin cititorului. Rezultatul este

$$w_u(t) = \frac{R(0)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{R(\omega)}{\omega}\sin\omega t\,d\omega + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{X(\omega)}{\omega}\cos\omega t\,d\omega. \quad (112)$$

Am înlocuit $F(0)$ prin $R(0)$, deoarece $X(0) = 0$. Observăm că această expresie este definită pentru valori pozitive cît şi negative ale lui t. Însă, $w_u(t) = 0$ pentru valori negative ale lui t. Prin urmare pentru valori negative ale lui t se obţine

$$0 = \frac{R(0)}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{R(\omega)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{X(\omega)}{\omega} \cos \omega t \, d\omega$$

sau

$$\frac{R(0)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{X(\omega)}{\omega} \cos \omega t \, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{R(\omega)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega.$$

Cînd ultima ecuaţie se înlocuieşte în (112) se obţine următorul rezultat final

$$w_u(t) = R(0) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{X(\omega)}{\omega} \cos \omega t \, d\omega. \qquad (113a)$$

$$w_u(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{R(\omega)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega. \qquad (113b)$$

Pînă acum am făcut o serie de artificii matematice pentru a pune relaţiile de legătură dintre $F(j\omega)$ şi $w_u(t)$ în mai multe forme echivalente. Dar acum avem ceva nou. Ultima ecuaţie arată că răspunsul la treapta unitate al unui circuit poate fi calculat cunoscînd de-a lungul axei $j\omega$ numai partea reală a funcţiei de circuit. Notăm că această relaţie nu cere ca $R(0) = F(0)$ să fie zero. Cu răspunsul la treapta unitate determinat, (107 *b*) poate fi utilizat pentru calculul părţii imaginare a lui $F(j\omega)$. Însă, din deducerea lui (107 *b*) cunoaştem că valoarea asimptotică a răspunsului la treapta unitate, care se utilizează în (107 *b*) trebuie să fie zero. Prin urmare înainte de utilizarea lui $w_u(t)$, aşa cum se calculează din (113 *b*), se extrage valoarea sa asimptotică, $R(0)$, în cazul în care aceasta nu este zero. Pe această cale $F(j\omega)$ este complet determinat numai din cunoaşterea părţii sale reale.

În mod similar, pornind cu partea imaginară $X(\omega)$ se poate calcula răspunsul la treapta unitate din integrala din (113 *a*). Partea de răspuns la treapta unitate calculată din această integrală va tinde către zero cînd t tinde către infinit. La valoarea astfel calculată putem adăuga orice constantă, care este valoarea la frecvenţa zero a lui $R(j\omega)$, notată in (113 *a*) prin $R(0)$. Însă omiţînd această etapă putem calcula partea reală $R(\omega)$ din (107 *a*). În acest fel $F(j\omega)$ va fi complet determinat, cu excepţia unei constante aditive, numai din cunoaşterea părţii sale imaginare.

Metodele discutate pentru determinarea unei funcții de circuit din părțile sale pară sau impară sînt oarecum diferite de cele discutate în ultimul paragraf. De asemenea ele sînt aparent mai complicate, deoarece cuprind evaluarea a două integrale. Însă trebuie să observăm că partea reală sau imaginară nu trebuie să fie date ca funcții raționale; un grafic este suficient.

Răspunsul la impulsul unitate

Să considerăm acum răspunsul la impulsul unitate. Prin efectuarea unor schimbări potrivite, putem adapta tot ce am discutat pornind de la (106) și pentru răspunsul la impulsul unitate. Mai jos vom da rezultatele, lăsînd detaliile dezvoltării pe seama cititorului. Ca și înainte *se cere ca $F(s)$ să fie o funcție analitică pe axa $j\omega$*, dar acum nu este nevoie să conțină un zero la $s = 0$. În schimb, aplicarea integralei de inversiune lui $F(s)$ va cere ca $F(s)$ să aibă un zero la infinit. Pornind de la (106) și urmînd aceleași etape vom obține următoarele ecuații:

$$R(\omega) = \int_0^\infty w_\delta(t) \cos \omega t \, dt, \tag{114 a}$$

$$X(\omega) = -\int_0^\infty w_\delta(t) \sin \omega t \sin \omega t \, dt \tag{114b}$$

$$w_\delta(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (R\omega) \cos \omega t \, d\omega \tag{114c}$$

$$w_\delta(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty X(\omega) \sin \omega t \, d\omega. \tag{114d}$$

Primele două ecuații sînt corespondente lui (107), în timp ce ultimele două pot fi comparate cu (113). Prin faptul că răspunsul la impulsul unitate este derivata răspunsului la treapta unitate, ultimele două ecuații pot fi obținute din (113). (Impulsurile nu vor fi cuprinse deoarece am presupus $F(\infty) = 0$).

Ecuația (114 *d*) arată că răspunsul la impuls al unui circuit se poate calcula chiar dacă se cunoaște numai partea imaginară $X(\omega)$. Notăm că $X(\omega)$ va tinde către zero cînd ω tinde către infinit, chiar dacă $F(\infty)$ este diferit de zero. Avînd calculat răspunsul la impulsul unitate, partea reală $R(\omega)$, sau $R(\omega) - R(\infty)$, dacă $R(\infty) = F(\infty) \neq 0$, poate fi găsită folosind (114 *a*). În acest fel $F(j\omega)$ este determinat pînă la o constantă aditivă, $F(\infty) = R(\infty)$, numai de partea sa imaginară.

În mod similar, cunoscînd numai partea reală $R(\omega)$, sau $R(\omega)-R(\infty)$ dacă $R(\infty) = F(\infty) \neq 0$, răspunsul la impuls se poate calcula cu (114 *c*). Avînd răspunsul la impuls, partea imaginară $X(\omega)$ se calculează cu (114*b*). În acest fel rezultă că o funcţie de transfer este complet determinată numai din cunoaşterea părţii sale reale.

În fiecare din cazurile de mai sus, după ce răspunsul la treapta unitate, sau răspunsul la impulsul unitate a fost calculat din funcţiile $R(\omega)$ sau $X(\omega)$ date, este necesar de a găsi numai transformata Laplace, deoarece $\mathscr{L}\{w_u(t)\} = F(s)/s$ şi $\mathscr{L}\{w_\delta(t)\} = F(s)$. Procedînd în acest mod, una din integrările din (107) şi (114) poate fi evitată.

Exemple

Să presupunem că partea reală a unei funcţii de circuit pe axa $j\omega$ este

$$R(\omega)=\frac{\omega^4+2\omega^2+4}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}\,. \tag{115}$$

Se vede că la infinit valoarea sa diferă de zero şi ca urmare (114 *c*) nu se poate folosi direct. Extrăgînd valoarea de la frecvenţa infinit se obţine

$$R_1(\omega) = R(\omega) - 1 = \frac{-3\omega^2}{(1+\omega^2)\,(4+\omega^2)}\,.$$

Aplicînd acum (114 *c*) rezultă

$$\begin{aligned} w_{\delta_1}(t) &= -\frac{6}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega^2\cos\omega t}{(1+\omega^2)\,(4+\omega^2)}\,d\omega \\ &= -\frac{3}{\pi}\left[\int_0^\infty \frac{\omega^2\,\varepsilon^{j\omega t}\,d\omega}{(1+\omega^2)\,(4+\omega^2)} + \int_0^\infty \frac{\omega^2\,\varepsilon^{-j\omega t}\,d\omega}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}\right] \\ &= -\frac{3}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\omega^2\,\varepsilon^{j\omega t}\,d\omega}{(1+\omega^2)\,(4+\omega^2)}\,. \end{aligned} \tag{116}$$

Al doilea rînd din (116) rezultă din utilizarea formei exponenţiale a lui cos ωt. Dacă în cea de a doua integrală din acest rînd se înlocuieşte ω cu $-\omega$ şi se schimbă în mod corespunzător limitele, rezultă ultima integrală.

Să considerăm acum următorul contur de integrare în planul complex s;

$$I = \oint_C \frac{s^2\,\varepsilon^{st}\,ds}{(s^2-1)\,(s^2-4)}\,,$$

unde conturul este format din întreaga axă $j\omega$ şi un semicerc cu raza infinit la stînga axei. Integrandul satisface condiţiile lemei lui Jordan, deoarece funcţia raţională din integrand se anulează la infinit ca $1/s^2$. Prin urmare contribuţia arcului infinit va fi zero şi integrala completă se reduce la valoarea sa de-a lungul axei $j\omega$. Din teorema reziduurilor rezultă că valoarea

integralei este egală cu de $2\pi j$ ori suma reiduurilor în polii din semiplanul sting. În cazul dat sînt numai doi poli simpli în semiplanul sting, la $s=1$ şi $s=2$ şi reziduurile lor sînt uşor de calculat. Prin urmare obţinem

$$I = -j\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 \varepsilon^{j\omega t}\, d\omega}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} = 2\pi j\left(\frac{1}{6}\varepsilon^{-t} - \frac{1}{3}\varepsilon^{-2t}\right).$$

Prin substituirea acestei expresii în (116) obţinem

$$w_{\delta_1}(t) = \varepsilon^{-t} - 2\varepsilon^{-2t}$$

Funcţia de transfer se găseşte luînd transformata Laplace. Rezultatul va fi

$$F_1(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2} = \frac{-s}{(s+1)(s+2)}.$$

Această funcţie are un zero la infinit. La aceasta trebuie să adăugăm valoarea lui $R(\omega)$ la frecvenţa infinită, care este $F(\infty)$ şi pe care am scăzut-o din funcţia originală la început. În acest fel funcţia dorită este

$$F(s) = F_1(s) + F(\infty) = \frac{-s}{(s+1)(s+2)} + 1 = \frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)}.$$

Pentru al doilea exemplu fie partea reală a unei funcţii de circuit, curba ideală arătată în fig. 6.26.

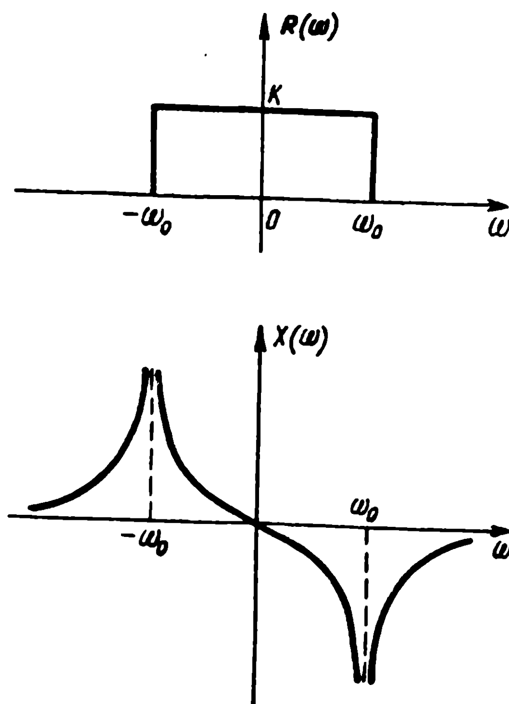


Fig. 6.26. Partea reală specificată.

Folosind (114 *c*) răspunsul la impuls rezultă

$$w_\delta(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\omega_0} K\cos\omega t\, d\omega = \frac{2K}{\pi t}\sin\omega_0 t.$$

Introducînd rezultatul obţinut în (114 *b*) se găseşte [1])

$$X(\omega) = -\int_0^{\infty}\frac{2K}{\pi t}\sin\omega_0 t\sin\omega t\, dt$$

$$= -\frac{K}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\cos(\omega-\omega_0)t-\cos(\omega+\omega_0)t}{t}\right]dt$$

$$= -\frac{K}{\pi}\ln\left|\frac{\omega_0+\omega}{\omega_0-\omega}\right|, \qquad \omega > 0.$$

PROBLEME

P1. Pentru reţelele arătate în fig. 6.P1 verificaţi că valorile proprii diferite de zero ale matricei $\mathscr{A}$ din ecuaţia de stare sînt aceleaşi cu zerourile diferite de zero ale matricei impedanţelor de contur şi ale matricei admitanţelor la noduri.

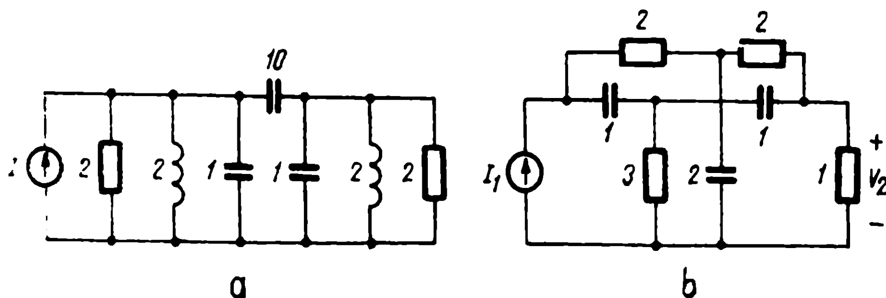


Fig. 6. P.1.

P2. Găsiţi partea pară, Par $F(s)$ şi partea impară Imp $F(s)$, a următoarelor funcţii din părţile pară şi impară ale numărătorului şi numitorului;

$$(a)\ F(s) = \frac{s^3+2s^2+3s+4}{s^2+3s+3}, \qquad (b) F(s) = \frac{s^3+s^2+2s+2}{s^4+5s^3+6s^2+4s+1}.$$

P3. Polinomul $P_1(s) = s^2-6s+12$ are o pereche de zerouri în semiplanul drept. El trebuie multiplicat cu un alt polinom, $P_2(s)$, de gradul n astfel ca polinomul rezultant să nu aibă coeficienţi negativi. Care este valoarea minimă a lui n?

---

[1] Ultimele două rînduri se pot obţine din integrala 412 din R.S. Burington, *Handbook of Mathematical Tables and Formulas*, 2nd ed. Handbook Publishers, 1940.

P4. Se dă funcţia de transfer

$$F(s) = \frac{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}$$

Funcţia de fază este definită astfel

$$\hat{\Phi}(s) = \frac{1}{2} \ln \frac{F(s)}{F(-s)}$$

şi este identică cu (19) pentru $s = j\omega$. Funcţia de întîrziere este definită astfel

$$\tau(s) = -\frac{d}{ds}\hat{\Phi}(s) = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\ln \frac{F(s)}{F(-s)}\right).$$

(a) În $F(s)$ fie $a_i = 0$ pentru toate valorile i. Introduceţi această modificare în expresia funcţiei de întîrziere. Găsiţi valoarea coeficienţilor b_i astfel ca întîrzierea să fie o funcţie de tip maxim plat, pentru cazurile $m = 3$, $m = 4$ şi $m = 5$.

(b) Repetaţi pentru $a_i \neq 0$ şi $n = m - 1$.

P5. Verificaţi că, dacă toţi coeficienţii unui polinom real $P(s)$ de gradul n au acelaşi semn, polinomul $P(s)$ nu are zerouri în sectorul $|\arg s| < \pi/n$.

P.6. În fig. 6. P6 găsiţi z_{21} şi verificaţi că nu există un zero de transmisie la $s = -1$, chiar dacă latura derivaţie din partea stîngă are un pol al admitanţei la $s = -1$.

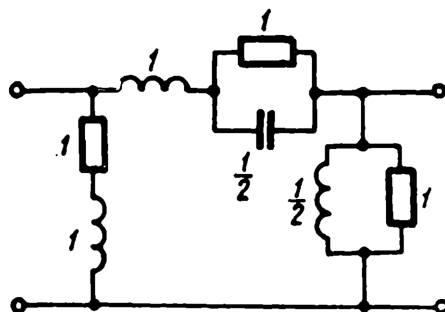


Fig. 6. P. 6

P.7. Admitanţele laturilor derivaţie din diagramele din fig. 6.P7 au un pol la infinit respectiv la zero. Arătaţi că diporţii totali *trebuie* să conţină zerouri de transmisie la aceste frecvenţe (în afara cazului din problema precedentă), indiferent de ce conţine restul circuitului.

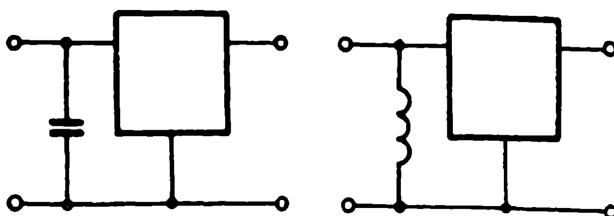


Fig. 6. P. 7.

P.8. Un circuit în X simetric are impedanţele laturilor serie şi încrucişate Z_a, respectiv Z_b. Arătaţi că închizînd acest circuit pe rezistenţa R, impedanţa de intrare este egală cu R dacă $Z_a Z_b = R^2$. Verificaţi că pentru acest caz de rezistenţă constantă, funcţia cîştig de tensiune este

$$G_{21}(s) = \frac{1 - Z_a/R}{1 + Z_a/R}.$$

P.9. Verificaţi că circuitul T podit din fig. 6.12 *b* şi circuitele în Γ din fig. 6.12 *c* şi 6.12 *d*, închise pe o rezistenţă R sînt circuite de rezistenţă constantă dacă $Z_a Z_b = R^2$. Verificaţi de asemenea că în această condiţie funcţia cîştig de tensiune este

$$G_{21}(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{1 + Z_a/R}.$$

P.10. Figura 6.P.10 *a* arată un circuit în X simetric.

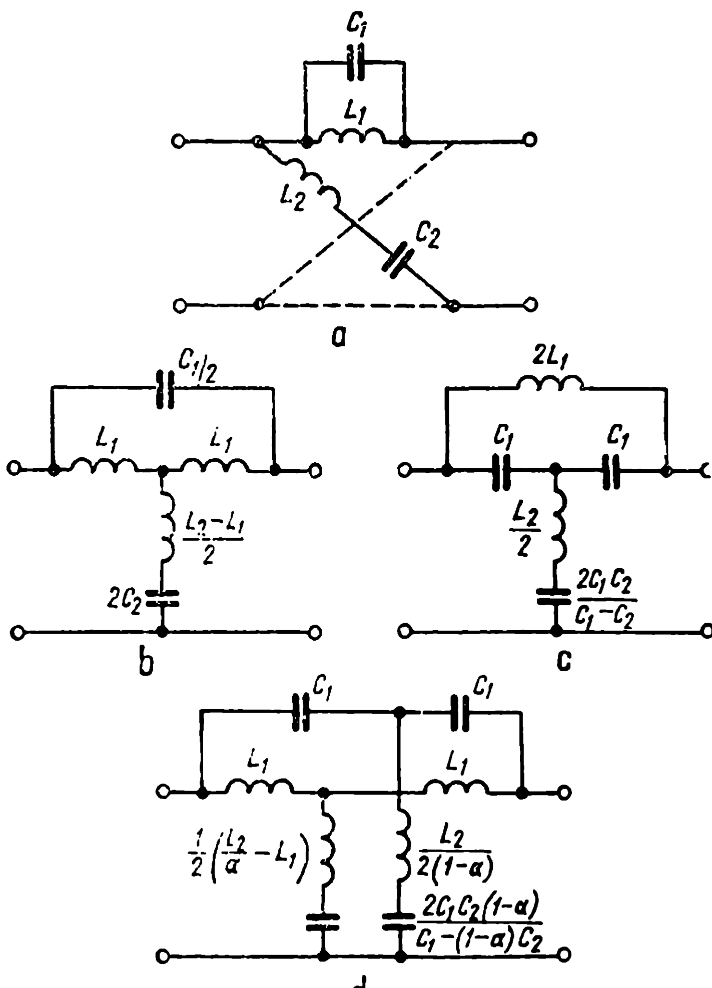


Fig. 6. P. 10.

(a) Găsiți parametrii y (dacă e posibil utilizînd formule topologice) și arătați că condiția Fialkow (definită în problema P.47 din capitolul 3) va fi satisfăcută în una din cele trei condiții de mai jos:

$$(1)\ \frac{L_2}{L_1} \geqslant 1; \quad (2)\ \frac{C_1}{C_2} \geqslant 1 \quad (3)\ \frac{L_2}{L_1} + \frac{C_1}{C_2} \geqslant 1.$$

(b) Figurile P6.10 *b* și 6.10 *c*, arată două circuite în T podit. Arătați că în condiția (1) de mai sus primul circuit are aceiași parametri y ca și circuitul în X și deci este echivalent cu el. Arătați de asemenea că al doilea circuit are aceiași parametri y ca circuitul X, în condiția (2) de mai sus.

(c) Dacă parametrii y ai circuitului în X sînt dezvoltați în fracții parțiale, rezultatul va avea forma:

$$y_{11} = y_{22} = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \frac{ks}{s^2+\omega_0^2} = \left(k_\infty s + \frac{\alpha ks}{s^2+\omega_0^2}\right) + \left(\frac{k_0}{s} + \frac{(1-\alpha)ks}{s^2+\omega_0^2}\right),$$

$$y_{12} = y_{21} = k_\infty s + \frac{k_0}{s} - \frac{ks}{s^2+\omega_0^2} = \left(k_\infty s - \frac{\alpha ks}{s^2+\omega_0^2}\right) + \left(\frac{k_0}{s} - \frac{(1-\alpha)ks}{s^2+\omega_0^2}\right).$$

În partea dreaptă, o fracțiune din polul finit fost combinată cu polul de la infinit, iar restul a fost combinat cu polul din origine. Arătați că în circuitul dublu T din fig. 6.P 10 *d*, fiecare circuit T are unul din seturile de parametri y cuprinși în parantezele de mai sus. Determinați domeniul valorilor α și arătați că acest domeniu există dacă este satisfăcută condiția (3) de mai sus. În această condiție, circuitul dublu T este echivalent cu circuitul X.

(d) Determinați unghiul zerourilor de transmisie ale circuitelor T podit și al circuitului dublu T determinate de cele trei condiții de la punctul (a).

P11. Găsiți un diport terminat pe un rezistor de 100 Ω, a cărui funcție cîștig de tensiune este dată de fiecare din următoarele funcții trece-tot. În fiecare caz relativ la un circuit X. determinați dacă există un circuit echivalent cu bornă comună și dacă există determinați-l,

$$(a)\ G_{21} = \frac{s^2-2s+2}{s^2+2s+2}, \qquad (b)\ G_{21} = \frac{s^2-3s+5}{s^2+3s+5},$$

$$(c)\ G_{21} = \frac{(s^2-s+1)(s-5)}{(s^2+s+1)(s+5)}.$$

P.12. Găsiți un diport terminat pe un rezistor de 50 Ω, a cărui funcție cîștig de tensiune este dată de fiecare din următoarele funcții de fază neminimă. Alegeți oricare valoare convenabilă pentru K. Schimbați unde este posibil circutul X în circuite echivalente cu bornă comună.

$$(a)\quad G_{21} = K\frac{s^2 - s + 2}{(s + 1)^2}, \qquad (b)\ G_{21} = K\frac{s-2}{s^2+4s+3},$$

$$(c)\quad G_{21} = K\cdot\frac{s^2-3s+5}{s^3+7s+5}.$$

P.13. Următoarele funcții sînt specificate ca funcții tangentă ale unei funcții de transfer. Găsiți funcția de transfer $F(s)$ corespunzătoare. Dacă soluția nu este unică, arătați toate posibilitățile.

$$\text{(a) } \operatorname{tg}\hat{\Phi} = \frac{2\omega}{1-6\omega^2}, \quad \text{(b) } \operatorname{tg}\Phi = -\omega^3 - \pi u(\omega-2) - \pi u(\omega+2),$$

$$\text{(c) } \operatorname{tg}\hat{\Phi} = \frac{-\omega}{\omega^2-2}, \quad \text{(d) } \operatorname{tg}\hat{\Phi} = \frac{\omega^3-3w}{-3w^2+2},$$

$$\text{(e) } \operatorname{tg}\hat{\Phi} = \frac{-\omega^3}{\omega^4-4\omega^2+24}, \quad \text{(f) } \operatorname{tg}\hat{\Phi} = \frac{\omega^3+2\omega}{\omega^4-3\omega^2-6}.$$

P14. Funcțiile următoare sînt specificate ca partea reală a unei funcții impedanță $F(s)$. Utilizați oricare din metodele lui Bode, Gewertz sau Miyata pentru determinarea funcției $F(s)$

$$\text{(a) } R(\omega) = \frac{16-8\omega^2+\omega^4}{1+\omega^8}, \quad \text{(b) } R(\omega) = \frac{2+4\omega^2+3\omega^4+\omega^6}{1+\omega^8},$$

$$\text{(c) } R(\omega) = \frac{-\omega^2+2\omega^4-\omega^6}{1+\omega^8}, \quad \text{(d) } R(\omega) = \frac{1-2\omega^2+\omega^4}{1-2\omega^2+\omega^4+4\omega^6},$$

$$\text{(e) } R(\omega) = \frac{(1-\omega^2+\omega^4)^2}{(\omega^4-4\omega^2+3)^2+\omega^2(\omega^4-6\omega^2+8)^2}.$$

P. 15. Se presupune că fiecare funcție din problema 14 este modulul la pătrat pe axa j a unei funcții de circuit. Găsiți funcția. Dacă există mai multe posibilități, găsiți-le.

P. 16. Deduceți formula (103) din text, pornind de la (101).

P. 17. Deduceți formula (104) din text.

P. 18. Deduceți teorema integralei de reactanță din (85) prin integrarea funcției $F(s)/s$ pe conturul de bază, cu o mică ocolire în jurul originii.

P. 19. Deduceți teorema integralei rezistenței din (89) prin integrarea fuecției $F(s)-R\cdot(\infty)$ pe conturul de bază format din axa $j\omega$ și un semicerc la dreapta axei $j\omega$ de rază infinită.

P. 20. Deduceți (79) prin integrarea funcției $F(z)/(z^2+\omega^2)$ pe conturul de bază, cu ocolirea punctelor $z=\pm j\omega$.

P 21. Deduceți (80) prin integrarea funcției $z[F(z)-R(\infty)]/(z^2+\omega^2)$ pe conturul de bază, cu ocolirea punctelor $z=\pm j\omega$.

P. 22. Prin integrarea funcției $[F(z)-R(0)]/z(z^2+\omega^2)$ pe conturul de bază, cu ocolirea punctelor $z=0$ și $z=\pm j\omega$, deduceți următoarea relație

$$R(\omega) = R(0) - \frac{2\omega^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{X(y)/y - X(\omega)/\omega}{y^2-\omega^2}\,dy.$$

Comparați-o cu relația (82 a) din text.

P 23. Fiecare din curbele din fig.6.P.23 reprezintă modulul $|F(j\omega)|$ al unei funcții de transfer, pentru $\omega > 0$. Presupunînd că funcția este de fază minimă, prin aproximări potrivite găsiți funcția de fază corespunzătoare.

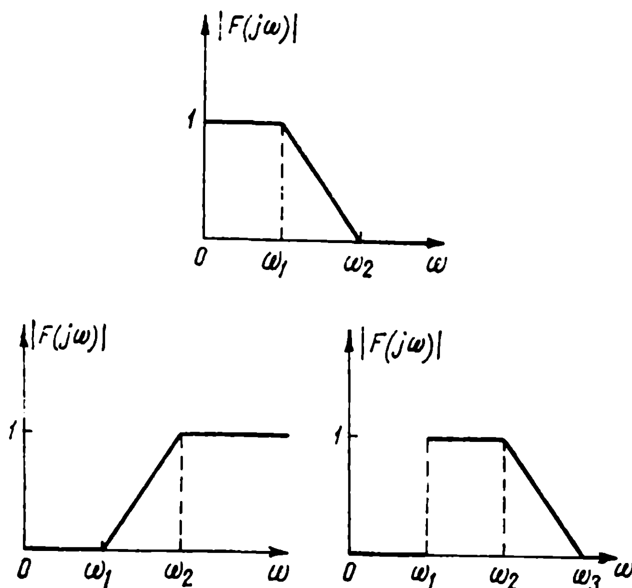


Fig. 6. P. 23.

P 24. Funcția de tip maxim plat din (32) este modulul unei funcții. Arătați că faza este dată de următoarea expresie

$$\Phi(\omega) = -\frac{n}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1/y}{1 + y^{-2n}} \ln\left|\frac{y+\omega}{y-\omega}\right| dy .$$

P 25. Partea reală a unei funcții pe axa $j\omega$ este dată de funcțiile de mai jos. Găsiți răspunsul la treapta unitate folosind (113 *b*) și răspunsul la impulsul unitate folosind (114 *c*).

(a) $R(\omega) = \dfrac{1}{4\,\omega^6 + 12\,\omega^4 + 11\,\omega^2 + 3}$, (b) $R(\omega) = \dfrac{(1-\omega^2)^3}{1+\omega^6}$,

(c) $R(\omega = \dfrac{1 + 2\omega^2 + \omega^4}{1 - 2\omega^2 + \omega^4 + 4\omega^6}$, (d) $R(\omega) = \dfrac{1}{1+\omega^{2n}}$.

P 26. Se presupune că partea imaginară a unei funcții de circuit este arătată în fig. 6.P.26. Folosiți (113 *a*) pentru a calcula $w_u(t)$ și apoi (107 *a*) pentru a determina partea reală a funcției de circuit.

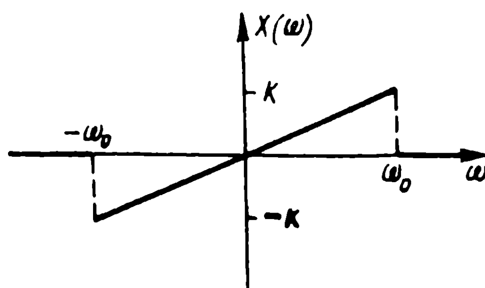


Fig. 6. P. 26.

P 27. Se presupune că răspunsul la treapta unitate $w_u(t)$ al unui circuit este arătat în fig. 6.P.27. Folosiţi (107 *a*) pentru a determina $R(\omega)$ şi (114 *c*) pentru a determina răspunsul la impulsul unitate $w_\delta(t)$. Verificaţi acest rezultat prin determinarea lui $w_\delta(t)$ direct din $w_u(t)$.

Următoarele trei probleme marcate cu asterisc cer întocmirea unui program pe calculator pentru a ajuta la găsirea soluţiei anumitor probleme. În fiecare caz întocmiţi o schemă logică şi un set de instrucţiuni în orice limbaj uzual, preferabil FORTRAN IV, pentru întocmirea unui program pe un calculator digital. Includeţi un set de instrucţiuni uzuale pentru program.

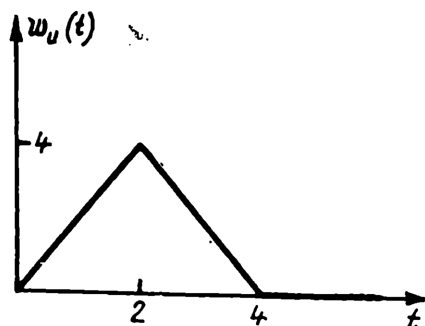


Fig. 6. P. 27.

P 28 * Se presupune că $f(\omega^2)$ din (41) este o funcţie raţională de ω^2. Fie $f(\omega^2)$ caracterizat de o listă de numere. Primele două numere vor fi gradul numărătorului şi al numitorului; ele vor fi urmate de un set de numere ce reprezintă coeficienţii numărătorului şi numitorului. Alcătuiţi un program care acceptă aceste date ca o descriere a funcţiei $f(\omega^2)$ şi calculaţi funcţia de fază minimă stabilă $F(s)$, unde $F(j\omega)$ satisface (41). Presupuneţi că există o subrutină pentru determinarea zerourilor unui polinom [1]).

P 29*. Alcătuiţi un program pentru a determina funcţia de fază minimă stabilă $F(s)$ din tan $\Phi(\omega)$, care se presupune a fi o funcţie raţională de ω. Utilizaţi un format de date (de intrare) similar cu cel din problema **P.28**. Presupuneţi că există o subrutină pentru determinarea zerourilor unui polinom.

P 30*. Alcătuiţi un program pentru a determina $F(s)$ din Par $F(s)$ folosind: (*a*) metoda Bode; (*b*) metoda Gewertz: (*c*) metoda Miyata. Utilizaţi un format de date (de intrare) similar cu cel din problema **P.28.** Presupuneţi că există o subrutină pentru determinarea zerourilor unui polinom.

---

[1]) Un algoritm care poate fi baza unei astfel de subrutine este algoritmul diferenţă raport. Acest algoritm este descris în H. Henrici, *Elements of Numerical Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1964, Chap. 8.

7

Principii de bază ale sintezei circuitelor

Sinteza circuitelor se ocupă de proiectarea şi realizarea circuitelor. pentru care răspunsul la o anumită excitaţie este prescris. Problemele de sinteză diferă de cele de analiză, în care se cere să se găsească răspunsul unui circuit cunoscut, atunci cînd i se aplică o excitaţie prescrisă. În opoziţie cu analiza, în cazul sintezei, soluţia poate să nu fie unică. De fapt în sinteză se poate întîmpla să nu existe soluţie, deoarece uneori nu există nici un circuit care să aibă răspunsul prescris la excitaţia dată. În acest ultim caz poate să apară necesitatea, de a aproxima răspunsul dorit cu unul care poate fi obţinut.

Prescrierea răspunsului şi aproximarea acestuia poate să se facă în domeniul timp, sau în domeniul frecvenţă. În domeniul frecvenţă, rezultatul procesului de aproximare este determinarea uneia sau a mai multor funcţii de circuit, care caracterizează circuitul dorit. Cunoscînd aceste funcţii este necesar ca, în continuare, să se găsească (să se realizeze) circuitul. În realizarea concretă trebuie să se ţină seama că există diferite clase de circuite. Aceste clase pot să fie caracterizate prin numărul de borne accesibile din exterior, prin tipul componentelor (fără pierderi active, *RC* etc.), prin schemă (în scară, cu bornă de pămînt etc.) ş.a.m.d.

Prima sarcină a procesului de realizare constă în determinarea proprietăţilor funcţiilor de circuit, care aparţin fiecărei clase a circuitelor. Aceste proprietăţi includ localizarea admisibilă a polilor şi zerourilor, semnele reziduurilor şi ale părţilor reale, precum şi mărimea relativă a coeficienţilor. Asupra acestei sarcini ne vom concentra pe larg în acest capitol.

În scopul stabilirii proprietăţilor analitice ale funcţiilor de circuit, va fi necesar să introducem cîteva probleme matematice suplimentare.

Primele două paragrafe sînt consacrate acestor probleme. Nu vom urmări ca expunerea să fie totdeauna completă, mulţumindu-ne numai cu formularea rezultatelor, urmată de unele discuţii asupra plauzibilităţii lor.

7.1. TRANSFORMAREA MATRICELOR

Dîndu-se o matrice patrată **A**, asupra acesteia se pot efectua operaţii, care să conducă la o altă matrice **B**. Această matrice va fi, desigur, legată de matricea originară **A**, iar relaţiile de legătură vor depinde de operaţiile efectuate. Se spune că matricea **A** a fost *transformată* într-un modoarecare.

Transformări elementare

Unele operaţii specifice de transformare au o importanţă deosebită. Aceste operaţii foarte simple sînt numite cu un termen general *transformări elementare*. Dîndu-se o matrice **A**, transformările elementare ale matricei **A** sînt următoarele :

1. *Schimbarea reciprocă a două linii sau a două coloane oarecare din* **A**.

2. *Adunarea elementelor unei linii, sau coloane din* **A** *la elementele corespunzătoare ale altei linii, sau coloane din* **A**.

3. *Inmulţirea fiecărui element al unei linii, sau coloane din* **A**, *cu o constantă.*

Bineinţeles, aceste transformări nu modifică ordinul matricei **A**. Conform proprietăţilor determinanţilor, studiate în Capitolul 1, prima transformare schimbă numai semnul determinantului **A**; a doua nu modifică determinantul; cea de a treia înmulţeşte determinantul cu o constantă. Prin urmare, dacă matricea **A** este nesingulară, atunci matricea obţinută după o transformare elementară este de asemenea nesingulară. De fapt, o transformare elementară a unei matrice nu-i poate modifica rangul, chiar atunci cînd rangul este mai mic decît ordinul matricei. (A se vedea Problema P. 5).

Operaţiile efectuate asupra matricei **A** prin transformări elementare pot fi realizate înmulţind pe **A** cu matrice simple nesingulare. Aceste matrice, numite *matrice elementare*, se obţin la rîndul lor efectuînd operaţia corespunzătoare asupra matricei unitate. Astfel, adunînd linia a treia, la linia a doua a unei matrice unitate de ordinul trei, se obţine matricea elementară din stînga, de mai jos; în mod similar, adunînd coloana

a treia la a doua coloană, a matricei de ordinul trei se obține matricea elementară din dreapta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dacă o matrice **A**, cu trei linii este *pre*multiplicată cu matricea elementară din stînga, efectul este că se adună linia a treia din **A** la linia a doua. Dacă o matrice **A**, cu trei coloane este *post*multiplicată cu matricea elementară din dreapta, efectul este că se adună a treia coloană din **A**, la coloana a doua. Astfel

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}+a_{31} & a_{22}+a_{32} & a_{23}+a_{33} & a_{24}+a_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+a_{33} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Observăm că **A** poate să nu fie pătrată; bineînțeles **A** trebuie să fie conformă matricei elementare (așa cum s-a arătat mai înainte).

Deoarece o transformaree lementară nu modifică rangul unei matrice unitate, *orice matrice elementară este nesingulară.* Deoarece produsul a două matrice nesingulare este nesingular, se ajunge la concluzia că, *produsul între un număr oarecare de matrice elementare este nesingular.* O problemă de importanță mai mare este următoarea: concluzia este aplicabilă în sens invers? Orice matrice nesingulară poate fi descompusă in matrice elementare? Răspunsul este afirmativ. Se poate arăta că *orice matrice nesingulară poate fi scrisă ca un produs al unui număr finit de matrice elementare.*

Pentru exemplificare să presupunem că se cere: (1) să se adune linia întîia a unei matrice **A** (4×3), la linia a treia, după multiplicarea primei linii cu 5 și (2) să se schimbe între ele coloanele trei și doi, după

ce coloana a doua a fost înmulţită cu 3. Cele două matrice care vor realiza aceste transformări sînt:

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prima trebuie să premultiplice pe **A**, iar a doua să postmultiplice pe **A**. Cititorul poate să verifice acest rezultat.

Prezentarea unor detalii asupra matricelor elementare se va face printr-un număr important de probleme. În dezvoltarea care urmează se presupune că rezultatele acestor probleme sînt cunoscute.

Matrice echivalente

Fie **A** şi **B** două matrice de acelaşi ordin. Spunem că B este *echivalentă* cu **A** dacă aceasta se poate obţine din **A** printr-un număr finit de transformări elementare. Dacă toate transformările sînt efectuate asupra liniilor, **B** este *echivalentă* cu **A**, *în raport cu liniile*; dacă toate transformările operează asupra coloanelor, **B** este *echivalentă* cu **A**, *în raport cu coloanele*. Efectuarea unui număr de transformări elementare revine la inmulţirea matricei **A**, cu produsul unui număr de matrice elementare. Un astfel de produs poate fi reprezentat printr-o singură matrice care este, cu necesitate, nesingulară, deoarece fiecare matrice elementară este nesingulară. Prin urmare, definiţia generală a echivalenţei poate fi reformulată astfel:

Teorema 1. *Fie* **A** *şi* **B** *două matrice de acelaşi ordin. Matricea* **B** *este echivalentă cu* **A**, *dacă şi numai dacă*;

$$\mathbf{B} = \mathbf{PAQ} \tag{1}$$

unde **P** *şi* **Q** *sînt nesingulare.*

Deoarece **P** şi **Q** sînt nesingulare, rezultă că $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}$. Această relaţie are aceeaşi formă ca şi (1), deci, dacă **B** este echivalent cu **A**, atunci şi **A** este echivalent cu **B**; rezultă că echivalenţa a două matrice este o proprietate reciprocă.

Deoarece o transformare elementară nu modifică rangul unei matrice, o succesiune de transformări elementare menţine rangul matricei neschimbat. Prin urmare, două matrice echivalente au acelaşi rang. În particular dacă o matrice pătratică, **A**, este nesingulară şi o matrice echivalentă cu **A** este de asemenea nesingulară.

De fapt, dacă **A**, este o matrice nesingulară, aceasta poate fi redusă totdeauna la o matrice unitară, prin transformări elementare succesive; aceasta înseamnă că oricînd vor exista nişte matrice **P** şi **Q** nesingulare (fiecare din ele fiind un produs de matrice elementare), astfel încît:

$$\mathbf{PAQ} = \mathbf{U} \tag{2}$$

Deci

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{PAQ})\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}. \tag{3}$$

Astfel, dacă **A** este nesingulară, aceasta poate fi oricînd factorizată într-un produs de două matrice nesingulare $\mathbf{P}^{-1}$ şi $\mathbf{Q}^{-1}$. Aceasta este desigur o demonstraţie de „existenţă"; nu se menţionează vre-un algoritm care să efectueze factorizarea.

Faptul că, o matrice nesingulară este echivalentă cu o matrice unitate, aşa cum se arată în (2) este un caz particular al unei proprietăţi mai generale. Fie **A** o matrice de ordinul $(m \times n)$ şi de rang r. Prin transformări elementare **A** se poate reduce totdeauna la o matrice **B** de forma:

$$\mathbf{B} = \mathbf{PAQ} = \begin{array}{c} \\ r \\ m-r \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{U}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{4}$$

Submatricea din stînga — sus este o matrice unitate de ordinul r. Dacă **A** este patrată şi nesingulară, $n = m = r$ şi (4) se reduce la (2). Matricea din dreapta relaţiei (4) se numeşte *formă normală a matricei* **A**.

Să presupunem că în (1) $\mathbf{Q} = \mathbf{U}$; rezultă că $\mathbf{B} = \mathbf{PA}$. Matricea nesingulară **P** este produsul matricelor elementare. Înmulţirea lui **A** cu **P** conduce la efectuarea unor transformări elementare asupra liniilor din **A**. În matricea produs **B**, rezultă linii care sînt simple combinaţii lineare ale liniilor din **A**. În consecinţă, dacă două matrice sînt echivalente în raport cu liniile, liniile uneia sînt combinaţii lineare ale liniilor celeilalte şi vice versa. În mod similar, dacă două matrice sînt echivalente în raport cu coloanele, coloanele uneia sînt combinaţii liniare ale coloanelor celeilalte; de exemplu, în Capitolul 2 s-a găsit că matricea $\mathbf{Q}_f$ a unui grup tăiat fundamental, relativ la un circuit, se obţine premultiplicînd matricea de incidenţă **A** cu matricea nesingulară $\mathbf{A}_t$. Astfel, este de aşteptat ca liniile lui $\mathbf{Q}_f$ să fie combinaţii liniare ale liniilor lui **A**, sau în mod echivalent, ecuaţiile grupului tăiat, să fie combinaţii liniare, ale ecuaţiilor corespunzătoare legii lui Kirchhoff pentru curenţi la nod, ceea ce ştim că este adevărat.

Transformări similare

În relaţia de echivalenţă (1) nu este necesar ca între matricele **P** şi **Q** să existe vreo legătură. Totuşi, cînd există anumite legături, echivalenţa conduce la unele proprietăţi importante, astfel că este util ca transformările corespunzătoare să fie numite şi clasificate.

Să presupunem că matricea **A** din (1) este patrată, iar $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$. Atunci

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} \tag{5a}$$

sau

$$\mathbf{Q}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{Q}. \tag{5b}$$

Această transformare este o *transformare similară;* **A** şi **B** se numesc matrice *similare*. Această transformare a fost deja discutată în capitolul 1, unde am văzut că două matrice similare au aceleaşi valori proprii. Includerea transformării aici s-a făcut pentru o tratare completă.

Trasformări congruente

Un alt fel de echivalenţă particulară este următoarea. Să presupunem că in (1) $\mathbf{P} = \mathbf{Q}'$. Atunci, transformarea

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q} \tag{6}$$

se numeşte *transformare congruentă*; se zice că **B** este *congruentă cu* **A**.

Deoarece **Q** se poate scrie ca un produs de matrice elementare, **Q'** va fi egală cu produsul transpuselor acestor matrice elementare, considerate in ordine inversă. Prin urmare $\mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q}$ se obţine din **A**, efectuînd perechi de transformări elementare, o transformare asupra liniilor, urmată de o transformare corespunzătoare asupra coloanelor.

O comparaţie între transformarea similară din (5) şi transformarea congruentă din (6) arată că acestea ar fi identice dacă $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}'$. Acestei proprietăţi i se acordă o denumire specială. O matrice avînd proprietatea :

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}' \tag{7}$$

se numeşte matrice *ortogonală*.

Dacă **A** este o matrice reală, simetrică, de rang r, se poate arăta, cu ajutorul unor transformări elementare, că aceasta este congruentă cu o matrice diagonală **D**, de forma

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

în care $\mathbf{D}_r$ este o matrice diagonală de ordin r şi rang r, iar $\mathbf{Q}$ este nesingulară. Aceasta seamănă cu forma normală din (4), dar există nişte diferenţe. În cazul general $\mathbf{A}$ poate să nu fie pătratică şi cele două matrice $\mathbf{P}$ şi $\mathbf{Q}$ pot să fie independente.

Elementele diagonale ale lui $\mathbf{D}$ pot să fie pozitive, sau negative. Liniile şi coloanele pot fi totdeauna schimbate reciproc, astfel încît elementele pozitive să fie plasate la început. Produsul matricelor elementare corespunzătoare poate fi concentrat în $\mathbf{Q}$. Dacă termenii pozitivi şi negativi sînt explicitaţi, rezultatul poate fi scris astfel:

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{D}_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p & 0 \\ 0 & -\mathbf{D}_{r-p} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

unde atît $\mathbf{D}_p$ cît şi $\mathbf{D}_{r-p}$ sînt matrice diagonale cu elemente diagonale pozitive, ordinul şi rangul lui $\mathbf{D}_p$ fiind p, iar ordinul şi rangul lui $\mathbf{D}_{r-p}$ fiind $r-p$.

Să definim acum matricea:

$$\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{D}_{r-p}^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{U} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

unde:

$$\mathbf{D}_p^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} d_1^{-\frac{1}{2}} & & \bigcirc \\ & d_2^{-\frac{1}{2}} & \\ \bigcirc & & \ddots \; d_p^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D}_{r-p}^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} d_{p+1}^{-\frac{1}{2}} & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & d_r^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Apoi, după o transformare congruentă a lui $\mathbf{D}$, cu ajutorul lui $\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}$, (9) se poate scrie astfel

$$(\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}})'\mathbf{D}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} = (\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}})'\mathbf{A}(\mathbf{Q}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_p & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{U}_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{C}. \tag{12}$$

Deoarece $\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}$ este nesingulară şi $\mathbf{Q}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}$ este nesingulară. Prin urmare, în partea dreaptă avem de fapt o transformare congruentă a lui $\mathbf{A}$.

Această matrice se numeşte *matrice canonică*; se spune că, transformarea congruentă a lui **A** din (12) pune pe **A** în *formă canonică*. Numărul intreg p din această expresie se numeşte *indicele matricei*.

7.2. FORME PĂTRATICE ŞI HERMITICE

Subiectul acestui paragraf este o formă matematică, ce apare în circuite, în urma unor consideraţii de putere disipată sau energie acumulată. Pentru a explica cum apare aceasta, înainte de a dezvolta proprietăţile sale matematice, să considerăm un circuit pur rezistiv, cu matricea rezistenţelor de laturi **R**; vectorii tensiune şi curent de latură sînt la un moment dat $\mathbf{v}(t)$ şi $\mathbf{i}(t)$. Puterea disipată în circuit la o valoare oarecare a timpului este $p(t) = \mathbf{i}(t)' \mathbf{v}(t)$. Dacă se introduce relaţia relativă la laturi $\mathbf{v} = \mathbf{Ri}$, atunci puterea devine

$$p = \mathbf{i}(t)' \mathbf{v}(t) = \mathbf{i}' \mathbf{R}\mathbf{i}. \tag{13}$$

De exemplu, pentru un circuit cu trei laturi, mărimea expresiei din dreapta este:

$$\mathbf{i}'\mathbf{R}\mathbf{i} = [i_1 \ i_2 \ i_3] \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

$$= R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2.$$

Această expresie este pătratică în raport cu curenţii şi ilustrează ceea ce dorim să prezentăm aici. Pentru a sublinia că rezultatele sînt generale vom utiliza o notaţie în formă generală.

Definiţii

Fie $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, o matrice reală pătrată şi $\mathbf{x} = [x_i]$ un vector coloană, real sau complex. Expresia:

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \cdots x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \tag{14}$$

cu $\mathbf{x}$ considerat vector real (adică avînd elemente x_i reale) şi expresia

$$\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = [\bar{x}_1\ \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \tag{15}$$

cu $\mathbf{x}$ considerat vector complex, se numesc *forme pătratice*. Justificarea acestei denumiri apare clar dacă se efectuează multiplicarea matricelor menţionate, ceea ce dă:

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j \tag{16}$$

atunci cînd x-urile sînt reale şi

$$\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \bar{x}_i\, x_j \tag{17}$$

atunci cînd x-urile sînt complexe. Constatăm că acestea sînt expresii omogene de gradul 2 în variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Matricea $\mathbf{A}$ din relaţiile (14)—(17) se numeşte *matrice a formei pătratice*. Vom considera că x-urile sînt variabile astfel că matricea defineşte în principal forma pătratică. Ne vom preocupa de forme pătratice în care matricea $\mathbf{A}$ este reală şi simetrică. În realitate, *orice* formă pătratică reală, cu o matrice reală, poate fi transformată într-o formă pătratică cu o matrice simetrică, deoarece avînd x-urile şi a_{ij}-urile reale se poate scrie

$$a_{ij}\, x_i\, x_j + a_{ji}\, x_j\, x_i = 2\left(\frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}\right) x_i\, x_j. \tag{18}$$

Se vede că, contribuţia celor doi termeni din stînga acestei ecuaţii la forma pătratică rămîne neschimbată, dacă înlocuim pe a_{ij} şi a_{ji} din matrice cu jumătate din suma lor. Astfel dacă $\mathbf{A}$ nu este simetrică vom defini matricea simetrică $\mathbf{B}$ ca fiind;

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}'). \tag{19}$$

Matricea $\mathbf{B}$ se numeşte partea simetrică a lui $\mathbf{A}$. Acestă operaţie menţine elementele diagonale din $\mathbf{A}$ nemodificate, în timp ce elementele din afara

diagonalei sînt modificate în modul arătat. Din discuţiile precedente rezultă că

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x}. \tag{20}$$

Să ne concentrăm acum atenţia, asupra unei forme pătratice în care vectorul $\mathbf{x}$ este complex. Atita timp cît matricea $\mathbf{A}$ a formei pătratice este reală şi simetrică, forma pătratică $\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x}$ va fi reală. Pentru a demonstra aceasta să observăm că

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_i x_j &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\bar{x}_i x_i + \sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}|x_i|^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\bar{x}_i x_j + \bar{x}_j x_i) \qquad (21)\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}|x_i|^2 + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{Re}(\bar{x}_i x_j).\end{aligned}$$

Rîndul al doilea este o consecinţă a simetriei lui $\mathbf{A}$, iar ultimul termen, din ultimul rînd rezultă din faptul că $\bar{x}_j x_i$ este conjugatul lui $\bar{x}_i x_j$. În ultimul rînd toţi termenii sînt acum reali ceea ce demonstrează afirmaţia noastră.

Transformarea unei forme pătratice

Să observăm acum ce se întîmplă cu o formă pătratică dacă vectorul $\mathbf{x}$ este supus unei transformări lineare, nesingulare şi reale. Fie $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, unde $\mathbf{Q}$ este nesingulară iar $\mathbf{y}$ este un vector coloană. Forma pătratică devine :

$$\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{Q}\mathbf{y})^*\mathbf{A}(\mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^*(\mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q})\mathbf{y}, \tag{22}$$

unde s-a ţinut seama că $\mathbf{Q}$ este reală şi s-a scris $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}'$. În interiorul parantezei găsim o transformare congruentă a lui $\mathbf{A}$. S-a constatat mai înainte că, o matrice reală, simetrică $\mathbf{A}$ poate fi redusă totdeauna la forma canonică din (12) utilizînd o transformare nesingulară, congruentă. Prin urmare, forma pătratică se poate reduce la :

$$\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^*\mathbf{C}\mathbf{y} = |y_1|^2 + |y_2|^2 + \cdots + |y_p|^2 - |y_{p+1}|^2 - \cdots - |y_r|^2. \tag{23}$$

Acest rezultat ne permite să formulăm următoarea teoremă:

Teorema 2. *Orice formă pătratică, reală* $\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x}$ *în care* $\mathbf{A}$ *este reală și simetrică poate fi redusă, cu ajutorul unei transformări lineare, nesingulare și reale* $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, *la forma canonică din (23) în care r este rangul lui* $\mathbf{A}$, *iar p este indicele.*

Aceasta este evident, o teoremă de existență și nu ne dă nici o indicație asupra modului în care s-ar putea găsi transformarea lineară potrivită. Un procedeu care permite aceasta este cel numit *reducere de tip Lagrange*, care constă din repetarea unui procedeu similar completării pătratului. Să ilustrăm aceasta, printr-un număr de exemple.

Exemple

1. Pentru simplificare, să presupunem că $\mathbf{x}$ este un vector real. Fie

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = [x_1\ x_2]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_1^2 + 4x_1 x_2 + 2x_2^2$$

$$= x_1^2 + 4x_1 x_2 + (4x_2^2 - 4x_2^2) + 2x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2)^2 - 2x_2^2.$$

În aceste operații $4x_2^2$ a fost adunat și scăzut pentru a completa pătratul perfect. Acum să notăm

$$y_1 = x_1 + 2x_2 \qquad\qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$
$$y_2 = \sqrt{2x_2} \qquad \text{sau}$$

Atunci

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = y_1^2 - y_2^2 = [y_1\ \ y_2]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

În acest caz, rangul lui $\mathbf{A}$ este egal cu ordinul său (2), iar indicele este 1.

2. Acum să considerăm că $\mathbf{x}$ este un vector complex și că

$$\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = [\bar{x}_1\ \ \bar{x}_2\ \ \bar{x}_3]\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \bar{x}_1 - \bar{x}_1 x_2 + 3\bar{x}_1 x_3 - \bar{x}_2 x_1 + 2x_2 \bar{x}_2 + 3\bar{x}_3 x_1 + 14\, x_3 \bar{x}_3.$$

$$= [x_1 \bar{x}_1 - x_1(\bar{x}_2 - 3\,\bar{x}_3) - \bar{x}_1(x_2 - 3x_3)] + (2x_2\,\bar{x}_2 + 14\, x_3\,\bar{x}_3).$$

Primul set de termeni poate fi scris ca un modul la pătrat, adunînd $(x_2+3x_3)(\bar{x}_2+3\bar{x}_3)$, ceea ce înseamnă că aceeași mărime trebuie scăzută din al doilea set de termeni. Rezultatul acestei operații este:

$$\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = (x_1-x_2+3x_3)(\bar{x}_1-\bar{x}_2+3\bar{x}_3)+(x_2\bar{x}_2+3x_2\bar{x}_3+3\bar{x}_2x_3)+5x_3\bar{x}_3$$

$$= (x_1-x_2+3x_3)(\bar{x}_1-\bar{x}_2+3\bar{x}_3)+(x_2+3x_3)(\bar{x}_2+3\bar{x}_3)-4x_3\bar{x}_3.$$

În ultima etapă, $9x_3\bar{x}_3$ a fost adunat şi scăzut pentru „completarea pătratului" din etapa precedentă. Acum să notăm

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2 + 3x_3 \\ y_2 &= \phantom{x_1 - {}} x_2 + 3x_3 \\ y_3 &= \phantom{x_1 - x_2 + {}} 2x_3 \end{aligned} \quad \text{sau} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

În final, forma pătratică devine:

$$\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = |y_1|^2 + |y_2|^2 - |y_3|^2. \tag{24}$$

Forme definite şi semidefinite

Din (23) se poate observa că valorile formei pătratice vor depinde în mod normal de valorile variabilelor y. Totuşi, se poate întîmpla ca valorile formei pătratice să nu depindă, ca semn, de valorile variabilelor. Astfel de forme se numesc *definite*. În particular, o formă pătratică reală $\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x}$ se numeşte *definită pozitiv*, dacă pentru orice set de numere complexe, sau reale: $x_1, x_2, \dots x_n$, care nu sînt toate nule, valoarea formei pătratice este strict pozitivă. În mod similar, spunem că forma pătratică este *semidefinită pozitiv* dacă

$$\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant 0 \tag{25}$$

pentru toţi $\mathbf{x} \neq 0$, presupunînd că există cel puţin un set de valori ale variabilelor, pentru care relaţia este satisfăcută cu semnul egalităţii. Deoarece proprietatea de pozitivitate a unei astfel de forme pătratice, nu depinde de valorile variabilei, aceasta trebuie asociată cu matricea $\mathbf{A}$ a formei pătratice. Terminologia care urmează pare astfel cu totul naturală. *O matrice* $\mathbf{A}$, *reală şi simetrică se consideră a fi definită, sau semidefinită pozitiv, după cum forma pătratică* $\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x}$ *este definită, sau semidefinită pozitiv.*

Trebuie să găsim nişte mijloace de a determina dacă o formă pătratică este sau nu este pozitiv definită sau semidefinită. În acest scop să examinăm forma canonică din (23). Matricea $\mathbf{A}$ a acestei forme este caracterizată prin trei numere întregi: ordinul n, rangul k şi indicele p. Dacă indicele este mai mic decît rangul (dar mai mare ca zero), matricea poate să nu fie nici definită pozitiv, nici semidefinită pozitiv.

Să presupunem că indicele este egal cu rangul: $p = r$. Atunci toate semnele din (23) vor fi pozitive. Există două posibilităţi: (1) rangul să fie egal cu ordinul, $r = n$, astfel că $\mathbf{A}$ este nesingulară; sau (2) $r < n$ astfel că $\mathbf{A}$ este singulară. Să presupunem că $r < n$. Atunci vom alege pe

y_1, pînă la $y_r = 0$ şi pe y_{r+1}, pînă la $y_n \neq 0$. Aceasta va face ca forma pătratică să se anuleze, dar pentru $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, nu toate x-urile vor fi nule. Pentru oricare alte valori ale variabilelor y, forma pătratică va fi pozitivă. Deci forma pătratică satisface relaţia (25) şi este semidefinită pozitiv. Afirmaţia reciprocă este şi ea desigur adevărată.

Pe de altă parte, dacă $r = n$ (cu p tot egal cu r), atunci $\mathbf{A}$ este nesingulară, prin urmare orice alegere a unor y—ci (deci şi a x-urilor) nenule va conduce la o valoare pozitivă a formei pătratice. În concluzie, rezultă următoarea teoremă :

Teorema 3. *O formă pătratică avînd o matrice reală, simetrică* $\mathbf{A}$, *de ordin* n, *rang* r *şi indice* p *este definită pozitiv, dacă şi numai dacă* $\mathbf{A}$ *este nesingulară, iar indicele este egal cu rangul*: $p=r=n$. *Forma pătratică este semidefinită, pozitiv dacă* $\mathbf{A}$ *este nesingulară şi* $p = r$.

Dacă o formă pătratică este definită pozitiv, atunci, aşa cum rezultă din (23), matricea sa canonică va fi o matrice unitară ; aceasta înseamnă că transformarea liniară nesingulară $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ conduce la

$$\mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{U}. \tag{26}$$

Este posibil să se găsească determinantul lui $\mathbf{A}$ luind determinantul in ambele părţi ale expresiei. Deoarece det $\mathbf{U} = 1$, iar determinantul unui produs de matrice de acelaşi ordin este egal cu produsul determinanţilor. vom avea

$$(\det \mathbf{Q}')\ (\det \mathbf{A})\ (\det \mathbf{Q}) = 1. \tag{27}$$

Deoarece $\mathbf{Q}$ şi transpusa sa au acelaşi determinant, care este nenul fiindcă $\mathbf{Q}$ este nesingulară, obţinem :

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{(\det \mathbf{Q})^2}. \tag{28}$$

Acest rezultat exprimă faptul că determinantul unei matrice definită pozitiv este pozitiv. Mai departe, să presupunem că luăm ultima valoare a variabilei x_n, în formă pătratică, egală cu zero. Atunci nici unul din coeficienţii a_{ni} sau a_{in} ai matricei $\mathbf{A}$ nu va apare în forma pătratică. Aceasta se poate vedea cel mai uşor în (16) cu $x_n = 0$. Prin urmare am putea, la fel de bine, să îndepărtăm linia şi coloana n din $\mathbf{A}$ şi să considerăm că $\mathbf{A}$ este de ordinul $(n-1)$. Şi pentru această nouă matrice se aplică relaţia (28). Dar determinantul matricei noi este cofactorul principal al matricei dinainte, obţinut prin suprimarea ultimei linii şi coloane. Deoarece permutarea variabilelor nu are nici un efect asupra formei pătratice, nu are nici o importanţă care anume din variabile este numită x_n. Rezultă că oricare din primii cofactori principali, de la o matrice definită pozitiv, va

fi pozitiv. Această argumentare poate fi repetată luînd două din variabile egale cu zero, apoi trei, şi aşa mai departe pînă la ultima, pe care o menţinem nenulă. Vom găsi că toţi cofactorii principali ai matricei **A** sînt pozitivi. În ultimul caz, menţinînd ultima variabilă nenulă, vom găsi că toate elementele situate pe diagonala principală din **A** trebuie să fie pozitive. (Aceste elemente reprezintă cofactori principali de ordinul $(n-1)$).

Ceea ce am reuşit să demonstrăm este faptul că, atunci cînd se ştie că o matrice este definită pozitiv, toţi determinanţii săi şi toţi principalii cofactori sînt pozitivi. De fapt, ceea ce ne trebuie în tratarea unei matrice date este afirmaţia reciprocă celei arătate mai înainte. Întîmplător şi reciproca este adevărată. Demonstraţia reciprocei fiind relativ lungă nu va fi dată aici. Pentru consideraţiile care urmează este util să formulăm acest rezultat sub forma unei teoreme.

Teorema 4. *O matrice* **A**, *simetrică şi reală este definită pozitiv, dacă şi numai dacă, determinantul său şi cofactorii principali sînt pozitivi. Matricea este semidefinită pozitiv dacă determinantul său este zero, iar cofactorii săi principali sînt nenegativi.*

Ca un exemplu, să considerăm matricea reală utilizată mai înainte pentru ilustrarea reducerii de tip Lagrange. Se cere să se formeze determinantul său şi cofactorii principali.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 14 \end{bmatrix}.$$

Observăm că toate elementele din diagonală sînt pozitive. Deoarece matricea este de ordinul trei, elementele din diagonală sînt cofactori de ordinul al doilea. Primii cofactori principali pot fi formaţi uşor:

$$\Delta_{11} = 28,\ \Delta_{22} = 5,\ \Delta_{33} = 1.$$

Aceştia sînt toţi pozitivi. Rămîne să se formeze determinantul care se găseşte egal cu -4. Acest număr este mai mic ca zero şi deci **A** nu este definită sau semidefinită pozitiv.

Forme hermitice

Pînă acum ne-am ocupat de forme pătratice avînd matrice simetrice şi reale. Dacă matricea unei forme pătratice este complexă, este posibil să înlocuim matricea prin partea sa hermitică, fără a modifica valoarea formei, la fel cum matricea reală era înlocuită cu partea sa simetrică. Fie **H** o matrice hermitică $(h_{ji} = \overline{h}_{ij})$. Expresia:

$$\mathbf{x}^*\mathbf{H}\mathbf{x} \tag{29}$$

se numeşte *formă hermitică*. Dacă **H** este real, forma hermitică se reduce la o formă pătratică. Este deci de aşteptat ca proprietăţile formei hermitice să fie analoge celor de la formele pătratice. Vom enumera cîteva din acestea fără comentarii suplimentare.

Efectuînd o dezvoltare ca şi cea din (21) pentru o formă pătratică, se poate arăta că *valoarea unei forme hermitice este reală.*

O formă hermitică de rang r poate fi redusă la forma canonică dată de partea dreaptă a reţelei (23), printr-o transformare lineară nesingulară $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, unde $\mathbf{Q}$ este în general complexă.

Termenii „definită pozitiv" se definesc în acelaşi mod ca şi pentru formele pătratice. Teorema relativă la determinant şi la cofactorii principali ai matricelor definite şi semidefinite pozitiv, se aplică de asemenea şi la matricele hermitice.

7.3. FUNCŢII DE ENERGIE

Acum, după ce bazele matematice au fost prezentate, sintem pregătiţi pentru a reveni la examinarea funcţiilor de circuit. Mai exact, vom lega unele funcţii de circuit de energia înmagazinată şi disipată în circuit. Apoi cunoscînd natura acestei energii, putem trage unele concluzii despre proprietăţile, funcţiilor de circuit.

Să considerăm un circuit multiport, excitat prin surse de tensiune la fiecare poartă. Fig. 1 arată utilizarea circuitului diport, dar discuţia se va purta pentru un multiport general.

Se presupune că circuitul, care este linear şi invariabil în timp este iniţial în repaus. Acum, să considerăm scrierea ecuaţiilor de contur la acest circuit. Referindu-ne la Cap. 2 dinainte, forma

$$\mathbf{Z}_m(s)\, I_m(s) = \mathbf{E}(s), \tag{30a}$$

$$\left(\mathbf{R}_m + s\,\mathbf{L}_m + \frac{1}{s}\mathbf{D}_m\right)\mathbf{I}_m(s) = \mathbf{E}(s), \tag{30b}$$

unde $\mathbf{Z}_m$ este matricea impedanţelor de contur, iar $\mathbf{R}_m$, $\mathbf{L}_m$ şi $\mathbf{D}_m$ sînt matricele parametrilor de contur; **E** este vectorul tensiunilor surselor

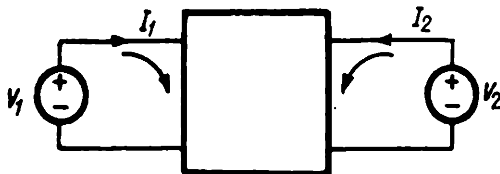


Fig. 7.1. Diport alimentat la ambele porţi.

echivalente de contur. Deoarece nu există alte surse în afara celor de la porţi şi contururile sînt alese astfel că, fiecare sursă de tensiune este situată numai într-un contur, iar orientarea contururilor, relativă la sursă este cea arătată în fig. 7.1, rezultă că un element al lui **E** va fi nenul, pentru contururi care includ o poartă şi 0 pentru ochiuri interne.

În (30), variabilele sînt transformatele Laplace ale tensiunilor şi curenţilor. Dacă excitaţiile sînt sinusoide de aceeaşi frecvenţă, sînt valabile aceleaşi expresii (30), în care se înlocuiesc variabilele transformate cu fazori şi s cu $j\omega$. (Vezi Problema 50). Să notăm cu indice p fazorii, de exemplu I_p este un număr complex a cărui amplitudine este media pătratică a curentului sinusoidal şi al cărui unghi este faza sa. Presupunînd că avem un n-port astfel că $\mathbf{E}_p$ are n componente nenule şi presupunînd că există m ochiuri şi deci $\mathbf{I}_{mp}$ are m componente, relaţia (30) devine:

$$\left\{\mathbf{R}_m + j\omega\left(\mathbf{L}_m - \frac{1}{\omega^2}\mathbf{D}_m\right)\right\}\begin{bmatrix} I_{mp1} \\ I_{mp2} \\ \\ \vdots \\ I_{mpm}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{p1} \\ V_{p2} \\ \vdots \\ V_{pn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}. \tag{31}$$

Să calculăm acum puterea cu care se alimentează circuitul. Puterea complexă care alimentează poarta k este $\bar{I}_{mpk}V_{pk}$. Puterea totală debitată la toate porţile este prin urmare $\mathbf{I}^{*}_{mp}\,\mathbf{E}_p$. Partea reală din aceasta este puterea medie reală. Partea imaginară este proporţională cu energia medie înmagazinată în circuit, deci cu diferenţa între energia medie înmagazinată în bobine şi capacităţi.

Astfel,

$$\operatorname{Re}\,(\mathbf{I}^{*}_{mp}\ \mathbf{E}_p) = P, \tag{32a}$$

$$\operatorname{Im}\,(\mathbf{I}^{*}_{mp}\ \mathbf{E}_p) = 2\omega\,(W_L - W_C). \tag{32b}$$

Puterea complexă de intrare în circuit poate fi obţinută premultiplicînd ambele părţi ale relaţiei (31) cu $\mathbf{I}^{*}_{mp}$. Rezultatul devine:

$$\mathbf{I}^{*}_{mp}\ \mathbf{R}_m\ \mathbf{I}_{mp} + j\omega\left(\mathbf{I}^{*}_{mp}\ \mathbf{L}_m\ \mathbf{I}_{mp} - \frac{1}{\omega^2}\mathbf{I}^{*}_{mp}\ \mathbf{D}_m\ \mathbf{I}_{mp}\right) = \mathbf{I}^{*}_{mp}\ \mathbf{E}_p$$

$$= \bar{I}_{p1}V_{p1} + \bar{I}_{p2}V_{p2} + \ldots + \bar{I}_{pn}V_{pn}. \tag{33}$$

În partea dreaptă apar numai curenţii de contur, care sînt şi curenţi la poartă astfel că, indicele m poate fi omis. Găsim că puterea complexă de intrare, din dreapta este egală cu suma celor trei termeni din stînga. Constatăm că fiecare din aceşti termeni este o formă pătratică.

Pentru un circuit nereciproc matricele parametrilor de contur nu sînt simetrice. Totuşi, aşa cum s-a arătat în paragraful precedent, valoarea formei pătratice nu se schimbă dacă matricea formei se înlocuieşte prin partea sa simetrică. Vom presupune că s-a realizat acest lucru. Fiecare din formele pătratice din stînga relaţiei (33) este reală. Prin urmare, comparaţia între (32) şi (33) conduce la concluzia că

$$\mathbf{I}_{mp}^{*}\mathbf{R}_{m}\mathbf{I}_{mp} = \text{puterea reală debitată în circuit}, \tag{34 a}$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{I}_{mp}^{*}\mathbf{L}_{m}\mathbf{I}_{mp} = \text{energia medie înmagazinată în bobine}, \tag{34 b}$$

$$\frac{1}{2\omega^{2}}\mathbf{I}_{mp}^{*}\mathbf{D}_{m}\mathbf{I}_{mp} = \text{energia medie înmagazinată în condensatoare}. \tag{34 c}$$

Se pot obţine expresii echivalente pentru fiecare din aceste forme pătratice. Matricea fiecărei forme este una din matricele parametrilor de contur. Revenind la cap. 2, găsim că matricele parametrilor de contur pot fi scrise în funcţie de matricele parametrilor pe laturi astfel

$$\mathbf{R}_{m} = \mathbf{BRB}', \tag{35a}$$

$$\mathbf{L}_{m} = \mathbf{BLB}', \tag{35b}$$

$$\mathbf{D}_{m} = \mathbf{BDB}', \tag{35c}$$

unde **R**, **L** şi **D** sînt matricele parametrilor pe laturi iar **B** este matricea de contur.

Să considerăm forma pătratică relativă la $\mathbf{R}_m$. Utilizînd (35*a*) se găseşte :

$$\mathbf{I}_{mp}^{*}\mathbf{R}_{m}\mathbf{I}_{mp} = \mathbf{I}_{mp}^{*}\,\mathbf{BRB}'\mathbf{I}_{mp} = (\mathbf{B}'\mathbf{I}_{mp})^{*}\,\mathbf{R}(\mathbf{B}'\mathbf{I}_{mp}). \tag{36}$$

Să ne amintim că, conform relaţiei (56) din Capitolul 2, $\mathbf{B}'\mathbf{I}_{mp} = \mathbf{I}_p$ este transformarea de contur care exprimă curenţii de laturi $\mathbf{I}_p$ prin curenţii de contur. Astfel

$$\mathbf{I}_{mp}^{*}\mathbf{R}_{m}\mathbf{I}_{mp} = \mathbf{I}_{p}^{*}\,\mathbf{RI}_{p} = \sum_{k=1}^{b}\sum_{j=1}^{b} R_{jk}\,\bar{I}_{pj}\,I_{pk}\,, \tag{37}$$

unde *b* este numărul laturilor din circuit. Pentru un circuit general, care nu este pasiv şi este nereciproc, nu se poate spune nimic deosebit despre această formă pătratică.

Circuite reciproce, pasive

Se restrîngem acum considerațiile noastre la circuitele reciproce pasive. În acest caz, matricea rezistențelor de laturi este diagonală. Acum (37) devine

$$\mathbf{I}^*_{mp} \mathbf{R}_m \mathbf{I}_{mp} = \mathbf{I}^*_p \mathbf{R} \mathbf{I}_p = \sum_{k=1}^{b} \mathbf{R}_k |\mathbf{I}_{pk}|^2. \tag{38}$$

Știm că puterea consumată în astfel de circuite nu poate fi negativă. Prin urmare, forma pătratică trebuie să fie cel puțin semidefinită pozitiv. Aceasta va fi definită pozitiv dacă nici o rezistență de latură nu va fi zero, deoarece în acest caz, matricea diagonală $\mathbf{R}$ va fi nesingulară. Aceeași concluzie se obține și din membrul drept din (38), dacă se ține seama că $\mathbf{R}_k$ este nenegativ pentru orice k.

Cu aceleași argumente, pentru celelalte două forme pătratice, care cuprind parametrii inductanțelor și inversele capacităților de contur se deduce că

$$\frac{1}{2\omega^2} \mathbf{I}^*_{mp} \mathbf{D}_m \mathbf{I}_{mp} = \frac{1}{2\omega^2} \mathbf{I}^*_p \mathbf{D} \mathbf{I}_p = \frac{1}{2\omega^2} \sum_{k=1}^{b} D_k |I_{pk}|^2, \tag{39a}$$

$$\mathbf{I}^*_{mp} \mathbf{L}_m \mathbf{I}_{mp} = \mathbf{I}^*_p \mathbf{L} \mathbf{I}_p = \sum_{k=1}^{b} \sum_{j=1}^{b} L_{jk} \bar{I}_{pj} I_{pk}. \tag{39b}$$

Să notăm diferențele ce apar în membrul drept al acestor două expresii. Matricea inverselor capacităților de latură este diagonală în timp ce matricea inductanțelor de latură nu este neapărat diagonală. Dacă nu există inductanțe mutuale și $\mathbf{L}$ este de asemenea diagonală. Din nou, interpretînd (34) ca energie medie înmagazinată, aceste forme pătratice trebuie să fie pozitiv semidefinite.

În scopul unor referiri mai comode, introducem notațiile:

$$F(j\omega) = \mathbf{I}^*_{mp} \mathbf{R}_m \mathbf{I}_{mp}, \tag{40a}$$

$$T(j\omega) = \frac{1}{2} \mathbf{I}^*_{mp} \mathbf{L}_m \mathbf{I}_{mp}, \tag{40b}$$

$$V(j\omega) = \frac{1}{2\omega^2} \mathbf{I}^*_{mp} \mathbf{D}_m \mathbf{I}_{mp}. \tag{40c}$$

Datorită interpretărilor lor fizice, aceste mărimi au fost numite cu un termen colectiv *funcții de energie,* deși prima nu prezintă dimensiuni de energie. Simbolurile pentru aceste funcții sînt nefericit alese, deoarece pot fi confundate cu alte mărimi notate similar; dar acestea au devenit

aproape simboluri standard în literatură, astfel că vom continua să le utilizăm.

Condiția ca $T(j\omega)$ să fie semidefinită pozitiv, impune condiții asupra mărimii inductanțelor mutuale. Dacă cuplajul mutual dintr-un circuit apare totdeauna numai între perechi de laturi, condiția de semidefinire este echivalentă cu restricția obișnuită, ca valoarea coeficientului de cuplaj să nu fie supraunitară. Dacă sînt cuplate mutual mai multe laturi decît două, restricția coeficientului de cuplaj la valori subunitare nu este suficient de severă, pentru a asigura semidefinirea pozitivă; în acest caz, definirea pozitivă este o condiție mai severă decît cuplajul unitar. (Vezi Problema 17)

Pentru exemplificare, să considerăm circuitul din fig. 7.2. Ambele surse sînt sinusoidale, de frecvență unghiulară ω. Matricele parametrilor de contur sînt

$$\mathbf{R}_m = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_m = \begin{bmatrix} L_1 & -M \\ -M & L_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} D_3 & D_3 \\ D_3 & D_2 + D_3 \end{bmatrix}$$

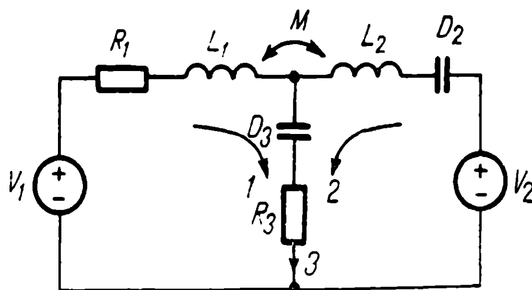


Fig. 7.2. Exemplu ilustrativ pentru funcțiile de energie.

Funcțiile de energie sînt

$$F(j\omega) = [\bar{I}_{p1} \ \bar{I}_{p2}] \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{p1} \\ I_{p2} \end{bmatrix} = R_1 |I_{p1}|^2 + R_3 |I_{p1} + I_{p2}|^2,$$

$$T(j\omega) = \frac{1}{2} [\bar{I}_{p1} \ \bar{I}_{p2}] \begin{bmatrix} L_1 & -M \\ -M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{p1} \\ I_{p2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{L_1}{2} |I_{p1}|^2 - M \operatorname{Re}(\bar{I}_{p1} I_{p2}) + \frac{L_2}{2} |I_{p2}|^2,$$

$$V(j\omega) = \frac{1}{2\omega^2} [\bar{I}_{p1} \ \bar{I}_{p2}] \begin{bmatrix} D_3 & D_3 \\ D_3 & D_2 + D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{p1} \\ I_{p2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{D_2}{2\omega^2} |I_{p2}|^2 + \frac{D_3}{2\omega^2} |I_{p1} + I_{p2}|^2 .$$

Deoarece $I_{p1} + I_{p2}$ reprezintă curentul din ramura 3, termenul $R_3|I_{p1} + I_{p2}|^2$ este puterea disipată în R_3, iar $|I_{p1} + I_{p2}|^2 D_3 / 2\omega^2$ este energia acumulată în D_3. Caracterul lui $T(j\omega)$, de a fi semidefinită pozitiv, nu este evident din membrul drept. Să observăm totuşi că matricea $\mathbf{I}_m$ este singulară numai pentru $L_1 L_2 - M^2 = 0$, care este şi condiţia de cuplaj unitar.

Rezumînd rezultatul obţinut mai înainte, *matricele* $\mathbf{R}_m^{\cdot}$, $\mathbf{L}_m^{\cdot}$ *şi* $\mathbf{D}_m$, *ale rezistenţelor, inductanţelor şi elastanţelor (inverselor capacităţilor) de contur, ale unui circuit reciproc, pasiv sînt semidefinite pozitiv.* Acest rezultat s-a obţinut prin interpretarea fizică a unor forme pătratice, bazată pe o analiză în regim permanent sinusoidal.

Să revenim la ecuaţia iniţială de contur (30) în care variabilele sînt transformate Laplace. Fără nici o legătură cu interpretarea fizică să-i premultiplicăm ambele părţi cu $\mathbf{I}_m^*(s)$. Rezultatul va fi

$$\mathbf{I}_m^*(s)\,\mathbf{R}_m\,\mathbf{I}_m(s) + s\,\mathbf{I}_m^*(s)\,\mathbf{L}_m\,\mathbf{I}_m(s) + \frac{1}{s}\,\mathbf{I}_m^*(s)\,\mathbf{D}_m\,\mathbf{I}_m(s) = \mathbf{I}_m^*(s)\,\mathbf{E}(s). \quad (41)$$

Găsim din nou aceleaşi forme pătratice pe care le-am mai avut mai înainte, numai că acum variabilele sînt transformate ale curenţilor de contur, in loc de fazori. Formele pătratice din această ecuaţie nu au o interpretare energetică cum exista în (33). Totuşi, *matricele acestor forme pătratice sînt identice cu precedentele.* Prin urmare aceste forme pătratice sînt semidefinite pozitiv. Vom nota, în consecinţă, termenii cu acelaşi simboluri ca in (40) şi vom continua să îi numim funcţii de energie, deşi prin dimensiunile lor nu reprezintă o energie.

$$F_0(s) = \mathbf{I}_m^*(s)\,\mathbf{R}_m\,\mathbf{I}_m(s) \quad (42a)$$

$$T_0(s) = \mathbf{I}_m^*(s)\,\mathbf{L}_m^{\cdot}\,\mathbf{I}_m(s). \quad (42b)$$

$$V_0(s) = \mathbf{I}_m^*(s)\,\mathbf{D}_m\,\mathbf{I}_m(s). \quad (42c)$$

Utilizînd aceeaşi notaţie, (41) devine

$$F_0(s) + s\,T_0(s) + \frac{1}{s}\,V_0(s) = \mathbf{I}^*\mathbf{V}. \quad (43)$$

(Notaţia părţii din dreapta a fost modificată în două sensuri. Indicele m a fost suprimat deoarece singurii curenţi care rămîn în produsul $\mathbf{I}_m^*\mathbf{E}$ sînt cei care reprezintă şi curenţi la o poartă. De asemenea, singurele componente ale lui **E** nenule sînt tensiunile la poartă. Prin urmare $\mathbf{I}_m^*\mathbf{E}$ poate fi înlocuit cu $\mathbf{I}^*\mathbf{V}$, unde **I** şi **V** sînt vectori ai mărimilor la poartă).

Să facem aici o digresiune. Toată această dezvoltare a avut ca punct de plecare ecuaţiile de contur. Se poate face o altă dezvoltare, prin dualitate, pe baza ecuaţiilor la nod. În locul matricelor parametrilor de contur

$\mathbf{R}_m$, $\mathbf{L}_m$ şi $\mathbf{D}_m$, vor apare matricele parametrilor la nod, $\mathbf{G}_n$ $\mathbf{\Gamma}_n$ şi $\mathbf{C}_n$, pentru conductanţa, inversa inductanţei şi capacitatea corespunzătoare. Funcţile de energie pot fi definite acum, în funcţie de matricele acestor parametri şi de vectorul tensiunilor la nod, $\mathbf{V}_n$. Acestea vor avea aceeaşi formă ca şi (42), cu $\mathbf{V}_n$ în loc de $\mathbf{I}_m$ şi cu matricele parametrilor la nod în locul celor pentru parametrii de contur. Din aceasta se conclude că, *matricele* $\mathbf{G}_n$, $\mathbf{C}_n$ *şi* $\mathbf{\Gamma}_n$ *ale conductanţei, capacităţilor şi inverselor inductanţelor la nod, pentru un circuit reciproc şi pasiv, sînt semidefinite pozitiv.* Se poate scrie o ecuaţie similară cu (43) pentru aceste noi funcţii de energie, schimbînd reciproc pe **V** cu **I**. Acest mod diferit de tratare nu este necesar să fie dezvoltat, deoarece sistemul de ecuaţii la noduri este de fapt de prisos, pentru cele ce urmează. Totuşi, la fel cum ecuaţiile la nod conduc adesea la interpretări utile şi la simplificarea calculelor, acest mod de abordare a problemei poate fi uneori util. Atunci cînd aceasta interesează se pot dezvolta detaliile aşa cum s-a arătat.

Să examinăm din nou relaţia (43). Mărimile din membrul stîng sînt definite pe baza variabilelor de contur (sau prin variabilele relative la laturi, printr-o transformare de contur). În membrul drept găsim variabilele de la porţi. Desigur, variabilele de tensiune şi curent la poartă sînt legate între ele. Dacă această legătură este considerată în membrul drept din (43), se găseşte un rezultat foarte important. Pentru legătura dintre vectorii **V** şi **I** putem utiliza relaţia:

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{Z}_{oc}(s)\mathbf{I}(s) \tag{44a}$$

sau

$$\mathbf{I}(s) = \mathbf{Y}_{sc}(s)\mathbf{V}(s). \tag{44b}$$

Prima relaţie poate fi introdusă direct în (43); cea de a doua poate fi inserată după ce se ia transpusa conjugată în (43), ceea ce conduce la

$$\overline{\left(F_0 + s\,T_0 + \frac{1}{s}\,V_0\right)} = (\mathbf{I}^*\mathbf{V})^*$$

sau

$$F_0 + \bar{s}T_0 + \frac{1}{\bar{s}}\,V_0 = \mathbf{V}^*\mathbf{I}. \tag{45}$$

Aceasta se obţine deoarece formele pătratice sînt mărimi scalare, reale. Introducînd (44*a*) în (43) şi (44*b*) în (45) se găseşte

$$F_0 + s\,T_0 + \frac{1}{s}\,V_0 = \mathbf{I}^*\mathbf{Z}_{oc}(s)\,\mathbf{I}, \tag{46a}$$

$$F_0 + \bar{s}\,T_0 + \frac{1}{\bar{s}}\,V_0 = \mathbf{V}^*\,\mathbf{Y}_{sc}(s)\,\mathbf{V}. \tag{46b}$$

Din aceste expresii se deduc cîteva din proprietăţile fundamentale ale funcţiilor de circuit. Ne vom concentra acum asupra studiului acestor proprietăţi.

Funcţia de impedanţă

Să considerăm mai întîi cel mai simplu multiport şi anume un uniport. În acest caz, $\mathbf{Z}_{oc}$ este scalarul $Z(s)$, impedanţa uniportului şi $\mathbf{I}$ se reduce la scalarul, care este curentul de intrare. Din (46*a*) se obţine expresia pentru $Z(s)$:

$$Z(s) = \frac{1}{|I(s)|^2}\{F_0(s) + sT_0(s) + \frac{1}{s} V_0(s)\}. \tag{47}$$

Să notăm că formele pătratice sînt funcţiuni de s, numai datorită faptului că curenţii de contur sînt funcţiuni de s. Natura reală, semidefinită pozitiv, a formelor pătratice nu depinde de variabilele curenţi, ci numai de matricele parametrilor de contur, care sînt matrice formate din constante.

Expresia precedentă poate fi separată în părţile reală şi imaginară înlocuind pe s cu $\sigma + j\omega$. Astfel

$$\text{Re}\,[Z(s)] = \frac{1}{|I(s)|^2}\left[F_0(s) + \sigma T_0(s) + \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} V_0(s)\right] \tag{48a}$$

$$\text{Im}\, Z(s) = \frac{\omega}{|I(s)|^2}\left[T_0(s) - \frac{V_0(s)}{\sigma^2 + \omega^2}\right]. \tag{48b}$$

Subliniem că aceste ecuaţii se aplică pentru orice valoare a lui s cu excepţia zerourilor lui $I(s)$. Aceste două ecuaţii sînt extrem de importante şi de aici vom deduce concluzii interesante. Pentru referiri ulterioare să formulăm aceste concluzii printr-o teoremă.

Teorema 5. *Fie $Z(s)$ impedanţa de intrare a unui circuit N, reciproc, pasiv, invariabil în timp şi linear. În acest caz sînt adevărate următoarele afirmaţii :*

(a) *Pentru orice* $\sigma \geqslant 0$, Re $[Z(s)] \geqslant 0$.

(b) *Dacă N nu conţine nici o rezistenţă* ($F_0(s) = 0$),*atunci*

$$\sigma > 0 \textit{ implică Re } [Z(s)] > 0,$$

$$\sigma = 0 \textit{ implică Re } [Z(s)] = 0,$$

$$\sigma < 0 \textit{ implică Re } [Z(s)] < 0.$$

(c) *Dacă N nu conține nici o capacitate* ($V_0(s) = 0$), *atunci*

$$\omega > 0 \text{ implică } Im\ [Z(s)] > 0,$$

$$\omega = 0 \text{ implică } Im\ [Z(s)] = 0,$$

$$\omega < 0 \text{ implică } Im\ [Z(s)] < 0.$$

(d) *Dacă N nu conține nici o bobină* ($T_0(s) = 0$), *atunci*

$$\omega > 0 \text{ implică } Im\ [Z(s)] < 0,$$

$$\omega = 0 \text{ implică } Im\ [Z(s)] = 0,$$

$$\omega < 0 \text{ implică } Im\ [Z(s)] > 0.$$

Aceste rezultate se obțin imediat din (48). Concluzia (a) stabilește că, valoarea lui $Z(s)$, corespunzătoare unei valori a lui s, situată în semiplanul drept, trebuie să fie și ea situată în semiplanul drept. Aceasta conduce la conceptul de funcții real-pozitive pe care îl vom introduce ulterior. Concluzia (b) conduce la teorema reactanțelor a lui Foster, care prezintă importanță istorică. Concluziile (c) și ((d) conduc la rezultatele lui Cauer referitoare la circuitele *RL* și *RC*.

Condiția impusă argumentului

O altă proprietate a funcției de impedanță poate fi dedusă din (43). Să reținem că $|I|^2$, F_0, T_0 și V_0 sînt toate constante pozitive pentru orice valoare a lui s. Rezultă că $Z(s)$ se poate scrie în forma:

$$Z(s) = a_0 + a_1 s + \frac{a_2}{s}, \tag{49}$$

în care toți coeficienții sînt pozitivi. Fie $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ un punct în semiplanul drept: adică $\sigma_0 > 0$ așa cum se arată în fig. 7.3. Fiecare termen din membrul drept în (49), poate fi reprezentat prin segmente de dreaptă în planul complex, așa cum se arătat în fig. 7.3 *b*, pentru o valoare corespunzătoare lui s. Orice lungime ar avea aceste drepte, suma nu poate fi situată în afara sectorului hașurat arătat în fig. 7.3 *a*. Observînd în diagramă ce se întîmplă pentru un număr de valori ale unghiului lui s, inclusiv valorile 0 și $\pi/2$ radiani se obține următorul rezultat:

$$|\arg Z(s)| \leqslant |\arg s| \quad \text{pentru} \quad 0 \leqslant |\arg s| \leqslant \pi/2. \tag{50}$$

Aceasta pare să fie o restricție mai severă impusă impedanței decît condiția Re $[Z(s)] \geqslant 0$ pentru Re $s \geqslant 0$. Nu numai că $Z(s)$ trebuie să fie situat în semiplanul drept, atunci cînd și s este situat în semiplanul drept, dar localizarea este limitată acolo, de o condiție impusă argumentului. Totuși aceasta nu este o restricție mai severă, deoarece decurge din precedenta.

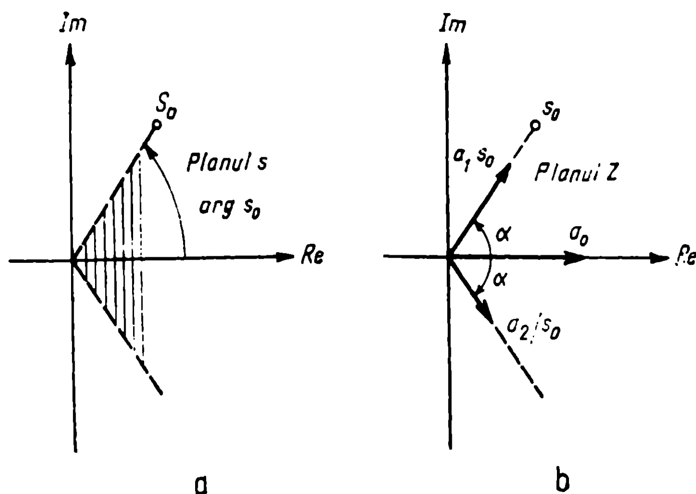


Fig. 7.3. Demonstrația că $|\arg Z| < |\arg s|$ pentru $|\arg s| < \pi/2$.

În acest paragraf am făcut referiri la o clasă de circuite și am dedus unele proprietăți pe care impedanțele de intrare ale acestor circuite le satisfac în mod necesar. Aceasta s-a făcut în baza unor considerații energetice in domeniul frecvență. Problema poate fi abordată și altfel, pornind de la definiția dată circuitelor pasive în capitolul 1 și repetată aici pentru cazul unui uniport ;

$$\int_{-\infty}^{t} v(\tau)i(\tau)\, d\tau \geqslant 0. \tag{51}$$

Să presupunem că tensiunea și curentul la bornele unui circuit pasiv sînt

$$i(t) = 2\,|I_0|\, \varepsilon^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t + \alpha) = I_0\, \varepsilon^{s_0 t} + \bar{I}_0\, \varepsilon^{\bar{s}_0 t}, \tag{52a}$$

$$v(t) = Z(s_0)\, I_0\, \varepsilon^{s_0 t} + Z(\bar{s}_0)\, \bar{I}_0\, \varepsilon^{\bar{s}_0 t}, \tag{52b}$$

unde $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$, cu $\sigma_0 > 0$ și $I_0 = |I_0|\, \varepsilon^{j\alpha}$. Presupunem că aceste semnale au fost aplicate la $t = -\infty$, cînd circuitul nu avea nici un fel

de energie înmagazinată. Deoarece $\varepsilon^{\sigma_0 t} = 0$ pentru $t = -\infty$, ambele semnale încep de la 0. În acest caz, nu apar probleme de regim tranzitoriu și expresiile pentru curent și tensiune reprezintă excitația și răspunsul total.

Inserînd aceste expresii pentru v și i în (51) și efectuînd unele calcule se obține

$$|I_0|^2 \frac{\text{Re}\,[Z(s_0)]}{\sigma_0} \varepsilon^{2\sigma_0 t} + \text{Re}\left[\frac{[Z(s_0)I_0^2}{s_0} \varepsilon^{2\sigma_0 t}\right] \geqslant 0. \tag{53}$$

Acum să exprimăm factorul care înmulțește funcția exponențială, în ultima paranteză, prin modul și argument:

$$\frac{Z(s_0)\; I_0^2}{s_0} = \frac{|Z(s_0)|\; |I_0|^2}{|s_0|} \varepsilon^{j\theta_0}. \tag{54}$$

Dacă aceasta se introduce în expresia precedentă se găsește

$$|I_0|^2 \varepsilon^{2\sigma_0 t}\left[\frac{\text{Re}\,[Z(s_0)]}{\sigma_0} + \frac{|Z(s_0)|}{|s_0|} \cos(2\omega_0 t + \theta_0)\right] \geqslant 0. \tag{55}$$

Cazul cel mai nefavorabil se obține atunci cînd cosinusul este -1. În acest caz condiția se reduce la

$$\frac{\text{Re}[Z(s_0)]}{\sigma_0} - \frac{|Z(s_0)|}{|s_0|} \geqslant 0,$$

sau

$$\frac{\text{Re}\,[Z(s_0)]}{|Z(s_0)|} \geqslant \frac{\sigma_0}{|s_0|}. \tag{56}$$

Fiecare membru al acestei expresii este partea reală împărțită la modulul mărimii complexe, ceea ce reprezintă cosinusul unghiului corespunzător. Prin urmare

$$\cos[\arg\; Z(s_0)] \geqslant \cos[\arg\; s_0] \tag{57}$$

de unde urmează că

$$|\arg\; Z(s_0)| \leqslant |\arg\; s_0|. \tag{58}$$

Deoarece Re $s_0 = \sigma_0 > 0$, acesta este tot una cu (50).

Aceasta completează stabilirea proprietăților generale care sînt necesare pentru funcția de impedanță a circuitelor pasive. Proprietăți

absolut similare se pot găsi pentru funcţia de admitanţă, pornind de la (46b) în loc de (46a). Astfel teorema 5 şi ecuaţia (50) sînt adevărate atunci cînd $Z(s)$ se înlocuieşte cu $y(s)$. În continuare vom defini o clasă de funcţii matematice avînd aceleaşi proprietăţi şi vom cerceta comportarea acestei clase de funcţii.

7.4. Funcţii real-pozitive

O funcţie real-pozitivă $F(s)$ este o funcţie analitică de variabila complexă $s = \sigma + j\omega$, care are următoarele proprietăţi:

1. $F(s)$ *este regulată pentru* $\sigma > 0$.
2. $F(\sigma)$ *este reală.*
3. $\sigma \geqslant 0$, *implică* $\mathrm{Re}\,[F(s)] \geqslant 0$.

Aceasta este o definiţie matematică pentru o clasă de funcţii matematice. Motivul pentru care utilizăm această definiţie este faptul că o funcţie de circuit care ne interesează — anume o impedanţă (sau admitanţă) de intrare—are aceste proprietăţi. Utilizînd consideraţii matematice relative la funcţiile real-pozitive putem, probabil, să aflăm despre impedanţe, unele lucruri care nu rezultă numai din consideraţii fizice. Conceptul de funcţie real-pozitivă, ca şi multe din proprietăţile funcţiilor real-pozitive pe care le vom prezenta, sînt datorate lui Otto Brune.

Vom arăta acum că dacă o funcţie este raţională şi satisface ultimele două condiţii de mai sus, condiţia 1 este automat satisfăcută. Vom face acest lucru arătînd că un pol de ordinul n al unei funcţii raţionale, reale este înconjurat de $2n$ sectoare, în care partea reală a funcţiei este în mod alternativ, pozitivă şi negativă. Fie s_0 un pol de ordinul n al funcţiei raţionale $F(s)$. Cazul $n = 3$ este ilustrat în fig. 7.4. În vecinătatea polului de ordinul n, funcţia are o dezvoltare Laurent de forma

$$F(s) = \frac{a_{-n}}{(s-s_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(s-s_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{s-s_0} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j(s-s_0)^j. \qquad (59)$$

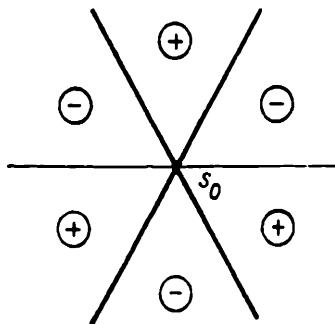


Fig. 7.4. Pol de ordinul 3.

Dacă se alege o vecinătate destul de apropiată de s_0, primul termen al dezvoltării Laurent va fi mult mai mare, în modul, decît ceilalţi; prin urmare partea reală a lui $F(s)$ va avea în această vecinătate atît valori negative cît şi pozitive. Vom arăta aceasta astfel: dacă scriem

$$a_{-n} = k\,\varepsilon^{j\theta}, \tag{60a}$$

$$(s - s_0) = \rho\,\varepsilon^{j\Phi}, \tag{60b}$$

atunci

$$\mathrm{Re}\left(\frac{a_{-n}}{(s - s_0)^n}\right) = \frac{k}{\rho^n}\cos\,(\theta - n\Phi). \tag{61}$$

Deoarece θ este un unghi fix, iar Φ poate să varieze între 0 şi 2π în această vecinătate, constatăm că partea reală a termenului dominant îşi schimbă semnul de $2n$ ori, atunci cînd Φ variază de la 0 la 2π. Prin urmare, partea reală a lui $F(s)$ îşi schimbă de asemenea semnul de $2n$ ori (deşi nu neapărat la aceleaşi valori ale lui Φ, datorită celorlalţi termeni din dezvoltarea Laurent).

Acum să presupunem că funcţia $F(s)$ satisface ultimele două condiţii din definiţia funcţiei real-pozitive dar, are un pol în semiplanul drept. În concordanţă cu ceea ce tocmai am arătat, partea reală a lui $F(s)$ va lua, în acest caz, atît valori pozitive cît şi negative, ceea ce contrazice condiţia 3.

Concludem că în cazul funcţiilor raţionale, la care punctele singulare sînt numai poli, condiţia 1 de definire a funcţiilor real-pozitive este o consecinţă a celorlalte două condiţii şi este deci nenecesară.

Pentru a înţelege mai bine definiţia unei funcţii real-pozitive, aceasta poate fi interpretată ca o *transformare conformă*. O funcţie real-pozitivă $W = F(s)$ transformă axa reală s în axa reală din W şi transformă semiplanul drept din s în semiplanul drept din W. Aceasta este ilustrat în fig. 7.5.

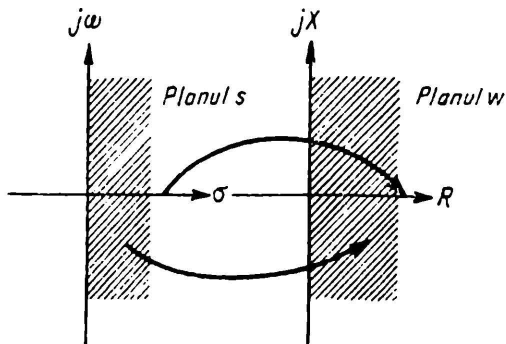


Fig. 7.5. Transformare prin funcţii real-pozitive.

O consecinţă imediată a acestei interpretări este faptul că *o funcţie real-pozitivă de o funcţie real-pozitivă este ea însăşi real-pozitivă*; adică, dacă $F_1(s)$ şi $F_2(s)$ sînt rp (aceasta este prescurtarea pentru real-pozitiv), atunci

$$F_3(s) = F_1[F_2(s)] \tag{62}$$

este tot rp; pentru că semiplanul drept s devine semiplanul drept al planului F_2, deoarece $F_2(s)$ este real-pozitivă. La fel, semiplanul drept al planului F_2 devine semiplanul drept al planului F_1, deoarece $F_1(s)$ este real-pozitivă. Prin urmare transformarea compusă transformă semiplanul drept din s în semiplanul drept al planului F_3. Axa reală se conservă pretutindeni.

Acesta este un rezultat util. Putem să-l utilizăm pentru a arăta că, dacă $F(s)$ este rp şi $1/F(s)$, la fel ca şi $F(1/s)$, sînt rp. Pentru a demonstra aceasta să observăm că

$$\frac{1}{s} = \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} - j\frac{\omega}{\sigma^2 + \omega^2} \tag{63}$$

este o funcţie rp. Acum să considerăm că $1/s$ şi $F(s)$ sînt $F_1(s)$ şi $F_2(s)$ în (62), în ambele moduri posibile; rezultatul căutat se obţine imediat.

Din faptul că inversa unei funcţii rp este ea însăşi rp rezultă că, o funcţie real-pozitivă nu poate avea zerouri în semiplanul drept; dacă le-ar avea, atunci inversa sa ar avea poli în semiplanul drept ceea ce este imposibil. Deoarece impedanţa unui circuit reciproc, pasiv este o funcţie rp, reciproca sa — admitanţa — este de asemenea o funcţie rp.

Din punct de vedere al transformării conforme, punctele $F(s) = 0$ şi ∞ (acestea sînt zerouri şi poli ai funcţiei), care sînt situate pe conturul limită al semiplanului drept F, nu pot fi imagini al vreunui punct interior din semiplanul drept al planului s. Să examinăm acum proprietăţile care rezultă, atunci cînd alte puncte ale conturului semiplanului drept al planului F, sînt imagini ale punctelor de pe conturul semiplanului drept al planului s; adică să considerăm că un punct de pe axa $j\omega$ este transformat de o funcţie F rp, într-un punct al axei imaginare a planului F. Dacă $j\omega_0$ este punctul considerat, atunci

$$F(j\omega_0) = jX_0, \tag{64}$$

unde X_0 este real (pozitiv, negativ sau zero).

Să considerăm o vecinătate a lui $j\omega_0$ în planul s şi vecinătatea corespunzătoare a lui jX_0 în planul F, aşa cum este arătat în fig. 7.6. Să notăm cu s_1 un punct din semiplanul drept în această vecinătate a lui $j\omega_0$. Să

dezvoltăm acum pe $F(s)$ într-o serie Taylor în jurul lui $j\omega_0$ şi să o evaluăm în $s = s_1$. Rezultatul este

$$F(s_1)-jX_0 = F^{(n)}(j\omega_0)(s_1-j\omega_0)^n + F^{(n+1)}(j\omega_0)(s_1-j\omega_0)^{n+1} + \ldots, \tag{65}$$

unde $F^{(n)}(j\omega_0)$ este prima derivată nenulă a lui $F(s)$ în $j\omega_0$.

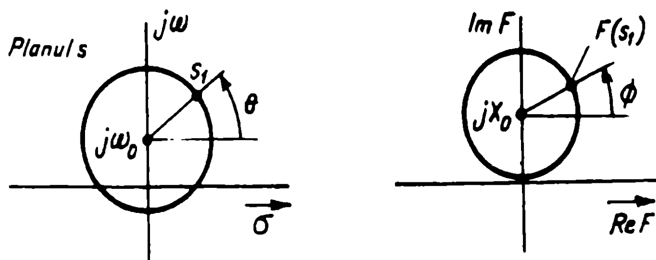


Fig. 7.6. Transformare conformă prin funcţii real-pozitive.

Atunci cînd s_1 tinde către $j\omega_0$, termenul dominant este primul termen al membrului drept. Să definim

$$\Phi = \arg\ [F(s_1)-jX_0] \tag{66a}$$

$$\theta = \arg\ (s_1-j\omega_0) \tag{66b}$$

$$\beta = \arg\ [F^{(n)}(j\omega_0)]. \tag{66c}$$

Astfel, la limită, vom găsi din (65) că:

$$\lim_{s_1\to j\omega_0} \Phi = \beta + n \lim_{s_1\to j\omega_0} \theta. \tag{67}$$

Dar condiţia de real-pozitiv, cere ca $|\Phi| \leqslant \pi/2$ atîta timp cît $|\theta| \leqslant \pi/2$. Prin urmare, din (67) concludem că

$$n = 1 \tag{68a}$$

$$\beta = 0 \tag{68b}$$

Astfel, prima derivată nenulă este derivata întîia şi argumentul său este zero la $s = j\omega_0$. Acesta este un rezultat foarte important. Pentru referiri ulterioare îl vom formula ca o teoremă:

Teormea 6. *Dacă un punct oarecare al axei $j\omega$ este transformat cu o funcţie real-pozitivă, într-un punct al axei imaginare a planului* **F**, *atunci în acest punct derivata* $\mathrm{d}F/\mathrm{d}s$ *este reală şi pozitivă.*

Din această teoremă importantă se deduc şi alte consecinţe. Să observăm că dacă $F(s)$ are un zero sau un pol pe axa $j\omega$, condiţiile teoremei sînt satisfăcute. În cazul unui zero ($X_0 = 0$), un punct al axei $j\omega$ este transformat în originea planului F, care este situată pe axa imaginară. Prin urmare, derivata dF/ds este reală şi pozitivă. Aceasta implică şi faptul că zeroul este un zero simplu, deoarece la un zero de ordin mai mare, derivata întîia ar fi zero. Dacă $F(s)$ are un pol pe axa $j\omega$, funcţia inversă va avea un zero în acel punct şi teorema se aplică funcţiei inverse. Cum $d(1/F)/ds$ este evaluat într-un pol al $F(s)$, aceasta este inversa reziduului lui $F(s)$ relativ la acel pol (Vezi Apendicele 2). Aceste considerente pot fi acum formulate prin teorema care urmează.

Teorema 7. *Dacă o funcţie real-pozitivă are poli sau zerouri pe axa $j\omega$ (inclusiv $s = 0, \infty$), aceşti poli sau zerouri trebuie să fie simpli. Într-un zero simplu de pe axa $j\omega$, derivata este reală şi pozitivă. Într-un pol simplu pe axa $j\omega$, reziduul este real şi pozitiv.*

Condiţii necesare şi suficiente

Pînă acum, am găsit destul de multe condiţii necesare pe care o funcţie real-pozitivă trebuie să le satisfacă. Ceea ce dorim să facem este să găsim un set de condiţii necesare, care să se dovedească a fi şi suficiente. Rezultatul este dat de următoarea teoremă:

Teorema 8. *O funcţie raţională $F(s)$ cu coeficienţi reali, este real-pozitivă dacă şi numai dacă:*

(a) *$F(s)$ este regulată pentru $\sigma > 0$;*

(b) *Polii de pe axa $j\omega$ (inclusiv cei din $s = 0, \infty$) sînt simpli şi au reziduul real şi pozitiv;*

(c) *$Re\,[F(j\omega)] \geqslant 0$ pentru orice ω, cu excepţia polilor.*

Necesitatea acestor condiţii este evidentă din definiţia unei funcţii rp şi din teorema 7. Rezultă că mai trebuie demonstrată suficienţa acestor condiţii; adică vom presupune că o funcţie $F(s)$ satisface aceste condiţii şi vom arăta că în acest caz trebuie să fie real-pozitivă. Fie $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k$ polii de pe axa $j\omega$ şi să examinăm părţile principale, relative la aceşti poli. Dacă avem un pol în origine, partea principală este

$$F_0(s) = k_0/s$$

unde k_0 este real şi pozitiv. Este evident că $F_0(s)$ este rp şi că avem şi

$$\mathrm{Re}[F_0(j\omega)] = 0.$$

În mod similar, partea principală a unui pol, posibil la infinit este

$$F_\infty(s) = k_\infty s,$$

unde k_∞ este real şi pozitiv; $F_\infty(s)$ este de asemenea rp şi avem şi:

$$\mathrm{Re}[F_\infty(j\omega)] = 0.$$

Oricare alţi poli de pe axa $j\omega$ trebuie să apară în perechi conjugate şi cu reziduuri conjugate deoarece $F(s)$ este o funcţie reală. Deoarece reziduurile sînt reale prin ipoteză, cele două reziduuri sînt egale. Luînd părţile principale în polii conjugaţi $j\omega_i$ şi $-j\omega_i$ împreună, obţinem:

$$F_i(s) = \frac{k_i}{s-j\omega_i} + \frac{k_i}{s+j\omega_i} = \frac{2k_i s}{s^2+\omega_i^2},$$

unde k_i este real şi pozitiv. Această funcţie este de asemenea real pozitivă şi mai are proprietatea că

$$\mathrm{Re}[F_i(j\omega)] = 0.$$

(Observăm că $F_0(s)$ este impedanţa unei capacităţi, $F_\infty(s)$ cea a unei bobine, iar $F_i(s)$ cea a unui circuit rezonant, derivaţie).

Astfel putem să extragem din funcţia dată $F(s)$, părţile principale pentru toţi polii săi de pe axa $j\omega$. Funcţia care rămîne $F_r(s)$ mai are proprietatea (c) enunţată prin teoremă; deci

$$\mathrm{Re}[F_r(j\omega)] = \mathrm{Re}[F(j\omega)] \geqslant 0. \tag{69}$$

Funcţia rest $F_r(s)$ este o funcţie regulată în semiplanul drept şi pe întregul său contur, care este axa $j\omega$ inclusiv punctul de la infinit. Pentru o astfel de funcţie, valoarea minimă a părţii reale considerată în domeniul de regularitate, se găseşte pe contur. Aceasta se poate arăta utilizînd teorema modulului-maxim (vezi Apendicele 2), în modul următor. Fie $G(s) = \varepsilon^{-F_r(s)}$. Această funcţie va avea acelaşi domeniu de regularitate ca şi $F_r(s)$. Prin urmare, în concordanţă cu teorema modulului maxim, valoarea maximă a lui $G(s)$, pentru orice $\sigma \geqslant 0$ este situată pe axa $j\omega$. Deoarece

$$|G(s)| = \varepsilon^{-\mathrm{Re}[F_r(s)]} \tag{70}$$

cea mai mare valoare a lui $G(s)$ va corespunde celei mai mici valori a lui $\mathrm{Re}[F_r(s)]$. Aceasta demonstrează tocmai ceea ce doream; că valoarea minimă a lui $\mathrm{Re}[F_r(s)]$, pentru orice $\sigma \geqslant 0$ este situată pe axa $j\omega$. Deoarece

conform (69) această valoare este nenegativă, partea reală a lui $F_r(s)$ trebuie să fie nenegativă oriunde în semiplanul drept; adică

$$\mathrm{Re}[F_r(s)]\geqslant 0 \qquad (\sigma\geqslant 0).$$

Deoarece, în plus, $F_r(\sigma)$ este real, concludem că $F_r(s)$ este o funcţie real-pozitivă. Putem acum să scriem

$$F(s) = F_r(s) + k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{2k_{is}}{s^2+\omega_i^2}. \qquad (71)$$

Am arătat că fiecare termen din partea dreaptă este rp. Se poate arăta, în mod simplu, că suma a două (sau mai multe) funcţii rp este ea însăşi rp. Prin urmare $F(s)$ este real-pozitivă. Aceasta completează demonstraţia de suficienţă a condiţiilor stabilite. Deoarece reciproca unei funcţii rp este de asemenea rp, putem să restabilim aceste condiţii necesare şi suficiente în funcţie de zerourile lui $F(s)$.

Teorema 9. *O funcţie raţională reală $F(s)$ este real-pozitivă dacă şi numai dacă;*

(a) F(s) *nu are zerouri în* $\sigma>0$.
(b) *Zerourile de pe axa* $j\omega$ (*inclusiv* $s=\infty$) *sînt simple şi cu derivate reale şi pozitive.*
(c) *Re* $[F(j\omega)]\geqslant 0$ *pentru orice* ω (*cu excepţia polilor*).

Această teoremă rezultă direct din cea precedentă, dacă ne reamintim că reziduul unei funcţii într-un pol simplu este inversul derivatei funcţiei inversate.

În verificarea caracterului real-pozitiv al unei funcţii date, poate să nu fie totdeauna necesar să se utilizeze condiţiile, necesare şi suficiente menţionate în cele două teoreme precedente. Uneori este posibil să se elimine unele funcţii, în baza unor consideraţii directe, din cauză că nu sînt îndeplinite unele condiţii necesare foarte simple. Să discutăm cîteva din aceste condiţii.

Am văzut că o funcţie real-pozitivă nu are nici poli nici zerouri în semiplanul s din dreapta. Am definit anterior un *polinom Hurwitz*, ca un polinom fără zerouri în semiplanul s din dreapta. Această definiţie permite existenţa zerourilor pe axa $j\omega$. Constatăm că, cu această terminologie, o funcţie real-pozitivă este raportul a două polinoame Hurwitz.

Factorii care constituie un polinom Hurwitz trebuie să aibă una din următoarele forme: $(s+a)$ pentru zerouri reale sau (s^2+as+b) pentru o pereche de zerouri complexe, cu a fiind nenegativ şi b fiind pozitiv. Dacă un număr oarecare de astfel de factori se înmulţesc, rezultatul trebuie să fie un polinom ai cărui coeficienţi sînt nenegativi. Prin urmare,

exceptînd *toți* factorii care includ zerourile de pe axa $j\omega$, *toți* coeficienții polinomului vor fi strict pozitivi. Dacă introducem condiția suplimentară, ca zerourile de pe axa $j\omega$ să fie simple, se găsește că, atunci cînd toate zerourile sînt pe axa $j\omega$; unii coeficienți vor fi zero [1]) dar coeficienții care rămîn vor fi tot strict pozitivi. Deși aceasta este o condiție necesară pentru ca un polinom să fie Hurwitz, ea nu este suficientă, așa cum se demonstrează, în mod simplu, cu contraexemplul următor

$$(s^2-s+4)\ (s+2) = s^3+s^2+2s+8. \tag{72}$$

Polinomul din dreapta conține toate puterile lui s și toți coeficienții sînt pozitivi deși are o pereche de zerouri în semiplanul drept.

Prin urmare dacă o funcție rațională candidează pentru caracterul real-pozitiv, acest criteriu poate fi utilizat ca un test negativ. Dacă numărătorul sau numitorul polinomului au vreun coeficient negativ, sau puteri ale lui s care lipsesc (altfel decît toți coeficienții termenilor pari, sau impari, menționați mai înainte), funcția poate fi respinsă. Pe de altă parte, dacă este admisă de test, nu se poate spune încă nimic precis despre funcție.

Un alt test simplu rezultă din faptul că o funcție real-pozitivă nu poate avea mai mult decît un pol simplu, sau un zero simplu, în zero sau la infinit (care sînt pe axa $j\omega$). Aceasta cere ca cea mai mare putere a lui s de la numărător și de la numitor să nu difere cu mai mult decît o unitate; și în mod similar pentru puterile mai mici.

Pentru exemplificare vom considera cîteva funcții raționale și vom vedea dacă pot fi examinate rapid ca nesatisfăcînd unele condiții necesare pentru funcțiile real-pozitive.

Funcția	Observația
$F(s) = \dfrac{s^2+2s+2}{s+1}$	Nu mai mult de un pol simplu la infinit; coeficienți pozitivi. Poate fi real-pozitivă.
$F(s) = \dfrac{s^4+3s^2+2s+2}{s^3+4s^2+s+2}$	Coeficientul termenului cubic lipsește. Nu este real-pozitivă.
$F(s) = \dfrac{s+2}{s^3+5s^2+3s+1}$	Zero dublu la infinit. Nu este real-pozitivă.
$F(s) = \dfrac{s^3+2s}{s^3+5s^2+2s+5}$	Lipsesc coeficienți ai unor termeni la numărător, dar numai cei ai puterilor pare. Poate să fie real-pozitivă. (În realitate este).
$F(s) = \dfrac{(s+1)\ (s+3)\ (s+4)}{(s+2)^3}$	Nu are coeficienți negativi sau nuli, dar există un pol triplu în $s=-2$ ceea ce poate părea particular. Nu este eliminată. (În realitate este real-pozitivă).

[1]) Polinoamele avînd numai zerouri simple și în perechi conjugate pe axa imaginară care pot fi considerate polinoame Hurwitz în sens larg, sînt impare, dacă au un zero în origine (ex.: $s(s^2+1)\ (s^2+4) = s^5+5s_3+4s$ și pare atunci cînd nu conțin zeroul din origine (ex.: $(s^2+1)\ (s^2+4) = s^4+5s_2+4$). (N.T.).

Proprietatea argumentului unei funcţii real-pozitive

O proprietate importantă a impedanţei unui circuit pasiv, găsită mai înainte, a fost proprietatea argumentului, dată în (50). Această proprietate poate fi demonstrată matematic, fără a se recurge la consideraţii de energie, numai din definiţia dată funcţiei real-pozitive. Totuşi demonstraţia, deşi directă este cam lungă, de aceea nu va fi dată dar va fi enunţată printr-o problemă. Presupunînd că relaţia (50) este adevărată pentru o funcţie $F(s)$ reală, urmează că $F(s)$ este real-pozitivă.

$$\mathrm{Re}[F(s)] = |F(s)| \cos[\arg F(s)]$$

$$\geqslant |F(s)| \cos[\arg s] \geqslant 0 \qquad \left(0 \leqslant |\arg s| \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Această proprietate a argumentului este nu numai necesară ci şi suficientă. O vom enunţa aici sub forma unei teoreme.

Teorema 10. *O funcţie raţională, reală, $F(s)$ este real-pozitivă dacă şi numai dacă*

$$|\arg F(s)| \leqslant |\arg s| \qquad \left(0 \leqslant |\arg s| \leqslant \frac{\pi}{2}\right). \tag{73}$$

Funcţii real-limitate

De funcţia real-pozitivă se poate lega, printr-o transformare bilineară, o altă funcţie. Funcţia care se obţine astfel posedă unele proprietăţi interesante. Să considerăm următoarea transformare bilineară:

$$W(s) = \frac{1-F(s)}{1+F(s)} \quad \text{sau} \quad F(s) = \frac{1-W(s)}{1+W(s)}. \tag{74}$$

Corespondenţa între planele F şi W este arătată în fig. 7.7. Semiplanul drept al planului F este transformat în interiorul cercului unitate din planul W. Axa $j\omega$ devine conturul cercului unitate.

Dacă $F(s)$ este o funcţie rp, valorile din semiplanul drept al lui s, se transformă în valori în semiplanul drept al lui F şi astfel sînt transformate în interiorul cercului unitate din planul W. Dacă $s = j\omega$, $F(j\omega)$ ia valori situate în semiplanul drept sau pe axa jX şi acestea devin valori în interiorul, sau pe conturul, cercului unitate din planul W. Prin urmare, dacă $F(s)$ este rp şi $W(s)$ este legat de F prin (74), atunci

$$|W(j\omega)| \leqslant 1. \tag{75}$$

Acum să considerăm polii lui $W(s)$. Din (74), aceştia se găsesc acolo unde $F(s) = -1$. Valorile lui s pentru care relaţia este adevărată nu pot să fie situate în semiplanul drept închis, deoarece dacă $F(s)$ este rp, aceasta ar însemna că $\operatorname{Re} F < 0$ pentru $\operatorname{Re} s \geqslant 0$.
Prin urmare $W(s)$ trebuie să fi regulată atît în semiplanul drept cît şi pe axa $j\omega$.

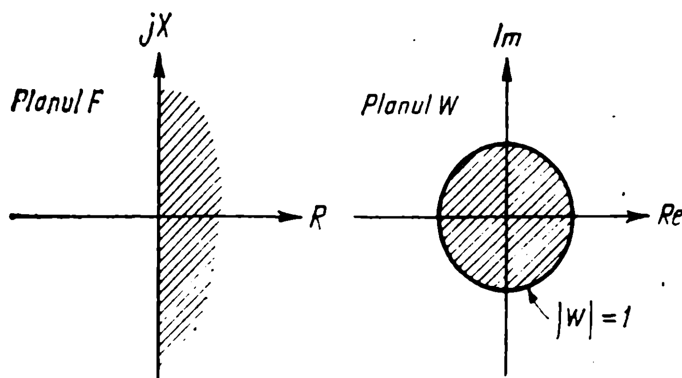


Fig. 7.7. Corespondenţa transformării bilineare.

O funcţie $W(s)$ care are aceste proprietăţi şi anume : $W(s)$ este regulată în semiplanul drept închis şi $|W(j\omega)| \leqslant 1$, se numeşte *real-limitată*. Astfel, *o transformare bilineară a unei funcţii real-pozitivă este real-limitată*. Reciproca este şi ea adevărată adică : *o transformare bilineară a unei funcţii real-limitată este real-pozitivă*. Cîteva consideraţii fiind făcute, demonstraţia rămîne în seama cititorului.

Această legătură dintre o funcţie real-limitată şi o funcţie real-pozitivă conduce la o concluzie interesantă. Să presupunem că o funcţie rp este scrisă astfel

$$F(s) = \frac{m_1(s)+n_1(s)}{m_2(s)+n_2(s)}, \tag{76}$$

unde m_1 şi m_2 sînt polinoame pare, iar n_1 şi n_2 sînt impare. Atunci, transformarea bilineară (74) ne dă :

$$W(s) = \frac{(m_2-m_1)+(n_2-n_1)}{(m_2+m_1)+(n_2+n_1)}. \tag{77}$$

Pătratul modulului $|W(j\omega)|^2$ devine

$$|W(j\omega)|^2 = \left.\frac{(m_2-m_1)^2-(n_2-n_1)^2}{(m_2+m_1)^2-(n_2+n_1)^2}\right|_{s=j\omega} \leqslant 1. \tag{78}$$

Acum să presupunem că m_1 şi m_2 se schimbă între ele; valoarea lui $|W(j\omega)|$, nu va fi desigur afectată aşa cum se observă din (78) şi nici polii lui $W(s)$, aşa cum se observă din (77), deşi zerourile lui $W(s)$ se modifică. Să numim noua funcţie obţinută din $W(s)$, prin schimbarea reciprocă a m_1 cu m_2, $\hat{W}(s)$, Evident, aceasta este o funcţie real-limitată. Din (77) se găseşte că $\hat{W}$ este:

$$\hat{W}(s) = \frac{(m_1 - m_2) + (n_2 - n_1)}{(m_2 + m_1) + (n_1 + n_2)}. \tag{79}$$

Prin transformare bilineară se găseşte funcţia $\hat{F}(s)$ corespunzătoare

$$\hat{F}(s) = \frac{m_2(s) + n_1(s)}{m_1(s) + n_2(s)}. \tag{80}$$

Aceasta este chiar funcţia $F(s)$ de la care s-a pornit, care are acum părţile pare de la numărător şi numitor schimbate între ele. Deoarece $\hat{F}(s)$ este o transformare bilineară a unei funcţii real-limitată, ea este rp. Inversa lui $\hat{F}(s)$ este tot rp. Dar inversa lui $\hat{F}$ este tot $F(s)$, cu $n_1(s)$ şi $n_2(s)$schimbate între ele. Concluzia este dată prin teorema următoare:

Teorema 11. *Dacă într-o funcţie real-pozitivă, puterile pare sau puterile impare de la numărător şi numitor, sînt schimbate între ele se obţine tot o funcţie real-pozitivă.*

Funcţia părţii reale

Deoarece partea reală a unei funcţii rp joacă un rol atît de important, vom examina comportarea părţii reale a unei astfel de funcţii pe axa $j\omega$. Să ne amintim că partea reală a funcţiei F, considerată pe axa j este partea pară evaluată pentru $s = j\omega$, adică:

$$R(\omega) = \mathrm{Re}[F(j\omega)] = \mathrm{Par}\,[F(s)]_{s=j\omega} = \tfrac{1}{2}\,[F(j\omega) + F(-j\omega)] \tag{81}$$

astfel că, constatările făcute despre partea pară pot fi imediat interpretate prin intermediul părţii reale pe axa $j\omega$.

Se ştie că $R(\omega)$ este în mod necesar o funcţie pară de ω şi că este nenegativă pentru orice ω. În mod simplu, se poate arăta că partea pară a lui $F(s)$ nu poate avea poli pe axa $j\omega$. Orice poli ai părţii pare vor fi şi poli ai lui $F(s)$; dar fiind situaţi pe axa $j\omega$ aceştia trebuie să fie simpli. Considerînd pe $F(s)$ dezvoltat în fracţii parţiale ca în (71), funcţia $\hat{F}(s)$

va conţine aceiaşi termeni, dar toţi cei care includ polii de pe axa $j\omega$ vor avea semnul negativ. Prin urmare, atunci cînd se formează partea pară $F(s) + F(-s)$ aceştia toţi se vor anula iar funcţia va rezulta fără poli pe axa $j\omega$. Interpretînd aceasta prin prisma proprietăţilor părţii reale înseamnă că $R(\omega)$ *trebuie să fie limitată la orice* ω.

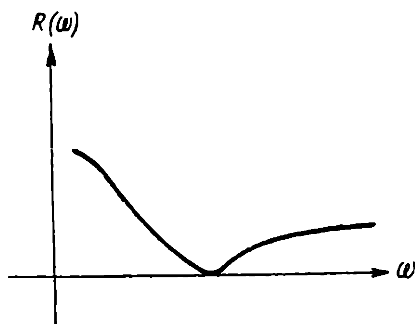


Fig. 7.8. Reprezentarea părţii reale a unei funcţii real-pozitivă.

Acum să considerăm un zero posibil pentru $R(\omega)$. Fig. 7.8 arată o reprezentare a lui $R(\omega)$ în vecinătatea unui zero. Datorită cerinţelor relative la caracterul real-pozitiv, $R(\omega)$ trebuie să rămînă pozitivă de ambele părţi ale zeroului. Urmează că zeroul lui $R(\omega)$ de pe axa ω nu poate fi de multiplicitate impară, ci trebuie să aibă multiplicitate pară.

Am determinat aici unele condiţii necesare pentru partea reală, a unei funcţii real-pozitive, considerată pe axa j. Să enunţăm un set de condiţii necesare şi suficiente printr-o teoremă.

Teorema 12. *O funcţie reală $R(\omega)$ de o variabilă reală ω este partea reală a unei funcţii real-pozitivă $F(s)$, considera pe axa j, dacă şi numai dacă*

(a) $R(\omega)$ *este o funcţie raţională pară cu coeficienţi reali*

(b) $R(\omega)$ *este limitată la orice* ω.

(c) $R(\omega)$ $\geqslant$ *pentru orice* ω.

Am văzut deja că aceste condiţii sînt necesare. De fapt, în Capitolul 6 s-a demonstrat, printr-o construcţie de funcţie, că pentru a găsi o funcţie $F(s)$ raţională reală, dintr-un $R(\omega)$, condiţiile (a) şi (b) sînt suficiente. Dacă şi condiţia (c) este satisfăcută, aceasta este suficient pentru ca funcţia respectivă să fie o funcţie real-pozitivă.

7.5. FUNCŢII DE REACTANŢĂ

Să ne concetrăm acum asupra unor tipuri speciale de funcţii real-pozitive. Acestea apar atunci cînd se consideră circuite cu numai două tipuri de elemente (*LC*, *RC*, *RL*). Istoriceşte, aceste circuite au fost studiate înaintea altora mai generale, începînd cu lucrarea din 1924, datorată lui Foster.

Vom considera la început un circuit fără rezistenţe. Astfel de circuite se cunosc ca circuite *nedisipative*, sau *reactive*. În teorema 5 am notat că impedanţa de intrare într-un circuit fără pierderi este pur imaginară pe axa $j\omega$; adică avem $\mathrm{Re}\,[Z(j\omega)] = 0$. Formulînd aceasta prin intermediul unei transformări, impedanţa unui circuit nedisipativ, transformă

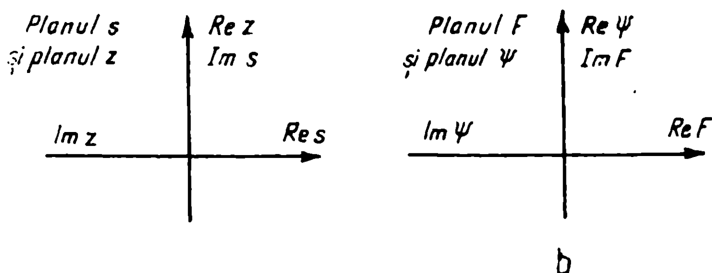


Fig. 7.9. Transformare care roteşte axele cu $\pi/2$ radiani.

axa imaginară a planului s, în axa imaginară a planului Z. După ce am observat această proprietate a impedanţei unui circuit, vom reveni în matematică şi vom lua această proprietate ca bază de definiţie. Vom formula următoarea definiţie: *O funcţie de reactanţă este o funcţie real-pozitivă care transformă axa imaginară în axă imaginară.* În această terminologie impedanţa de intrare într-un circuit fără pierderi este o funcţie de reactanţă.

Să stabilim acum cîteva proprietăţi ale funcţiilor de reactanţă. În primul rînd vom arăta că polii şi zerourile unei funcţii de reactanţă sînt situaţi numai pe axa $j\omega$.

Pentru a demonstra această teoremă, să observăm că, la fel cu o funcţie care transformă axa reală în axa reală, şi care este simetrică în raport cu axa reală [de ex. $F(\bar{s}) = \overline{F}(s)$]; o funcţie care transformă axa imaginară în axa imaginară este simetrică în raport cu axa imaginară. Pentru a vedea clar acest lucru să rotim cele două plane (planul s şi planul F) in sensul acelor de ceasornic cu $\pi/2$ radiani. Realizăm aceasta dacă definim

$$z = \frac{s}{j}, \tag{82a}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{j}F(jz). \tag{82b}$$

Aceste transformări sînt arătate în fig. 7.9. Să observăm că axa reală devine axă imaginară şi viceversa. Un caz similar se obţine pentru cealaltă transformare. Dacă z este real, argumentul lui $F(jz)$ este imaginar,

astfel că prin ipoteză $F(jz)$ va fi de asemenea imaginar. Prin urmare $\psi(z)$ va fi real dacă z este real. Aceasta rezultă din proprietatea de reflexie dată de relația (6) din capitolul 6 astfel că

$$\psi(\bar{z}) = \bar{\psi}(z) \tag{83}$$

Dacă acum revenim, prin transformarea, din (82), această relație devine

$$F(-\bar{s}) = -\bar{F}(s) \tag{84}$$

Observăm că punctul $-\bar{s}$ este imaginea punctului s, în raport cu axa imaginară. Un caz similar se obține pentru punctele $-\bar{F}$ și F. Rezultă că în concordanță cu (84) punctele imagini în raport cu axa imaginară din planul s, devin puncte imagini în raport cu axa imaginară a planului F.

Rezultă că dacă $F(s)$ are un pol sau un zero în semiplanul stîng, atunci punctul imagine din semiplanul drept este de asemenea un pol, sau un zero, ceea ce nu este posibil pentru o funcție rp. Deci, *polii și zerourile unei funcții de reactanță trebuie să fie situați numai pe axa* $j\omega$.

Să revenim pentru un moment la teorema 6. Acolo am văzut că dacă o funcție rp transformă un punct situat pe axa $j\omega$ într-un punct de pe axa imaginară, atunci derivata funcției în acel punct este reală și pozitivă. Dar conform teoremei 5, o funcție de reactanță transformă întreaga axă $j\omega$ în axa imaginară a planului F. Prin urmare, pentru o astfel de funcție proprietatea pentru derivată va fi adevărată în toate punctele de pe axa $j\omega$ (cu excepția polilor). Pe aceasta se bazează o altă proprietate foarte importantă și anume: *polii și zerourile unei funcții de reactanță alternează pe axa* $j\omega$; adică, între doi poli oarecare există un zero și între două zerouri oarecare există un pol.

Așa cum s-a mai constatat, teorema 6 se aplică în toate punctele de pe axa $j\omega$ cu excepția polilor. Prin urmare derivata dF/ds evaluată la $s = j\omega$ este reală și pozitivă. Să calculăm derivata în lungul axei $j\omega$, ceea ce este posibil deoarece derivata există. Se găsește

$$\left.\frac{dF}{ds}\right|_{s=j\omega} = \frac{dF(j\omega)}{d(j\omega)} = \frac{d\,[jX(\omega)]}{d(j\omega)} = \frac{jdX(\omega)}{jd\omega} = \frac{dX(\omega)}{d\omega} > 0. \tag{85}$$

Am utilizat notația uzuală $F(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ și deoarece F este aici o funcție de reactanță, $R(\omega)$ este zero. Observăm că $X(\omega)$ este o funcție reală de o variabilă reală. Rezultă că, dacă nu avem nici un pol între două zerouri ale lui $X(\omega)$, derivata ar deveni negativă undeva între ele ceea ce, tocmai am arătat, că este imposibil. O concluzie similară se aplică pentru poli succesivi. Fig. 7.10 ilustrează forma pe care $X(\omega)$ ar trebui să o aibă, dacă nu ar avea polii și zerourile alternați.

Proprietatea pe care am demonstrat-o este numită alternanţa polilor şi zerourilor. Din această proprietate rezultă clar că diagrama pentru $X(\omega)$ trebuie să aibă forma generală din fig. 7.11.

Deoarece $X(\omega)$ este o funcţie impară iar alternanţa polilor şi zerourilor trebuie să aibă loc pe întreaga axă imaginară (la valori ω pozitive şi negative), rezultă că *punctul $s = 0$ este un zero sau un pol pentru o funcţie de reactanţă.*

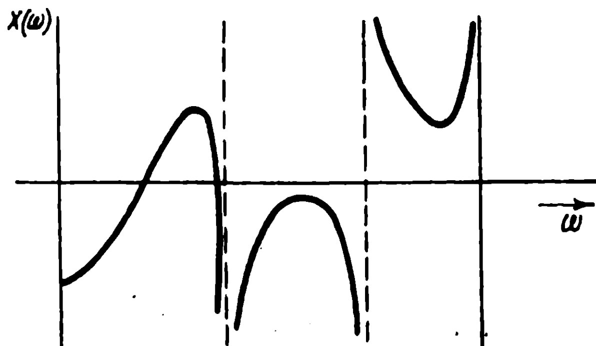


Fig. 7.10. Comportare nepermisă pentru o funcţie de reactanţă.

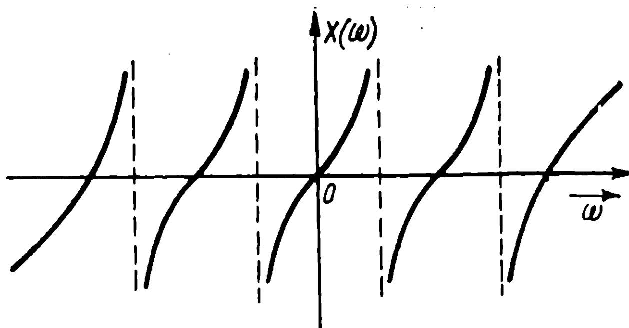


Fig. 7.11. Comportarea unei funcţii de reactanţă.

Observăm că dacă $F(s)$ este o funcţie rp care transformă axa $j\omega$ în axă imaginară şi $F(1/s)$ este de acelaşi tip. Cu transformarea $s \to 1/s$ punctul ∞ din planul s, devine origine în planul $1/s$. Deci, utilizînd rezultatul precedent găsim, că *pentru o funcţie de reactanţă punctul $s = \infty$ este un zero, sau un pol.*

Am discutat cîteva proprietăţi ale funcţiei de reactanţă. Vom observa de asemenea că, unele proprietăţi generale ale funcţiilor rp, se aplică în mod particular funcţiilor de reactanţă. Astfel, deoarece am arătat că polii şi zerourile unei funcţii rp, care sînt situaţi pe axa $j\omega$, sînt simpli şi că reziduurile în aceşti poli sînt reale şi pozitive, vom trage concluzia

că *toți* polii și *toate* zerourile unei funcții de reactanță sînt simple și că reziduul în oricare din poli este real și pozitiv.

Acum sîntem în situația de a consolida rezultatele noastre cu privire la funcțiile de reactanță și de a stabili condițiile necesare și suficiente, pentru ca o funcție rațională de s, să fie o funcție de reactanță.

Teorema 13. *O funcție rațională, reală, $\psi(s)$, este o funcție de reactanță dacă și numai dacă;*

1. *Toți polii săi sînt situați pe axa $j\omega$;*
2. *Toate reziduurile sînt reale și pozitive;*
3. *Funcția are un pol sau un zero în $s = 0$ și $s = \infty$* [1]) *și*
4. *Re $\psi(j\omega) = 0$ pentru orice ω.*

Observăm că acest enunț se referă numai la poli și la reziduuri, nu și la zerouri. Am arătat că aceste condiții sînt necesare, rămîne să arătăm că acestea sînt și suficiente; adică, presupunînd că o funcție rațională satisface condițiile formulate, trebuie să rezulte că funcția este practic o funcție de reactanță. Aceasta se poate arăta, în modul cel mai simplu, considerînd dezvoltarea în fracții parțiale a unei astfel de funcții. Dacă combinăm cîte doi termeni, datorați polilor conjugați, cea mai generală formă a dezvoltării în fracții parțiale va fi [2]).

$$\psi(s) = \frac{k_0}{s} + k_\infty s + \sum_{i=1}^{n} \frac{2k_i s}{s^2+\omega_i^2}, \tag{86}$$

unde sumarea se face asupra tuturor polilor și toate k-urile sînt pozitive. Desigur, polul din origine, sau de la infinit, sau ambele, pot să lipsească. Această expresie coincide cu (71) avînd $F_r(s) = 0$, deoarece în cazul de față nu există poli decît pe axa $j\omega$. Rezultatul căutat se obține îndată. Fiecare termen din această expresie este imaginar la valori imaginare ale lui s, astfel că $\psi(s)$ transformă axa imaginară în axă imaginară, ceea ce face ca $\psi(s)$ să fie prin definiție o funcție de reactanță.

Proprietatea de alternanță a polilor și zerourilor formează baza unui alt set de condiții necesare și suficiente formulate astfel:

Teorema 14. *O funcție rațională, reală de s este o funcție de reactanță dacă și numai dacă toți polii și zerourile sale sînt simple, situate pe axa $j\omega$ și alternează.*

Și în acest caz am demonstrat că o funcție de reactanță îndeplinește cu necesitate aceste condiții. Rămîne să arătăm că aceste condiții sînt

---

[1]) Condiția 3 este în mod necesar satisfăcută, dacă 1, 2 și 4 sînt satisfăcute. (N.T.).

[2]) În absența condiției 4 din teorema 13, în dezvoltarea (86) poate să apară un termen constant. Condiția 4 este necesară pentru eliminarea acestei constante.

suficiente. O funcție rațională care satisface condițiile date trebuie să aibă forma următoare:

$$\psi(s) = K\frac{s(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_3^2)\cdots(s^2+\omega_{2n-1}^2)}{(s^2+\omega_0^2)(s^2+w_2^2)\cdots(s^2+\omega_k^2)}, \tag{87}$$

în care

$$0 \leqslant \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \cdots < \omega_{2n-2} < \omega_{2n-1} < \omega_{2n} < \infty, \tag{88}$$

În (87) K este o constantă pozitivă iar $k = 2n-2$ sau $2n$ după cum $\psi(s)$ are un zero sau un pol la infinit. Dacă $\psi(s)$ are un pol în $s = 0$, luăm pe ω_0 egal cu zero. În acest caz se anulează un factor s. Rezultatul căutat se găsește imediat. Fiecare factor pătratic, de pol sau zero, din (87) este real cînd s este imaginar. Aceasta înseamnă că datorită factorului s, $\psi(s)$ este imaginar la s imaginar. Prin urmare, $\psi(s)$ este o funcție de reactanță prin definiție. [1])

Realizarea funcțiilor de reactanță

La începutul acestei discuții am arătat că impedanța de intrare într-un circuit nedisipativ este în mod necesar o funcție de reactanță. Să notăm că și admitanța de la intrare într-un circuit nedisipativ este tot o funcție de reactanță, adică

$$Y(s) = 1/Z(s) \tag{89}$$

este de asemenea imaginară pentru valorile imaginare ale lui s care fac pe $Z(s)$ imaginară.

Se pune acum întrebarea dacă reciproca acestei condiții este și ea adevărată; cu alte cuvinte dacă o funcție de reactanță dată este impedanța (sau admitanța) de intrare a vreunui circuit nedisipativ? Pentru a răspunde la această întrebare afirmativ, trebuie să construim un circuit nedisipativ care să aibă ca impedanță sau admitanță funcția de reactanță dată. La această întrebare, Foster a răspuns în 1924 prin celebra sa teoremă a reactanței (deși nu în forma dată aici).

Teorema 15. *O funcție rațională de s este o funcție de reactanță dacă și numai dacă reprezintă impedanța sau admitanța de intrare a unui circuit fără pierderi.*

---

[1]) S-ar părea că, acest argument cere numai ca, $\psi(s)$ să fie o funcție rațională impară: un raport de două polinoame pare cu un factor s suplimentar la numărător sau numitor. Dar pe lîngă faptul că funcția de reactanță transformă axa imaginară în axa imaginară această funcție trebuie să fie și rp. O funcție rațională și impară care nu are proprietatea de alternanță nu va fi rp.

Suficiența a fost deja stabilită. Rămîne să arătăm că dîndu-ne o funcție de reactanță, aceasta este în mod necesar impedanța sau admitanța unui circuit nedisipativ. Pentru a arăta aceasta să revenim la dezvoltarea în fracții parțiale a funcției de reactanță dată în (86). Putem să recunoaștem în fiecare termen al sumei din dezvoltarea în fracții parțiale, impedanța sau admitanța unei reactanțe cu schema foarte simplă. Schemele sînt arătate în fig. 7.12. Astfel, dacă $\psi(s)$ trebuie să fie o impedanță,

Funcția	Reprezentarea circuitului	
	Impedanța	Admitanța
$\frac{k_0}{s}$	$C=1/k_0$	$L=1/k_0$
$k_\infty s$	$L=k_\infty$	$C=k_\infty$
$\frac{2k_i s}{s^2+\omega_i^2}$	$L=2k_i/\omega_i^2$ $C=1/2k_i$	$C=2k_i/\omega_i^2$ $L=1/2k_i$

Fig. 7.12. Reprezentarea termenilor din dezvoltarea în fracții parțiale.

putem să o reprezentăm ca pe o combinație serie de uniporți elementari, ca cei din coloana 2, a fig. 7.12. Dacă $\psi(s)$ trebuie să fie o admitanță, putem să o reprezentăm ca pe o combinație paralel de uniporți elementari, ca cei din coloana 3. Schemele circuitelor obținute sînt arătate în fig. 7.13. Ele sînt numite prima și a doua schemă Foster.

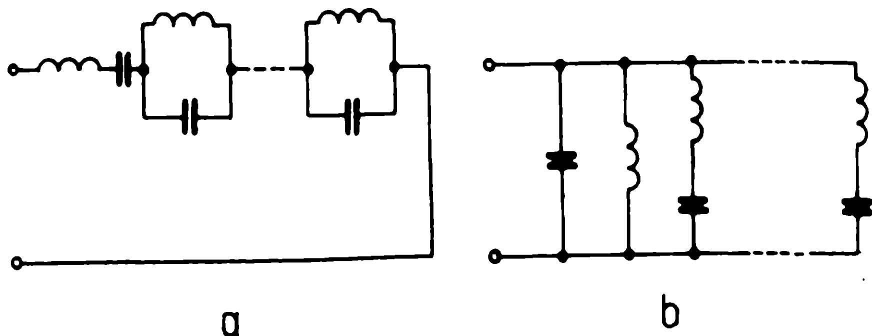


Fig. 7.13. Schemele Foster ale uniporților nedisipativi.

Teorema este complet demonstrată. Am găsit că o reactanță dată poate fi atît impedanța cît și admitanța unui circuit nedisipativ (bineînțeles, nu pentru același circuit).

Să exemplificăm acest rezultat cu funcția care urmează. Fie

$$Z(s) = \frac{4(s^2+1)(s^2+9)}{s(s^2+4)} = 4s + \frac{9}{s} + \frac{15s}{s^2+4} \tag{90 a}$$

sau

$$Y(s) = \frac{s(s^2+4)}{4(s^2+1)(s^2+9)} = \frac{1}{32}\left(\frac{3s}{s^2+1} + \frac{5s}{s^2+9}\right) \tag{90 b}$$

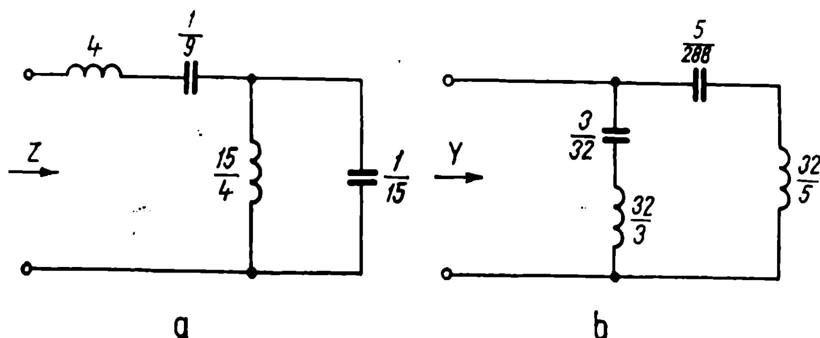


Fig. 7.11. Realizări de circuite reactive.

În prima funcție se recunoaște că termenul $4s$ reprezintă impedanța unei bobine de patru unități. La fel, $9/s$ reprezintă impedanța unei capacități de (1/9) – unități. (Unitățile nu sînt Henry sau Farad, deoarece se presupune că funcția este normată.) Impedanța unei ramuri LC în paralel este

$$Z = \frac{s/C}{s^2 + \frac{1}{LC}}.$$

Rezultă, direct prin comparație, că valorile L și C trebuie să fie $C = \frac{1}{15}$, $L = \frac{15}{4}$. Circuitul va avea schema din fig. 7. 11 *a*.

Admitanța din (90.*b*) este formată din doi termeni și fiecare poate să fie realizat printr-o bobină cu o capacitate în serie. Admitanța unui astfel de circuit serie acordat este

$$Y = \frac{s/L}{s^2 + \frac{1}{LC}}.$$

Rezultă că valorile L şi C pentru fiecare din cele două laturi pot fi găsite comparînd această expresie cu fiecare din termenii numerici ai funcţiei date. Rezultatul este prezentat în fig. 7.14 *b*.

Cele două circuite obţinute sînt complet echivalente la bornele lor. Nici o măsurătoare nu va arăta diferenţe între ele.

Schema circuitelor în scară

Circuitele Foster nu sînt singurele circuite care pot să realizeze o funcţie dată. (Există de fapt un număr infinit de scheme diferite.)

Înainte de a generaliza, să prezentăm o altă variantă posibilă pentru exemplul tratat. Impedanţa din (90) are un pol la infinit. Dacă acest pol este extras în întregime din $Z(s)$, funcţia care rămîne nu va mai avea un pol la infinit deci, va avea un zero la infinit. Astfel

$$Z_1(s) = Z(s) - 4s = \frac{4(s^2+1)(s^2+9)}{s(s^2+4)} - 4s = \frac{24s^2+36}{s^3+4s}$$

$$= \left(\frac{s^3+4s}{24s^2+36}\right)^{-1} = \left(\frac{s}{24} + \frac{5s/2}{24s^2+36}\right)^{-1}.$$

Scăderea lui $4s$ din impedanţă presupune de fapt extragerea unei bobine de patru unităţi din circuit, aşa cum se arată în fig. 7.15 *a*, rămînînd un circuit cu impedanţa Z_1. Acum, inversa lui Z_1 va avea un pol la infinit. Acest pol poate fi complet extras scăzînd $s/24$ ceea ce ne dă

$$Y_2 = Y_1 - \frac{s}{24} = \frac{5s/2}{24s^2+36} = \left(\frac{24s^2+36}{5s/2}\right)^{-1} = \left(\frac{48s}{5} + \frac{72}{5s}\right)^{-1}.$$

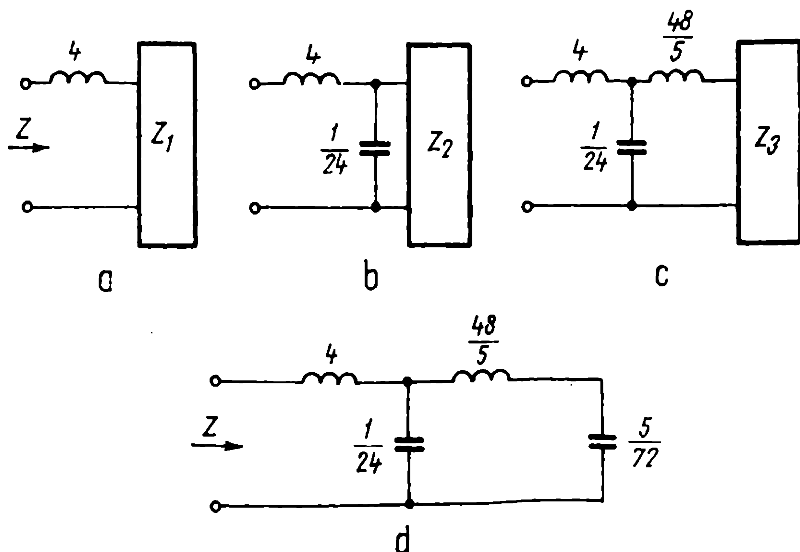


Fig. 7.15. Realizarea unei impedanţe cu un circuit în scară.

Operația echivalentă scăderii lui $s/24$ din admitanță, este extragerea unei capacități de 1/24 unități, în paralel cu bornele de intrare în Z_1, așa cum se arată în fig. 7.15 *b*. Admitanța Y_2, rămasă după această extragere, nu are nici un pol la infinit, dar inversa Z_2 are acest pol. Acesta poate fi extras rezultînd:

$$Z_3 = Z_2 - \frac{48s}{5} = \frac{72}{5s}$$

$$Y_3 = \frac{5}{72} s.$$

Scăderea unei impedanțe de $48s/5$ este echivalentă cu extragerea în circuit, a unei bobine de 48/5 unități, așa cum se arată în fig. 7.15 *c*. Impedanța Z_3 care rămîne este destul de simplă, pentru a fi identificată cu o capacitate. Circuitul final este arătat în fig. 7.15 *d*.

Acesta este de forma unui circuit în scară.

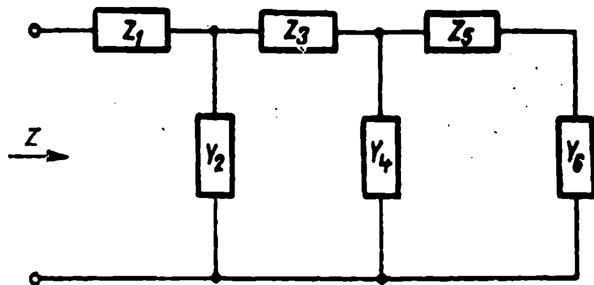


Fig. 7.16. Circuit în scară cu impedanțele de laturi arbitrare.

În fig. 7.16 este arătat un circuit în scară avînd impedanțe de laturi arbitrare. Impedanța acestuia poate fi scrisă în formă de fracție continuă:

$$Z = Z_1 + \cfrac{1}{Y_2 + \cfrac{1}{Z_3 + \cfrac{1}{Y_4 + \cfrac{1}{Z_5 + \cfrac{1}{Y_6}}}}} \tag{91}$$

În exemplul tratat mai înainte, s-a urmărit de fapt, etapă cu etapă, o dezvoltare în fracție continuă, în care fiecare funcție Z_i și Y_i din (91) să fie de forma ks, unde k reprezintă o inductanță sau o capacitate.

Dezvoltarea operează exclusiv asupra polului de la infinit extrăgînd acest pol, alternativ, din impedanță și apoi din admitanța care rămîne. Rezultatul acestui proces, pentru o funcție de reactanță arbitrară, va conduce la forma de circuit arătată în fig. 7.17 *a*.
O altă dezvoltare în fracție continuă se poate obține, operînd asupra polului din origine, $s = 0$. Dezvoltarea se realizează extrăgînd polul din $s = 0$, în mod alternativ, din impedanță și apoi din admitanța care rămîne, pînă cînd funcția este dezvolată. [1])

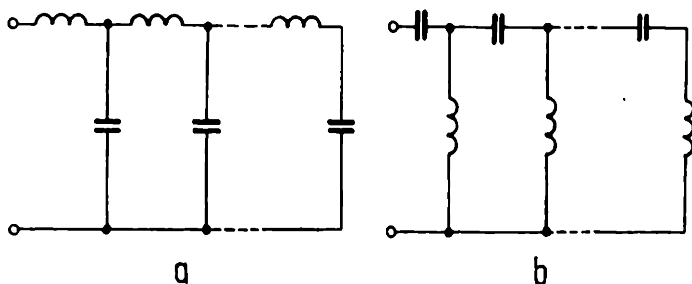


Fig. 7.17. Prima și a doua schemă Cauer, pentru circuite nedisipative, în scară.

Pentru exemplul tratat mai înainte dezvoltarea este:

$$Z(s) = \frac{4(s^2+1)(s^2+9)}{s(s^2+4)} = 9/s + \frac{4s^3+31s}{s^2+4} = 9/s + \cfrac{1}{4/31s + \cfrac{15s/31}{4s^2+31}} =$$

$$= 9/s + \cfrac{1}{4/31s + \cfrac{1}{961/15s + \cfrac{1}{15/124s}}}$$

Rezultatul este cel din fig. 17 *b* cu primele patru elemente fiind $C_1 = 1/9$, $L_2 = 31/4$, $C_3 = 15/961$ și $L_4 = 124/15$.

Rezumînd, am arătat că impedanța și admitanța unui circuit fără pierderi sînt funcții de reactanță și reciproc, dîndu-se o funcție de reactanță se poate găsi un număr de circuite, a căror impedanță sau admitanță să fie egală cu funcția de reactanță dată.

---

[1]) Funcția de reactanță poate fi realizată și prin sinteza Foster-Cauer aplicînd componentelor funcției de reactanță metodele de sinteză Foster sau Cauer, într-o succesiune aleasă arbitrar (vezi de exemplu Weinberg, L.: Network *Analysis and Synthesis*, Mc. Graw-Hill, New York, 1962 pp. 408–409.) Sinteza după Foster și Cauer conduce totdeauna la scheme canonice cu număr minim de elemente. Pe lîngă acestea, există o mulțime de alte circuite fizice, cu alte scheme electrice, care realizează o funcție de reactanță dată și care pot să aibă, sau să nu aibă, numărul minim de elemente de circuit (N. T.).

Polinoame Hurwitz şi funcţii de reactanţă

Am găsit că o funcţie de reactanţă este funcţie raţională impară, raportul dintre un polinom impar şi unul par, sau viceversa, aşa cum se constată în (87). Dacă notăm polinoamele par şi impar cu $m(s)$ şi respectiv cu $n(s)$, atunci o funcţie de reactanţă $\psi(s)$ poate fi scrisă ca:

$$\psi(s) = \frac{m(s)}{n(s)} \text{ sau } \frac{n(s)}{m(s)} \tag{92}$$

unde m şi n nu au factori comuni.

Acum, să considerăm conectarea în paralel a unui circuit nedisipativ cu o rezistenţă de 1 Ohm. Considerînd că $\psi(s)$ este admitanţa circuitului nedisipativ, impedanţa circuitului paralel va fi:

$$Z(s) = \frac{1}{1+\psi(s)} = \frac{n(s)}{m(s)+n(s)} \text{ sau } \frac{m(s)}{m(s)+n(s)}, \tag{93}$$

unde $\psi(s)$ este exprimat prin (92). Impedanţa acestui circuit RLC va fi rp şi regulată pe axa $j\omega$; rezultă că polii săi nu pot să fie situaţi în semiplanul drept şi pe contur. Polinomul $m+n$ din (93) este deci un polinom strict Hurwitz. Acest rezultat este foarte util. Vom formula această concluzie şi reciproca sa printr-o teoremă.

Teorema 16. *Dacă* $P(s) = m(s) + n(s)$ *este un polinom Hurwitz, atunci raportul* m/n *este o funcţie de reactanţă. Reciproc, dacă raportul între părţile pară şi impară a unui polinom este o funcţie de reactanţă, atunci* $P(s)$ *diferă de un polinăm strict Hurwitz, cel mult printr-un polinom par de multiplicare*[1].

Această teoremă ne oferă mijloace pentru a verifica uşor, dacă o funcţie raţională dată este regulată în semiplanul drept, aşa cum se cere pentru o funcţie real-pozitivă. Vom lua raportul între părţile pară şi impară (sau raportul invers) ale polinomului de la numitor şi îl vom dezvolta în fracţie continuă sau prin fracţii parţiale. Pentru exemplificare să considerăm:

$$P(s) = 2s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 3s + 1,$$

$$m(s) = 2s^4 + 6s^2 + 1,$$

$$n(s) = 5s^3 + 3s.$$

---

[1]) O demonstraţie este subliniată prin problema 43 propusă spre rezolvare. O altă demonstraţie se dă în: Norman Balabanian, *Network Synthesis*, Prentice-Hall, Englewood, Cliffs, N.Y. 1958, pp. 77–81.

Acum să formăm raportul m/n şi să-l dezvoltăm în fracţie continuă. Rezultatul va fi:

$$\frac{m}{n} = \frac{2s^4 + 6s^2 + 1}{5s^3 + 3s} = \frac{2s}{5} + \cfrac{1}{\cfrac{25s}{24} + \cfrac{1}{\cfrac{576s}{235} + \cfrac{1}{\cfrac{47s}{24}}}}$$

Elementele din circuitul fără pierderi, corespunzător acestei dezvoltări în fracţie continuă, vor fi toate pozitive. Rezultă că m/n este o funcţie de reactanţă iar $P(s)$ este un polinom strict Hurwitz. În acest exemplu s-a presupus, fără a se face o analiză în detaliu că, polinomul par de multiplicare nu apare. Pentru a verifica aceasta există un criteriu care va rezulta din exemplul următor.

Să considerăm alt exemplu

$$P(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 4s + 8,$$

$$m = 2s^4 + 6s^2 + 8,$$

$$n = s^5 + 3s^3 + 4s.$$

Atunci

$$\frac{n}{m} = \frac{s^5 + 3s^3 + 4s}{2s^4 + 6s^2 + 8} = \frac{s}{2} + 0.$$

Observăm că $n/m = s/2$ este o funcţie de reactanţă, dar dezvoltarea în fracţie continuă s-a terminat prematur deoarece apare un polinom

$$s^4 + 3s^2 + 4 = (s^2 - s + 2)(s^2 + s + 2)$$

care este factor comun atît în partea pară cît şi în cea impară. Acesta este un polinom par, care are două zerouri în semiplanul drept şi două în cel stîng. Polinomul iniţial este:

$$P(s) = (s + 2)\ (s^4 + 3s^2 + 4)$$

şi este produsul dintre un polinom Hurwitz şi un polinom par, în concordanţă cu teorema.

Rezumînd: atunci cînd se dă un polinom $P(s) = m(s) + n(s)$ și dorim să detectăm prezența unui polinom par, ca factor de multiplicare, notăm că acesta este factor comun al părților pară și impară. Rezultă că atunci cînd se ia raportul și se face dezvoltarea în fracție continuă, prezența unui astfel de factor par este semnalată prin terminarea prematură a dezvoltării.

7.6. IMPEDANȚELE ȘI ADMITANȚELE UNOR CIRCUITE *RC*

Să tratăm acum un alt tip de circuite cu două elemente și anume circuitele *RC*. Am putea, dacă am dori, să purtăm o discuție completă asupra acestui caz fără să ne referim la circuitele *LC*. Totuși aceasta ar fi o pierdere de timp, deoarece este posibil să corelăm funcțiile de impedanță cu ajutorul unor transformări potrivite. Acest procedeu a fost utilizat pentru prima dată de Cauer care a extins lucrarea lui Foster la circuitele *RC* și *RL*.

Fie $Z(s)$ impedanța de intrare într-un circuit N de tip *RC*. Alegînd în mod uzual contururile, să notăm matricea impedanțelor de contur a lui N cu

$$Z_m(s) = [c_{ij}(s)], \tag{94}$$

unde elementele matricei sînt

$$c_{ij}(s) = R_{ij} + \frac{1}{sC_{ij}}. \tag{95}$$

Să înlocuim fiecare rezistență din N printr-o inductanță de valoare egală (R Ohm devine R Henry). Atunci matricea impedanțelor de contur pentru noul circuit N' devine:

$$\zeta_m(s) = \left[sR_{ij} + \frac{1}{sC_{ij}}\right] = \left[s\left(R_{ij} + \frac{1}{s^2 C_{ij}}\right)\right] = sZ_m(s^2). \tag{96}$$

Impedanța de intrare în circuitul N' se găsește ca o soluție a ecuațiilor de contur corespunzătoare; aceasta va fi raportul dintre det (ζ_m) și unul din primii săi cofactori principali. Impedanța circuitului N va fi egală cu raportul între det (Z_m) și unul din primii săi cofactori principali. Dar ζ_m și Z_m sînt legate prin relația (96). Prin urmare, dacă ne amintim care este efectul înmulțirii unei matrice cu un scalar s, asupra determinantului său, vom găsi că impedanța circuitului N' va fi

$$\psi(s) = sZ(s^2).$$

Circuitul N' conține numai bobine și capacități astfel că, în ultima ecuație, $\psi(s)$ reprezintă o funcție de reactanță. Astfel, am găsit că impedanța unui circuit RC poate fi transformată într-o funcție de reactanță, dacă se înlocuiește s cu s^2 și apoi se înmulțește cu s.

Ar fi interesant de știut dacă și reciproca este adevărată, adică dîndu-se o funcție de reactanță $\psi(s)$, putem să o transformăm într-o impedanță de circuit RC cu o transformare inversă? Pentru a realiza aceasta să considerăm că funcția de reactanță este dezvoltată în fracții parțiale așa cum s-a arătat în (86). Să împărțim expresia cu s și să înlocuim pe s cu $\sqrt{s}$. (Aceasta este inversa transformării utilizate). Rezultatul va fi:

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\psi(\sqrt{s}) = \frac{1}{\sqrt{s}}\left(\frac{k_0}{\sqrt{s}} + k_\infty\sqrt{s} + \sum_i \frac{2k_i\sqrt{s}}{s+\omega_i^2}\right)$$

$$= \frac{k_0}{s} + k_\infty + \sum_i \frac{2k_i}{s+\omega_i^2}.$$

Fiecare termen din dreapta poate fi identificat cu o schemă simplă RC. Termenul k_0/s este o capacitate; k_∞ este o rezistență. Fiecare din termenii ceilalți reprezintă impedanța unei laturi formată din R în paralel cu C, avînd expresia $(1/C)\,(s + 1/RC)$. Valorile pentru R și C se obțin comparînd cele două expresii. De fapt, avem circuitul din fig. 12, coloana 2, cu bobinele înlocuite prin rezistențe. Pentru o referire mai comodă să formulăm acest rezultat după cum urmează:

Teorema 17. *Dacă $Z_{RC}(s)$ este impedanța de intrare a unui circuit* RC *atunci*

$$\psi(s) = s\,Z_{RC}(s^2) \tag{97}$$

este o funcție de reactanță. Reciproc, dacă $\psi(s)$ este o funcție de reactanță, atunci

$$Z_{RC}(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi(\sqrt{s}) \tag{98}$$

este impedanța de intrare într-un circuit RC.

Să conciderăm acum admitanța unui circuit RC. Utilizînd (98) aceasta poate fi exprimată prin:

$$Y_{RC}(s) = \sqrt{s}\,\frac{1}{\psi(\sqrt{s})}.$$

Dar inversa unei funcţii de reactanţă este tot o funcţie de reactanţă. Rezultă că, avînd dată o funcţie de reactaţă $\psi(s)$ se poate obţine o admitanţă *RC* dacă înlocuim pe s cu $\sqrt{s}$ şi apoi înmulţim cu $\sqrt{s}$. Pentru o referire mai comodă vom formula aceasta astfel:

Teorema 18. *Dacă* $Y_{RC}(s)$ *este admitanţa unui circuit* RC, *atunci*

$$\psi(s) = \frac{1}{s} Y_{RC}(s^2) \tag{99}$$

este o funcţie de reactanţă. Reciproc, dacă $\psi(s)$ *este o funcţie de reactanţă atunci*

$$Y_{RC}(s) = \sqrt{s}\psi(\sqrt{s}). \tag{100}$$

este admitanţa de intrare într-un circuit RC.

Aici găsim o diferenţă fundamentală între funcţiile de reactanţă şi funcţiile impedanţă şi admitanţă *RC*. În timp ce inversa unei funcţii de reactanţă este din nou un membru al aceleiaşi clase de funcţii, inversa unei impedanţe *RC* este un membru al clasei admitanţelor *RC* şi viceversa.

Cu transformările precedente, putem să transferăm toate proprietăţile funcţiilor de reactanţă în proprietăţi ale impedanţelor şi admitanţelor *RC*. Procedeul de stabilire a acestor rezultate este destul de simplu. Pentru început, să aplicăm (98) şi (100) dezvoltării in fracţii parţiale a unei funcţii de reactanţă dată prin (86). Cu modificările corespunzătoare in notarea polilor şi a reziduurilor rezultatul va fi

$$Z_{RC}(s) = k_\infty + \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{k_i}{s + \sigma_i}, \tag{101}$$

$$Y_{RC}(s) = k_\infty s + k_0 + \sum_i \frac{k_i s}{s + \sigma_i}, \tag{102}$$

unde k-urile şi valorile σ sînt toate reale şi pozitive. Să remarcăm că am utilizat aceleaşi notaţii pentru reziduuri şi poli în ambele cazuri, dar acestea sînt expresii generale pentru două clase de funcţiuni care nu se presupun corelate.

Ecuaţia (102) nu este o dezvoltare în fracţii parţiale a funcţiei $Y_{RC}(s)$. Aceasta ar fi mai curînd dezvoltarea lui $Y_{RC}(s)/s$, după care rezultatul a fost înmulţit cu s. Dacă relaţia (102) se împarte cu s găsim o formă identică cu (101). *Aceasta ne arată că o funcţie de admitanţă* RC *împărţită cu s*

este o impedanță RC. Constatăm că polii acestor funcțiuni sînt reali și negativi pe cînd reziduurile lui Z_{RC} și Y_{RC}/s sînt toate pozitive.

Diferențiind ultimele două ecuații în lungul axei reale ($s = \sigma$), vom obține un rezultat care corespunde popriетății funcției de reactanță de a avea o pantă pozitivă, adică

$$\frac{dZ_{RC}(\sigma)}{d\sigma} < 0, \qquad (103\,a)$$

$$\frac{dY_{RC}(\sigma)}{d\sigma} > 0 \qquad (103\,b)$$

Astfel curbele funcțiilor RC de intrare, reprezentate pentru valori reale ale lui s sînt monotone; $Z_{RC}(\sigma)$ este strict descrescătoare, pe cînd $Y_{RC}(\sigma)$ este strict crescătoare. Ca și în cazul funcțiilor de reactanță, aceasta implică faptul că zerourile și polii ambelor funcțiuni trebuie să alterneze, în acest caz pe axa reală negativă.

Diagramele unor funcții de intrare RC, tipice, sînt reprezentate în fig. 7.18 și fig. 7.19, pentru valori reale ale lui s. În fig. 7.18 primul pol de lîngă origine, poate de fapt să se deplaseze în origine făcînd astfel ca $F(O)$ să fie infinită. De asemenea, ultimul zero de pe axa reală negativă se poate deplasa la infinit, făcînd pe $F(\infty)$ să devină zero. La fel, în fig. 7.19, primul zero poate să fie în origine și astfel $F(0)$ devine zero. De asemenea, ultimul pol se poate deplasa la infinit făcînd pe $F(\infty)$ să devină infinit.

Să adunăm acum toate aceste rezultate în cîteva teoreme. Teoremele 19 și 20 sînt pentru impedanțe RC; teoremele 21 și 22 pentru admitanțe RC.

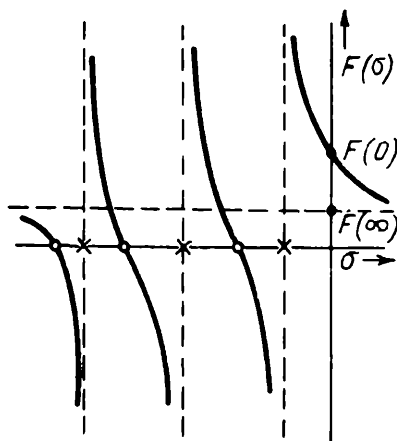


Fig. 7.18. Funcție $Z_{RC}(\sigma)$, tipică.

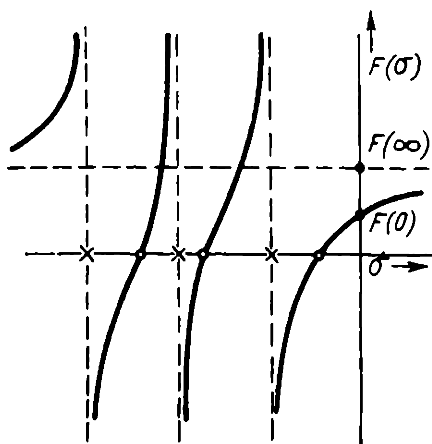


Fig. 7.19. Funcţie $Y_{RC}(\sigma)$, tipică.

Teorema 19. *O funcţie raţională* F(s) *este impedanţa de intrare a unui circuit* RC *dacă şi numai dacă toţi polii săi sînt simpli şi situaţi pe axa reală negativă la valori finite (inculsiv* s = 0), *cu reziduuri reale şi pozitive în toţi polii şi cu* F(∞) *real şi nenegativ.* (Aceasta corespunde teoremei 13 pentru funcţiile de reactanţă.)

Teorema 20. *O funcţie raţională* F(s) *este impedanţa de intrare a unui circuit* RC, *dacă şi numai dacă, toţi polii şi toate zerourile sînt simple, situate alternînd reciproc pe axa reală negativă, iar primul punct critic (pol sau zero) care se întîlneşte pe axa reală negativă, atunci cînd ne deplasăm pe această axă începînd din origine, este un pol.* (Aceasta corespunde teoremei 14 pentru funcţiile de reactanţă.)

Teorema 21. *O funcţie raţională* F(s) *este admitanţa de intrare a unui circuit* RC, *dacă şi numai dacă, toţi polii săi sînt simpli şi restrînşi pe axa reală negativă (exclusiv punctul* s = 0, *dar inclusiv punctul de la infinit), cu* F(0) *real şi nenegativ şi cu toate reziduurile lui* F(s)/s *reale şi pozitive.*

Teorema 22. *O funcţie raţională* F(s) *este admitanţa de intrare a unui circuit* RC, *dacă şi numai dacă, toţi polii şi toate zerourile sînt simple, situate alternînd reciproc pe axa reală, negativă, iar primul punct critic (pol sau zero) care se întîlneşte pe axa reală negativă, atunci cînd ne deplasăm pe această axă începînd din origine, este un zero.* (Singura diferenţă, între această teoremă pentru admitanţe şi teorema 20 pentru impedanţe, este ultimul cuvînt.)

Am sugerat modul în care aceste teoreme pot fi demonstrate în discuţiile precedente. Putem să facem demonstraţiile ca pe un exerciţiu.

Am stabilit cîteva seturi de condiţii necesare şi suficiente pentru ca o funcţie raţională să fie impedanţa sau admitanţa de intrare într-un circuit uniport *RC*. În general, atunci cînd se doreşte să se demonstreze suficienţa unui set de condiţii pentru ca o funcţie dată să fie funcţia de

intrare (sau de transfer) a unui circuit aparţinînd unei clase de circuite, se arată că se poate găsi un circuit (cel puţin unul) din clasa considerată, care să aibă funcţia de circuit dată. În cazul de faţă am legat demonstraţia de cea din cazul funcţiilor de reactanţă, arătînd că funcţia dată poate fi transformată totdeauna într-o funcţie de reactanţă. Această funcţie poate deci să fie realizată ca un circuit LC. Circuitul RC căutat se obţine făcînd transformarea inversă. Aceasta înseamnă că înlocuim fiecare L din circuitul LC cu un R de valoare egală.

Z_{RC}	$k_\infty = R$	$k_0/s = \frac{1}{Cs}$	$\frac{k}{s+\sigma} = \frac{1/C}{s+1/RC}$
	$R = k_\infty$	$C = 1/k_0$	R, C; $C = 1/k$, $R = k/\sigma$
Y_{RC}	$k_\infty s = Cs$	$k = \frac{1}{R}$	$\frac{ks}{s+\sigma}$ $\frac{s/R}{s+1/RC}$
	$C = k_\infty$	$R = 1/k_0$	R C; $R = 1/k$, $C = k/\sigma$

Fig. 7.20. Realizări de tip Foster ale circuitelor RC.

Putem să procedăm şi altfel operînd chiar asupra funcţiei date, dezvoltînd-o în fracţii parţiale aşa cum am făcut pentru funcţiile de reactanţă. Am obţinut pînă acum formele dorite în (101) şi (102). Fiecare termen din aceste expresii poate fi recunoscut ca impedanţă sau admitanţă a unui circuit RC simplu. Conectarea acestor circuite în serie sau în derivaţie (depinzînd dacă funcţia trebuie să fie impedanţă sau admitanţă) conduce la rezultatul dorit. Circuitul va avea aceeaşi schemă ca şi în schemele Foster pentru circuite nedisipative arătate în fig. 7.12. Din acest motiv aceste circuite se numesc realizări Foster ale circuitelor RC, deşi Cauer a fost primul care a obţinut aceste rezultate. În fig. 7.20 se arată realizarea termenilor din (101) şi (102).

Pentru exemplificare, să presupunem că funcţia dată este

$$Z(s) = \frac{2(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)} = 2 + \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s+3}.$$

Polii sînt reali, negativi şi simpli, reziduurile sînt pozitive aşa cum se constată din dezvoltarea în funcţii parţiale. Termenul constant pote fi identificat cu o rezistenţă de două unităţi. Termenul $3/(s+1)$ reprezintă o latură RC în paralel. În fig. 7.20 $C = 1/3$ şi $R=3$. Ultimul ter-

men are aceeaşi formă ca şi al doilea şi poate fi realizat prin acelaşi tip de latură. Realizarea completă este dată în fig. 7.21 *a*.

Să considerăm acum inversa funcţiei date:

$$Y(s) = \frac{(s+1)\,(s+3)}{2(s+2)\,(s+4)} = \frac{1}{16}\left(3 + \frac{2s}{s+2} + \frac{3s}{s+4}\right).$$

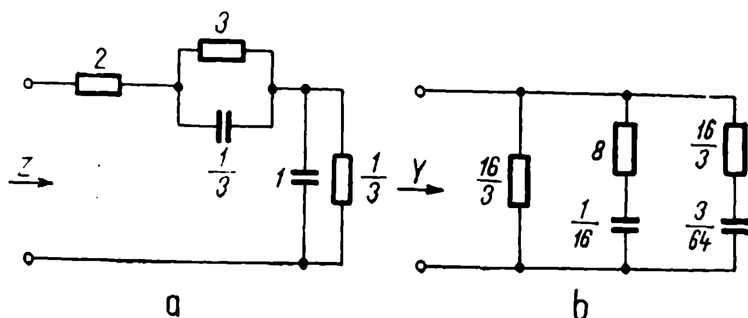


Fig. 7.21. Realizarea unei funcţii date prin circuite *RC*.

Partea din dreapta se obţine printr-o dezvoltare prealabilă a lui $Y(s)/s$ în fracţii parţiale, urmată de o înmulţire cu s. Utilizînd schemele din fig. 7.20 se obţine circuitul din fig. 7.21 *b*. Se poate constata uşor că ambele circuite au aceeaşi impedanţă.

Realizarea circuitelor în scară

Utilizînd transformări convenabile, s-a stabilit o corespondenţă reciprocă între funcţiile de reactanţă şi funcţiile impedanţelor de intrare *RC*, deci, este de aşteptat ca fiecare metodă de realizare a funcţiei de reactanţă să poată fi utilizată pentru realizarea funcţiilor *RC*. Circuitele Foster au fost deja obţinute. Circuitele în scară (de tip Cauer) pot fi şi ele obţinute dezvoltînd Z_{RC} şi Y_{RC} în fracţii continui. Nu vom prezenta dezvoltarea în detaliu a cazului general, deoarece aceasta este oarecum evidentă. În locul acestuia se va prezenta o exemplificare, pornind de la aceeaşi funcţie pentru care s-au obţinut anterior, schemele Foster. Există unele diferenţe specifice în dezvoltarea lui Z_{RC} sau Y_{RC} în fracţie continuă, în comparaţie cu cazul funcţiilor de reactanţă, deoarece Z_{RC} nu poate avea un pol la infinit, iar Y_{RC} nu poate avea un pol în origine. De asemenea (vezi problema P31.) cea mai mică valoare a părţii reale se obţine la valori ale lui s diferite în cazul Z_{RC}, faţă de cazul Y_{RC}.

Referindu-ne la $Z(s)$ dat mai înainte, dacă se face dezvoltarea în fracție continuă. relativă la comportarea în frecvența de la infinit, se obține, în etape, expresia

$$Z(s) = \frac{2s^2+12s+16}{s^2+4s+3} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{s^2+4s+3}{4s+10}} =$$

$$= 2 + \cfrac{1}{\cfrac{s}{4} + \cfrac{1}{\cfrac{8s+20}{3s+1}}} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{s}{4} + \cfrac{1}{{}^{8}/_{3} + \cfrac{1}{\cfrac{3s+1}{{}^{52}/_{3}}}}} =$$

$$= 2 + \cfrac{1}{\cfrac{s}{4} + \cfrac{1}{{}^{8}/_{3} + \cfrac{1}{\cfrac{6s}{52} + \cfrac{1}{{}^{53}/_{3}}}}}$$

Circuitul în scară corespunzătoar este arătat în fig. 7. 22 *a*.

O altă realizare se obține pornind de la admitanță și considerînd comportarea la frecvența zero. Astfel se găsește

$$Y(s) = \frac{3+4s+s^2}{16+12s+2s^2} = \frac{3}{16} + \cfrac{1}{\cfrac{16+12s+2s^2}{\frac{7}{4}s + \frac{5}{8}s^2}} = \frac{3}{16} + \cfrac{1}{\cfrac{64}{7s} + \cfrac{1}{\cfrac{14+5s}{{}^{352}/_{7}+16s}}}$$

$$= \frac{3}{16} + \cfrac{1}{\cfrac{64}{7s} + \cfrac{1}{{}^{49}/_{176} + \cfrac{{}^{3s}/_{11}}{{}^{176}/_{7}+8s}}} = \frac{3}{16} + \cfrac{1}{\cfrac{64}{7s} + \cfrac{1}{{}^{49}/_{176} + \cfrac{1}{\cfrac{1936}{21s} + \cfrac{1}{{}^{3}/_{88}}}}}$$

Circuitul corespunzător este arătat în fig. 7.22*b*.

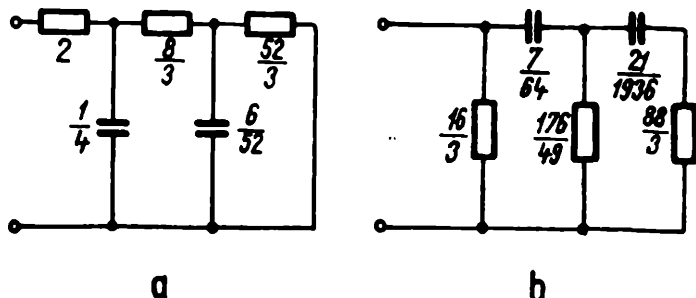


Fig. 7.22. Realizări ale circuitelor în scară.

Circuite cu rezistenţe şi bobine

Ceea ce s-a demonstrat pentru circuitele RC se poate aplica şi circuitelor RL. Punctul de plecare este iar o transformare care va schimba funcţia de reactanţă într-o impedanţă sau admitanţă RC. Se găseşte imediat că clasa funcţiilor de impedanţă RL este identică cu clasa funcţiilor de admitanţă RC şi viceversa. Rezultă că nu este necesar să dezvoltăm detaliile. În orice teoremă referitoare la circuitele RC este necesar numai să se înlocuiască cuvîntul „impedanţă" cu cuvîntul „admitanţă" (sau „admitanţă" cu „impedanţă") pentru a se ajunge la o teoremă valabilă pentru circuitele RL. Nu vom continua acest subiect aici dar vom sugera unele rezultate prin probleme.

7.7. PARAMETRII DIPORŢILOR

În ultimele trei secţiuni am studiat cîteva din cele mai importante proprietăţi ale funcţiilor de intrare ale circuitelor uniport, lineare, invariabile în timp, pasive şi reciproce. Acum vom continua cu examinarea circuitelor multiport, în particular a diporţilor. Problemele de bază au fost lămurite în (46) prin considerarea matricelor impedanţelor de gol şi a admitanţelor de scurtcircuit. Aceste expresii sînt reluate aici

$$F_0 + sT_0 + \frac{1}{s} V_0 = \mathbf{I}^* \mathbf{Z}_{oc} \mathbf{I} \tag{104 a}$$

$$F_0 + \bar{s}T_0 + \frac{1}{\bar{s}} V_0 = \mathbf{V}^* \mathbf{Y}_{sc} \mathbf{V}. \tag{104 b}$$

Membrul stîng al fiecărei din aceste ecuaţii este o funcţie real-pozitivă. (Membrul stîng al celei de a doua ecuaţii este conjugatul celui din prima.) Membrul drept al fiecărei ecuaţii este o formă pătratică pe care o vedem egală cu o funcţie real-pozitivă. La fel cum am afirmat că matricea unei forme pătratice definită pozitiv este definită pozitiv, spunem că matricea unei forme pătratice real-pozitivă este real pozitivă. Concluzia este :

Teorema 23. *Matricele impedanţelor de gol şi a admitanţelor de scurtcircuit pentru un multiport liniar, invariabil în timp, pasiv şi reciproc, sînt matrice real-pozitive.*

Acelaşi rezultat poate fi obţinut pe o altă cale. Prezentarea se va face cu un circuit diport ca cel din fig. 7.23. Cele două perechi de borne ale

diportului sînt conectate în serie prin transformatoarele ideale, ale căror rapoarte de tranformare sînt respectiv x_1 :1 şi x_2 :1. Tensiunea şi curentul de la bornele de intrare vor fi date de

$$V = x_1 V_1 + x_2 V_2, \tag{105 a}$$

$$I = \frac{I_1}{x_1} = \frac{I_2}{x_2}. \tag{105 b}$$

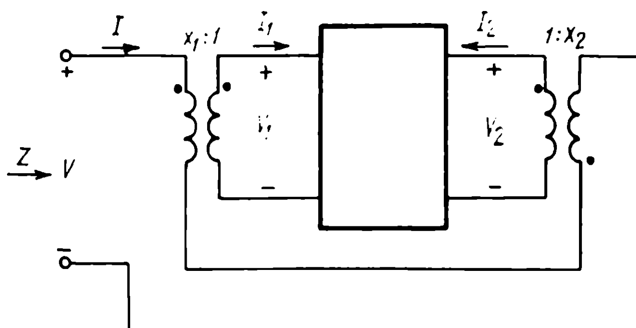


Fig. 7.23. Demonstraţia lui Brune că matricele z şi y sînt matrice real-pozitive.

Dacă calculăm impedanţa de intrare $Z(s) = V/I$ găsim:

$$Z(s) = x_1^2 z_{11} + 2x_1 x_2 z_{21} + x_2^2 z_{22} \tag{106}$$

$$= [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Deoarece impedanţa este real-pozitivă, rezultă că şi forma pătratică din dreapta este real-pozitivă. Pentru a demonstra condiţia pentru matricea y, cele două perechi de borne pot fi conectate în paralel prin transformatoare ideale şi apoi se poate găsi admitaţa de intrare. Această demonstraţie este recomandată ca un exerciţiu pentru cititor.

Să ne restrîngem acum la cazul diporţilor; extinderea rezultatelor următoare la multiporţi de ordin mai mare este simplă şi va fi evidentă. Faptul că matricele $\mathbf{Z}_{oc}$ şi $\mathbf{Y}_{sc}$ sînt real-pozitive, are cîteva consecinţe interesante. Fie x_1 şi x_2, două numere reale, arbitrare. Deoarece formele pătratice

$$Q_1 = [x_1 \ \ x_2] \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{107 a}$$

$$Q_2 = [x_1 \ \ x_2] \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{107 b}$$

sînt funcţii real-pozitive, rezultă că orice pol al acestor funcţii, situat pe axa $j\omega$ trebuie să fie simplu, iar reziduul într-un astfel de pol trebuie să fie real şi pozitiv. Să presupunem, pentru un moment, că parametrii z au un pol în $s = j\omega_i$. Deoarece acesta este un pol simplu al formei pătratice, reziduul lui Q_1, relativ la acest pol este :

$$\text{reziduul lui } Q_1 = \lim_{s \to j\omega_i} (s - j\omega_i) [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{s \to j\omega i} [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} (s-j\omega_i)z_{11} & (s-jw_i)z_{12} \\ (s-j\omega_i)z_{21} & (s-j\omega_i)z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{108}$$

Alocînd reziduurilor lui $z_{11}, z_{21} (=z_{12})$ şi z_{22} în polul $s = j\omega_i$, notaţiile : $k_{11}^{(i)}$, $k_{21}^{(i)}$, şi $k_{22}^{(i)}$ respectiv, reziduul formei pătratice va fi

$$\text{reziduul lui } Q_1 = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} k_{11}^{(i)} & k_{21}^{(i)} \\ k_{21(i)} & k_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{109}$$

Astfel, însuşi reziduul este o formă pătratică a cărei matrice este matricea reziduurilor parametrilor z. În acelaşi timp acest reziduu trebuie să fie real şi nenegativ la orice valoare a lui x_1 şi x_2. Rezultă că matricea reziduurilor parametrilor z, relativă la oricare din polii de pe axa $j\omega$, trebuie să fie definită sau semidefinită pozitiv. Aşa cum s-a discutat în paragraful 7.2, aceasta presupune ca determinantul matricei şi toţi cofactorii săi principali să fie nenegativi adică :

$$k_{11}^{(i)} \geqslant 0, \qquad k_{22}^{(i)} \geqslant 0, \tag{110 a}$$

$$k_{11}^{(i)} k_{22}^{(i)} - (k_{21}^{(i)})^2 \geqslant 0. \tag{110 b}$$

Concluziile din primele inegalităţi (110 *a*) sînt cunoscute deoarece z_{11} şi z_{22} sînt impedanţe de intrare şi sînt deci real-pozitive. Cele din (110*b*) reprezintă un rezultat nou şi important. Această relaţie este denumită *condiţia de reziduuri.*

Ceea ce s-a spus despre forma pătratică Q_1 este valabil şi pentru Q_2/s. Astfel se obţine aceeaşi concluzie şi pentru $\mathbf{Y}_{sc}/s$. Vom prezenta acest rezultat ca pe o teoremă.

Teorema 24. *In orice pol de pe axa imaginară, aparţinînd elementelor din* $\mathbf{Z}_{oc}$ *sau* $\mathbf{Y}_{sc}/s$, *pentru un diport liniar, invariabil în timp, pasiv şi reciproc, reziduurile parametrilor satisfac condiţia*

$$k_{11} k_{22} - k_{21}^2 \geqslant 0, \tag{111}$$

în care k_{ij} este reziduul lui z_{ij} sau y_{ij}/s într-un pol al axei imaginare. (Pentru simplificare a fost omis indexul relativ la pol).

În particular, dacă circuitul este fără pierderi, toţi polii lui z_{ij} şi y_{ij} sînt pe axa $j\omega$ şi condiţia de reziduuri se aplică în toţi polii. Rezultă de aici că, pentru un circuit nedisipativ, z_{21} nu poate avea un pol care să nu fie în acelaşi timp pol şi pentru z_{11} şi z_{22}; nici y_{21} nu poate avea un pol care să nu fie pol şi pentru y_{11} şi y_{22}. Aceasta, deoarece un k_{21} diferit de zero atunci cînd k_{11} sau k_{22} este zero, nu satisface condiţia de reziduuri[1]. Pe de altă parte, este posibil ca z_{11} sau z_{22} (sau ambele) să aibă un pol care să nu aparţină celorlalţi parametri. Un astfel de pol se numeşte ***pol particular*** al lui z_{11} sau z_{22}[2]. O concluzie similară se poate stabili şi pentru parametrii y.

Să examinăm o altă consecinţă a naturii real-pozitive a $\mathbf{Z}_{oc}$ şi $\mathbf{Y}_{sc}$. Prin definiţie, caracterul real-pozitiv este legat de partea reală a unei funcţii. Prin urmare, ne aşteptăm să obţinem nişte legături între părţile reale ale parametrilor z şi y. Să notăm aceste părţi reale cu : r_{11}, r_{21} $(=r_{12})$ şi r_{22} pentru parametrii z şi g_{11}, g_{21} (g_{12}) şi g_{22} pentru parametrii y. În acest caz, partea reală a formelor pătratice Q_1 şi Q_2 din (107) se poate scrie astfel :

$$\mathrm{Re}(Q_1) = [x_1\ x_2]\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{112 a}$$

$$\mathrm{Re}(Q_2) = [x_1\ x_2]\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{112 b}$$

Pentru orice s situat în semiplanul drept, sau pe axa $j\omega$ aceste forme pătratice trebuie să fie difinite sau semidefinite pozitiv, deoarece Q_1 şi Q_2 sînt funcţii real-pozitive. La fel ca şi în cazul matricei reziduurilor, rezultă că

$$r_{11} \geqslant 0 \qquad r_{22} \geqslant 0,$$

$$r_{11}r_{22} - r_{21}^2 \geqslant 0, \qquad \mathrm{Re}\, s \geqslant 0 \tag{113}$$

pentru părţile reale ale parametrilor z şi

$$g_{11} \geqslant 0, \qquad g_{22} \geqslant 0,$$

$$g_{11}g_{22} - g_{21}^2 \geqslant 0, \qquad \mathrm{Re}\, s \geqslant 0 \tag{114}$$

---

[1] Constatarea este valabilă nu numai pentru polii circuitelor nedisipative, ci în orice pol situat pe axa $j\omega$ (N.T.).

[2] Polii de pe axa $j\omega$ ai căror reziduuri satisfac condiţia de reziduuri (111) cu semnul egalităţii sînt numiţi *poli compacţi* (N.T.).

pentru părțile reale ale parametrilor y. Primele rînduri de inegalități nu sînt nici aici surprinzătoare, deoarece z_{11}, z_{22}, y_{11} și y_{22} sînt funcții de intrare și deci sînt real-pozitive. Cel de al doilea rînd de inegalități exprimă însă un rezultat nou numit *condiția pentru părțile reale*. De fapt, condiția pentru părțile reale este o condiție suficientă pentru ca $\mathbf{Z}_{oc}$ sau $\mathbf{Y}_{sc}$ să fie matrice real-pozitive. (Verificați această afirmație.)

Diporți cu rezistențe și capacități

Ca o observație finală, constatăm că ceea ce s-a spus despre diporții fără pierderi este adevărat și pentru diporții *RC*, în virtutea transformărilor discutate anterior și cu modificările potrivite, care sînt evidente. Astfel, pentru diporții *RC*, parametrii z și y vor avea polii lor pe axa reală negativă, iar condiția de reziduuri se va aplica în acești poli. Nici un pol nu poate să aparțină lui z_{21} fără să fie și al z_{11} și z_{22}, dar z_{11} și z_{22} pot să aibă poli particulari; condiții similare se aplică și la parametrii y.

Ca o exemplificare să considerăm diportul *RC* din fig. 7.24. Parametrii de admitanță ai acestui diport sînt următorii:

$$y_{11}(s) = {}^1/_{25}\,\frac{(28s^2+124s+75)}{(s+{}^3/_2)\,(s+4)} = {}^1/_2 + \frac{{}^{192s}/_{375}}{s+{}^3/_2} + \frac{{}^{27s}/_{250}}{s+4},$$

$$-y_{21}(s) = {}^6/_5\,\frac{(s+{}^5/_2)}{(s+{}^3/_2)\,(s+4)} = {}^1/_2 - \frac{{}^{8s}/_{25}}{s+{}^3/_2} - \frac{{}^{9s}/_{50}}{s+4},$$

$$y_{22}(s) = \frac{(s+1)\,(s+3)}{(s+{}^3/_2)\,(s+4)} = {}^1/_2 + \frac{{}^{s}/_{5}}{s+{}^3/_2} + \frac{{}^{3s}/_{10}}{s+4}.$$

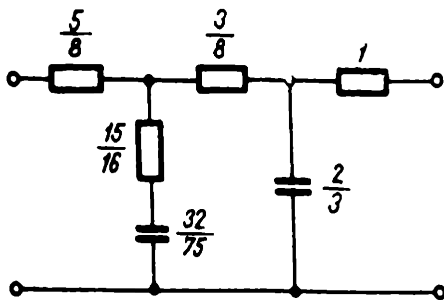


Fig. 7.24. Diport cu rezistențe și capacități.

Constatăm că, în primul rînd, toate cele trei funcții au aceeași poli. Zerourile lui y_{11} sînt la (aproximativ) $-\frac{5}{7}$ și $-\frac{26}{7}$. Astfel zerourile și polii lui y_{11} ca și ai lui y_{22}, alternează pe axa reală negativă și au comportarea necesară la infinit, (care este aceasta?) deci ambele sînt admitanțe *RC*. Pe de altă parte, nu este necesar ca y_{21} să aibă toate proprietățile unei admitanțe *RC*; printre altele, reziduurile lui y_{21}/s nu sînt toate pozitive.

Un test al condiţiei de reziduuri arată că aceasta este satisfăcută în toţi polii, de fapt, condiţia de reziduuri este satisfăcută cu semnul egalităţii. Pentru a distinge situaţiile în care condiţia de reziduuri este satisfăcută cu semnul egalităţii de celelalte, vom spune că polul este *compact*, dacă reziduurile acestui pol satisfac condiţia de reziduuri cu semnul egalităţii. Astfel, în cazul nostru, toţi polii (inclusiv termenul constant) sînt compacţi. Verificarea condiţiei pentru partea reală este lăsată în seama cititorului.

Pentru funcţiile de intrare ale circuitelor cu două tipuri de elemente, am găsit seturi de condiţii necesare şi am demonstrat că aceste condiţii sînt şi suficiente. De fapt, am arătat care sînt metodele de a obţine unul sau mai multe circuite, pornind de la o funcţie dată. Cazul diporţilor nu este la fel de simplu, deoarece aici avem un set de trei parametri. Am obţinut condiţiile necesare pentru aceşti parametri ; aceste condiţii se dovedesc a fi, în cazul general şi suficiente pentru realizabilitatea fizică, numai dacă admitem prezenţa transformatoarelor ideale în circuit. Dacă nu se admit transformatoare ideale, nu dispunem de un set de condiţii suficiente pentru cazul general. În acestă lucrare nu vom aprofunda acest subiect.

7.8. DIPORŢI NEDISIPATIVI TERMINAŢI CU O REZISTENŢĂ

Pînă acum am studiat următoarele probleme. În cazul unui circuit linear, invariabil în timp, pasiv şi reciproc, cu două feluri de elemente, am stabilit condiţii necesare şi suficiente pentru funcţiile de intrare. Pornind de la funcţii date, care satisfac aceste condiţii, s-au prezentat metode de determinare a circuitului din funcţia dată, care reprezenta impedanţa sau admitanţa. Mai general, am văzut că caracterul real-pozitiv este o condiţie, în general, necesară, pentru impedanţa sau admitanţa unui circuit din clasa considerată. Totuşi nu am arătat că aceasta este o condiţie suficientă, în cazul general : aceasta a fost arătat prima dată de Brune în 1932, dar aici vom discuta o altă realizare prezentată de Darlington în 1939. El a arătat că orice funcţie real-pozitivă, poate să fie realizată ca impedanţă a unui circuit nedisipativ, terminat cu o singură rezistenţă.

Să considerăm circuitul din fig. 7.25. Acesta constă dintr-un circuit nedisipativ terminat cu o rezistenţă R. Impedanţa de la bornele de intrare poate fi scrisă în funcţie de R şi de parametrii diportului astfel :

$$Z(s) = \frac{Rz_{11} + z_{11}z_{22} - z_{12}\,z_{21}}{\mathrm{R} + z_{22}} = z_{11}\frac{\mathrm{R} + 1/y_{22}}{R + z_{22}} \tag{115 a}$$

sau

$$Z(s) = z_{11}\frac{1+1/y_{22}}{1 + z_{22}}. \tag{115 b}$$

(Vezi cap. 3). În formula finală, toate impedanţele au fost normate în raport cu R, ceea ce este echivalent cu a lua valoarea R egală cu 1.

Acum să presupunem că se dă o funcţie raţională $Z(s)$, real-pozitivă. Părţile pară şi impară de la numărător şi numitor pot fi separate şi func-

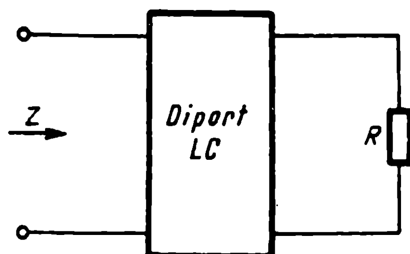


Fig. 7.25. Diport nedisipativ, terminat rezistiv.

ţia poate fi scrisă în forma obişnuită. Apoi, această expresie poate fi pusă în aceeaşi formă ca şi în (115 b) în două moduri posibile, după cum urmează

$$Z(s) = \frac{m_1(s) + n_1(s)}{m_2(s) + n_2(s)}, \tag{116}$$

$$Z(s) = \frac{m_1}{n_2} \frac{1 + n_1/m_1}{1 + m_2/n_2} \qquad \text{(cazul A)} \tag{117}$$

$$Z(s) = \frac{n_1}{m_2} \frac{1 + m_1/n_1}{1 + n_2/m_2} \qquad \text{(cazul B)} \tag{118}$$

Pentru fiecare din aceste două cazuri se pot face, formal, nişte identificări, dacă se compară aceste expresii cu (115 b). Astfel

$$\begin{array}{ll} \textit{Cazul A} & \textit{Cazul B} \\ z_{11} = \dfrac{m_1}{n_2} & z_{11} = \dfrac{n_1}{m_2} \\ z_{22} = \dfrac{m_2}{n_2} & z_{22} = \dfrac{n_2}{m_2} \\ y_{22} = \dfrac{m_1}{n_1} & y_{22} = \dfrac{n_1}{m_1} \end{array} \tag{119}$$

Deoarece $Z(s)$ este real-pozitiv, atît $m_1 + n_1$ cît şi $m_2 + n_2$ sînt polinoame Hurwitz. Prin urmare, rapoartele m_1/n_1 şi m_2/n_2 şi inversele lor sînt

funcţii de reactanţă. Utilizînd teorema 11 (referitoare la schimbarea reciprocă a părţilor pară şi impară, de la numărătorul şi numitorul unei funcţii rp) şi rapoartele m_1/n_2 şi n_1/m_2 sînt de asemenea funcţii de reactanţă. Astfel, toate funcţiile din (119) sînt funcţii de reactanţă,

Mai rămîne ca din expresia (119) să determinăm pe z_{21} astfel încît să avem un set complet de parametri pentru diportul fără pierderi din fig. 7.25. Pentru aceasta observăm că

$$z_{11}z_{22} - z_{21}^2 = \frac{z_{11}}{y_{22}} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{(cazul A)}$$
$$= \frac{m_1}{m_2} \quad \text{(cazul B)} \tag{120}$$

Deoarece

$$z_{21} = \sqrt{z_{11}z_{22} - (z_{11}z_{22} - z_{21}^2)}$$

utilizînd (120) şi (119) vom găsi pe z_{21} :

$$z_{21} = \frac{\sqrt{m_1m_2 - n_1n_2}}{n_2} \quad \text{(cazul A)}$$
$$z_{21} = \frac{\sqrt{-(m_1m_2 - n_1n_2)}}{m_2} \quad \text{(cazul B)} \tag{121}$$

Bineînţeles că odată ce parametrii z sînt cunoscuţi se pot găsi şi parametrii y. (Vezi tabelul 1 în cap. 3). Rezultatele complete sînt tabelate în tabelul 7.1.

Se pune întrebarea, dacă aceşti parametri de gol sau de scurtcircuit satisfac condiţiile de realizabilitate, pentru un diport pasiv, reciproc şi nedisipativ. Prima dificultate aparentă este că, datorită radicalului, z_{21} poate să nu fie o funcţie raţională. Această dificultate dispare dacă $m_1m_2 - n_1n_2$ este un pătrat perfect. Observăm că $m_1m_2 - n_1n_2$ este numărătorul părţii pare a lui $Z(s)$. Deoarece $Z(s)$ este o funcţie real-pozitivă zerourile părţii sale pare pe axa $j\omega$, trebuie să fie în mod necesar, cu multiplicitate pară. Această cerinţă nu apare însă pentru celelalte zerouri. Se pare că, dacă nu se găseşte un remediu, în general z_{21} va fi iraţional.

Remediul dorit se poate găsi în modul următor. Să presupunem că $Z(s)$ dat, este *mărit* prin înmulţirea numărătorului şi numitorului său cu un polinom strict Hurwitz m_0+n_0, ceea ce bineînţeles nu modifică funcţia. Astfel :

$$Z(s) = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2} \cdot \frac{m_0 + n_0}{m_0 + n_0} = \frac{\hat{m}_1 + \hat{n}_1}{\hat{m}_2 + \hat{n}_2}. \tag{122}$$

Partea pară a lui $Z(s)$ va fi acum

$$Ev[Z(s)] = \frac{\hat{m}_1\hat{m}_2 - \hat{n}_1\hat{n}_2}{\hat{m}_2^2 - \hat{n}_2^2} = \frac{m_1m_2 - n_1n_2}{m_2^2 - n_2^2} \cdot \frac{m_0^2 - n_0^2}{m_0^2 - n_0^2} . \tag{123}$$

În această situaţie, pentru cazul A, z_{21} va fi

$$z_{21} = \frac{\sqrt{\hat{m}_1\hat{m}_2 - \hat{n}_1\hat{n}_2}}{\hat{n}_2} = \frac{\sqrt{(m_1m_2 - n_1n_2)(m_0^2 - n_0^2)}}{m_0n_2 + n_0m_2} . \tag{124}$$

Acum este clar cum se poate procedea pentru ca z_{21} să fie o fracţie raţională : vom pune pe $m_0^2 - n_0^2$ egal cu produsul factorilor $m_1m_2 - n_1n_2$, care sînt de multiplicitate impară şi care făceau pe z_{21} iraţional. Deoarece $m_0^2 - n_0^2 = (m_0 + n_0)(m_0 - n_0)$, se poate găsi polinomul de multiplicare $m_0 + n_0$, alocîndu-i zerourile lui $m_0^2 - n_0^2$ situate în semiplanul stîng.

Tabelul 7.1

Legătura dintre parametrii z, respectiv y şi funcţiile m_1, m_2, n_1, n_2, în cazul sintezei diporţilor reactivi închişi pe o rezistenţă

Condiţia	Parametrii z			Parametrii y		
	z_{11}	z_{22}	z_{21}	y_{11}	y_{22}	y_{21}
Cazul A : $Z(s)$ nu are *nici un* pol sau zero la $s=0$	$\frac{m_1}{n_2}$	$\frac{m_2}{n_2}$	$\frac{\sqrt{m_1m_2 - n_1n_2}}{n_2}$	$\frac{m_2}{n_1}$	$\frac{m_1}{n_1}$	$\frac{\sqrt{m_1m_2 - n_1n_2}}{n_1}$
Cazul B : $Z(s)$ are pol sau zero la $s = 0$	$\frac{n_1}{m_2}$	$\frac{n_2}{m_2}$	$\frac{\sqrt{-(m_1m_2 - n_1n_2)}}{m_2}$	$\frac{n_2}{m_1}$	$\frac{n_1}{m_1}$	$\frac{\sqrt{-(m_1m_2 - n_1n_2)}}{m_1}$

Se pune problema semnificaţiei cazurilor A şi B. Cînd este potrivit unul şi cînd este celălalt? Din tabelul 7.1 observăm că numitorul lui z_{21} (sau y_{21}) este impar în cazul A şi par în cazul B. Deoarece z_{21} ar trebui să fie o funcţie raţională impară, numărătorul lui z_{21} ar trebui să fie par în cazul A şi impar în cazul B. Dacă $m_1m_2 - n_1n_2$ are pe s^2 ca factor, extragerea radicalului va face numărătorul lui z_{21} impar şi este potrivită situaţia din cazul B. Pe de altă parte, dacă $m_1m_2 - n_1n_2$ nu are factorul s^2, este potrivit cazul A. Factorul s^2 poate să apară în $m_1m_2 - n_1n_2$, numai dacă în m_1 sau în m_2 lipseşte termenul constant. Rezultă că, *dacă* Z(s) *are un pol sau un zero, în* s $= 0$, *trebuie aplicat cazul B*; *cazul A se aplică dacă* Z(s) *nu are nici pol, nici zero în* $s = 0$.

Pentru exemplificare să considerăm:

$$Z(s) = \frac{s^3+4s^2+4s}{s^3+5s^2+8s+4}.$$

Această funcție are un zero în $s = 0$; deci este aplicabil cazul B.
Vom forma:

$$m_1m_2-n_1n_2 = 4s^2(5s^2+4)-(s^3+4s)\,(s^3+8s) = -s^2(s^2-4)^2.$$

Acesta este un pătrat perfect şi nu mai este necesară multiplicarea. Deci din tabelul 7.1

$$z_{21} = \frac{\sqrt{-(m_1m_2-n_1n_2)}}{m_2} = \frac{s(s^2-4)}{5s^2+4} = \frac{s}{5} - \frac{0{,}96s}{s^2+{}^4/_5}.$$

De asemenea

$$z_{11} = \frac{n_1}{m_2} = \frac{s(s^2+4)}{5s^2+4} = \frac{s}{5} + \frac{0{,}64s}{s^2+{}^4/_5}.$$

$$z_{22} = \frac{n_2}{m_2} = \frac{s(s^2+8)}{5s^2+4} = \frac{s}{5} + \frac{1{,}44s}{s^2+{}^4/_5}.$$

Oricum ar fi funcția $Z(s)$ dată, este posibil ca z_{21} să fie făcut funcție rațională impară, multiplicînd, atunci cînd este necesar, funcția inițială. Să considerăm acum celelalte condiții de realizabilitate. Condiția pentru partea reală din (113) şi (114) este satisfăcută cu semnul egalității pentru $s = j\omega$. Deoarece funcțiile sînt regulate în semiplanul drept, se poate utiliza teorema maximum-ului modulului pentru a arăta că, condiția pentru partea reală este satisfăcută oriunde în semiplanul drept.

Rămîne condiția de reziduuri. Reziduul unei funcții poate fi determinat, dacă se împarte numărătorul la derivata numitorului evaluată într-un zero al numitorului. Pentru parametrii z, reziduurile într-un pol finit, nenul sînt date în tabelul 7.2 în care accentele indică derivarea în

Tabelul 7.2

Legătura dintre reziduurile parametrilor z şi funcțiile m_1, m_2, n_1, n_2.

Condiția	k_{11}	k_{22}	k_{21}
Cazul A	$\left.\dfrac{m_1}{n_2'}\right\vert_{n_2=0}$	$\left.\dfrac{m_2}{n_2'}\right\vert_{n_2=0}$	$\left.\dfrac{\sqrt{m_1m_2-n_1n_2}}{n_2'}\right\vert_{n_2=0}$
Cazul B	$\left.\dfrac{n_1}{m_2'}\right\vert_{m_2=0}$	$\left.\dfrac{n_2}{m_2'}\right\vert_{m_2=0}$	$\left.\dfrac{\sqrt{-(m_1m_2-n_1n_2)}}{m_2'}\right\vert_{m_2=0}$

raport cu s. Astfel, formînd $k_{11}k_{22}-k^2_{21}$, se găsește că în toți polii finiți și nenuli, condiția de reziduuri este satisfăcută, mai mult, este satisfăcută cu semnul egalității. Rezultă că *toți polii finiți și nenuli ai parametrilor z sînt compacți.*

Este adevărat că condiția de reziduuri este satisfăcută și în polul de la infinit sau din origine, atunci cînd acesta există, dar nu întotdeauna cu semnul egalității. (Vezi problema **P.53**). O dezvoltare similară se poate face și pentru parametrii y divizați cu s, conducînd la rezultate similare. Concluzia este că, atît parametrii z, cît și parametrii y divizați cu s, satisfac condiția de reziduuri în toți polii lor.

Am stabilit că, dîndu-se o funcție real-pozitivă, este posibil să se găsească un set de parametri de gol sau de scurtcircuit, care să satisfacă condițiile de realizabilitate ale diporților nedisipativi terminați pe o rezistență. Rămîne sarcina de a realiza (a construi) efectiv diportul. Una din metode a fost elaborată de Cauer. Se începe prin dezvoltarea în fracții parțiale a parametrilor, fie aceștia z. Termenii existenți în fiecare parametru z, care corespund unui pol particular sînt concentrați împreună; aceștia sînt destul de simpli astfel că diportul fără pierderi, care realizează acest set de parametri poate fi identificat direct. Diporții componenți, obținuți în acest mod, sînt apoi conectați în serie. Uneori, așa cum s-a discutat în cap. 3, poate să fie necesară utilizarea unor transformatoare ideale pentru conectarea în serie. Interconectarea în serie a diporților nu este de obicei de dorit; o obiecție este că, nu vor exista borne de pămînt pentru toți diporții interconectați.

O schemă mai practică este cea în cascadă. Darlington a arătat că se poate obține o astfel de realizare. Nu vom face decît să schițăm metoda sa. Să observăm mai întîi, că dacă impedanța dată are poli și zerouri pe axa $j\omega$, aceștia pot fi extrași ca laturi ale circuitului în scară. Astfel de

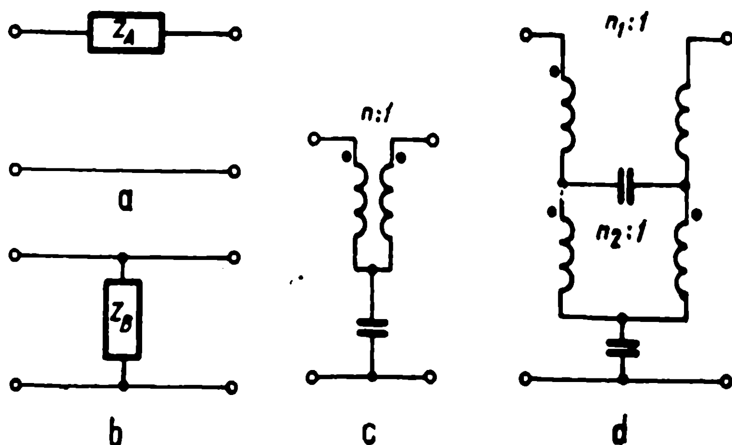


Fig. 7.26. Secțiuni canonice pentru realizarea în cascadă: (*a*) Tip A; (*b*) Tip B; (*c*) tip C; (*d*) tip D.

laturi sînt arătate în fig. 7.26 prin laturi de tip A şi de tip B. Aceste laturi pot să fie o simplă bobină sau capacitate, un circuit rezonant serie, sau un circuit rezonant derivaţie.

După ce toţi polii şi zerourile lui $Z(s)$, situaţi pe axa $j\omega$, au fost extraşi prin laturi de tip A şi B, [1] partea pară a impedanţei care rămîne va avea trei tipuri de zerouri : reale, imaginare şi complexe. O parte pară tipică va fi :

$$\mathrm{Par}[Z(s)] = \frac{(s^2+\omega_0{}^2)^2(s^2-a^2)^2(s^4+b_1s^2+b_0)^2}{m_2{}^2-n_2{}^2}. \quad (125)$$

Toate zerourile care apar aici sînt zerouri duble. Pentru o funcţie real-pozitivă, zerourile situate pe axa $j\omega$ trebuie să fie neapărat duble. Dacă celelalte zerorui nu sînt duble, funcţia este mărită astfel ca ele să rezulte duble. *Zerourile transmisiunii, pentru un diport fără pierderi, sînt chiar zerourile părţii pare a lui* $Z(s)$.

Se constată că o secţiune de tip C, arătată în fig. 7.26, are o pereche de zerouri ale transmisiunii, care sînt reale sau imaginare (după cum sînt aranjate înfăşurările transformatoarelor marcate cu punct), iar o secţiune de tip D are două perechi (un cuadriplet) de zerouri ale transmisiunii. Extragerea unei secţiuni de tip C face ca impedanţa rămasă să-şi menţină toate celelalte zerouri pentru partea pară, cu excepţia perechii realizate prin această secţiune. În mod similar, extragerea unei secţiuni de tip D. conduce la o impedanţă redusă, a cărei parte pară are aceleaşi zerouri ca şi mai înainte, mai puţin cuadripletul realizat de această secţiune. Deci. o conectare în cascadă a acestor patru tipuri de diporţi, conduce la realizarea diportului nedisipativ căutat. Observăm că realizarea se face utilizîndu-se transformatoare ideale.

Nu ne propunem aici să examinăm detaliile sintezei diporţilor, ci numai să observăm rezultatul. Astfel, este posibil să formulăm acum următoarea teoremă (a lui Darlington).

Teorema 25. *O funcţie real-pozitivă poate fi realizată ca impedanţă a unui diport nedisipativ, terminat cu o rezistenţă unitară.*

Aceasta constituie de fapt o teoremă de existenţă : se demonstrează astfel, suficienţa condiţiei cu privire la caracterul real-pozitiv, pentru realizabilitatea unui circuit pasiv şi reciproc.

Pentru funcţii particulare se pot găsi alte scheme de diporţi, mai utile decît cele de tipul C şi D, care conţin transformatoare ideale.

---

[1] Această extragere a polilor şi zerourilor de pe axa $j\omega$, dintr-o funcţie rp, $Z(s)$, este cunoscută în sinteza circuitelor prin denumirea de *preambulul lui Foster*. (N.T.)

Pentru a ilustra aceasta să considerăm

$$Z(s) = \frac{s^4+s^3+3s^2+2s+1}{5s^3+5s^2+2s+5},$$

$$\text{Par } [Z(s)] = \frac{(2s^2+1)^2}{(5s^2+1)^2-(5s^3+2s)^2}.$$

S-ar părea că am avea nevoie de o secţiune de tip C în diportul N pentru a realiza perechea de zerouri imaginare şi de ceva care să realizeze zeroul transmisiunii de la infinit. Să presupunem acum că formăm parametrii z, utilizînd tabelul 7.1. Rezultatul va fi următorul:

$$z_{11} = \frac{s^4+3s^2+1}{5s^3+2s} = \frac{\frac{13}{5}s^2+1}{5s^3+2s} + \frac{s}{5},$$

$$z_{22} = \frac{5s^2+1}{5s^3+2s},$$

$$z_{21} = \frac{2s^2+1}{5s^3+2s}.$$

Observăm că z_{11} are un pol particular la infinit; acesta poate fi extras sub forma unei bobine de 1/5 unităţi, rămînînd un set de parametri z, care au aceiaşi poli. Rezultatul parţial este arătat în fig. 7.27 *a*. Parametrii z, care rămîn după ce bobina în serie este extrasă, aparţin diportului $\hat{N}$.

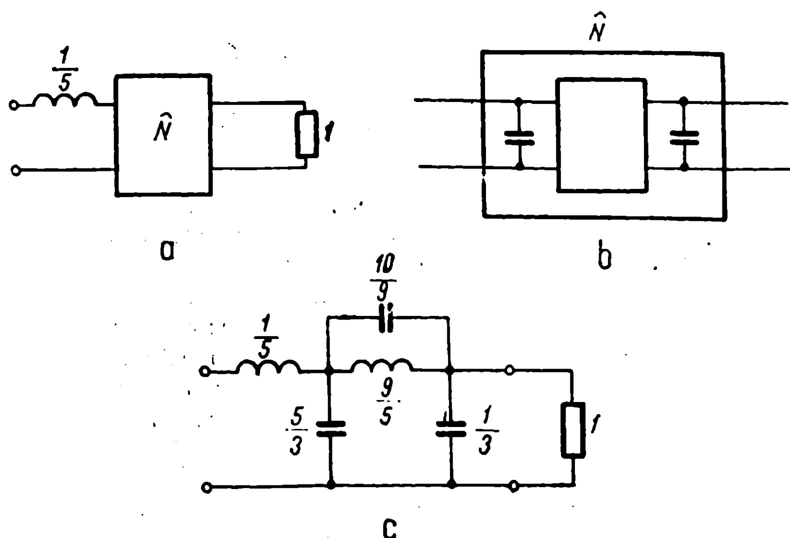


Fig. 7.27. Realizarea unei impedanţe printr-un circuit nedisipativ în scară, terminat rezistiv.

Să inversăm acești parametri determinînd parametrii y ai lui $\hat{N}$. Rezultatul va fi următorul:

$$y_{11} = \frac{z_{22}}{z_{11}z_{22}-z_{21}^2} = \frac{5(5s^2+1)}{9s} = \frac{25s}{9} + \frac{5}{9s},$$

$$y_{22} = \frac{z_{11}}{z_{11}z_{22}-z_{21}^2} = \frac{(13s^2+5)}{9s} = \frac{13s}{9} + \frac{5}{9s},$$

$$-y_{21} = \frac{z_{21}}{z_{11}z_{22}-z_{21}^2} = \frac{5(2s^2+1)}{9s} = \frac{10s}{9} + \frac{5}{9s}.$$

Aceasta poate fi rescris astfel

$$y_{11} = Y + \frac{5s}{3},$$

$$y_{22} = Y + \frac{s}{3},$$

$$-y_{21} = Y.$$

unde

$$Y = \frac{10}{9}s + \frac{5}{9s}.$$

Observăm că pe lingă termenul comun Y, y_{11} și y_{22} au cîte un extratermen. Fiecare din acești termeni poate să fie realizat, printr-o capacitate: una în paralel cu intrarea și alta în paralel cu ieșirea din $\hat{N}$, așa cum se arată în fig. 7. 27 *b*. Mai rămîne de realizat Y, care este simplu; o secțiune de tip A, ca în fig. 7. 26 *a*, cu $Z_A = 1/Y$, are exact parametrii $y_{11} = y_{22} = -y_{21} = Y$. Circuitul complet este cel arătat în fig. 7.27 *c*. Se obține un circuit în scară nedisipativ, terminat cu o rezistență unitară. Nu apare nici un transformator ideal așa cum se întîmplă în cazul utilizării secțiunilor de tip C.

Mai înainte am găsit că impedanța unui circuit pasiv și reciproc este o funcție real-pozitivă. Acum am demonstrat reciproca și anume că, o funcție real-pozitivă poate fi realizată totdeauna printr-un circuit pasiv și reciproc. În particular, circuitul poate fi un diport nedisipativ, terminat cu o rezistență. În cazul general, diportul nedisipativ poate să necesite utilizarea secțiunilor de tip C și D. În unele cazuri aceste secțiuni complicate pot fi evitate. Desigur există condițiile suficiente pentru ca o realizare fără secțiuni C și D să poată fi găsită, dar acest lucru nu va fi studiat aici. [1])

[1]) O tratare mai completă a condițiilor necesare și suficiente pentru realizarea funcțiilor rp, diverse metode de realizare precum și considerarea numărului de elemente necesare în fiecare realizare poate fi găsită în lucrarea Weinberg, L., *Network Analysis and Synthesis*, McGraw-Hill Book Co., N.Y, 1962. (N.T.)

7.9. DIPORŢI *RC* PASIVI ŞI ACTIVI

Să examinăm acum metoda pe care am utilizat-o în ultimul paragraf şi să observăm dacă aceasta are nişte trăsături generale, care să poată servi ca ghid, în realizarea altor tipuri de circuite. Prima etapă a fost considerarea unei scheme reprezentative pentru clasa de circuite respectivă. În fig. 7.25 aceasta a fost un diport nedisipativ terminat cu o rezistenţă. Apoi s-a scris o expresie a funcţiei circuitului, depinzînd de componentele schemei, ca în (115). După aceea s-a operat asupra funcţiei raţionale corespunzătoare clasei circuitelor respective, pentru a o aduce la aceeaşi formă, cum s-a făcut în (117) şi (118). În final, au fost identificate funcţiile corespunzătoare componentelor circuitului. Desigur trebuie să se verifice că aceste funcţii satisfac condiţiile de realizabilitate, corespunzătoare clasei considerate. În continuare trebuie stabilite metodele de realizare a acestor funcţii.

În acest paragraf vom prezenta metode similare pentru circuite alcătuite din rezistenţe, capacităţi şi eventual dispozitive active. În baza unor anumite consideraţii, aceste circuite sînt practic importante. Dintre aceste consideraţii cităm : gabaritul şi greutatea relativ mare a bobinelor, preţul de cost redus al tranzistoarelor şi al altor dispozitive active, precum şi faptul că rezistenţele, capacităţile şi dispozitivele active pot fi obţinute prin circuite integrate.

Conectare în cascadă

Să considerăm mai întîi circuitul arătat în fig. 7.28, în care doi diporţi *RC* sînt conectaţi în cascadă. Funcţia care ne interesează este impedanţa de transfer în gol $z_{21} = V_2/I_1$. Această funcţie poate fi exprimată prin parametri de gol ai diporţilor componenţi în modul următor :[1])

$$z_{21}(s) = \frac{z_{21a} z_{21b}}{z_{22a} + z_{11b}}. \tag{126}$$

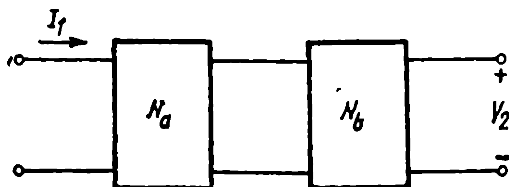


Fig. 7.28. Conectare în cascadă a doi diporţi *RC*.

[1]) Vezi capitolul 3.

Dacă o funcţie raţională este dată ca fiind impedanţa de transfer a unui diport RC, aceasta trebuie pusă în forma (126). În primul rînd, ştim că la un circuit RC polii lui z_{21} trebuie să fie reali şi negativi (pot fi şi în $s = 0$), şi că nu avem restricţii pentru localizarea zerourilor. Nu trebuie totuşi să avem mai multe zerouri finite decît poli; două funcţii posibile sînt, de exemplu, următoarele

$$z_{21} = \frac{P(s)}{Q(s)} = K\frac{(s+5)}{(s+2)(s+4)(s+6)}, \tag{127 a}$$

$$z_{21} = \frac{P(s)}{Q(s)} = K\frac{(s^2+s+1)(s^2+2s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}. \tag{127 b}$$

Prima are un singur zero finit care este real. Cea de a doua are două perechi de zerouri complexe. Fiecare din acestea este realizabil ca o impedanţă de transfer RC, pentru orice valoare a constantei K.

Să observăm din (126) că numitorul este o sumă a două impedanţe RC — care este tot o impedanţă RC; dar numitorul oricărei funcţii raţionale va fi un polinom. Situaţia se remediază împărţind numărătorul şi numitorul funcţiei date cu un polinom auxiliar $D(s)$. Gradul acestui polinom şi zerourile sale trebuie alese astfel încît Q/D să fie o impedanţă RC. Aceasta se poate face în mod simplu : gradul lui $D(s)$ trebuie să fie egal cu, sau mai mare cu o unitate decît gradul lui $Q(s)$; zerourile lui $D(s)$ trebuie să alterneze cu cele ale lui $Q(s)$. Astfel, dacă se alege de exemplu funcţia (127) avem :

$$z_{21} = \frac{K(s+5)/D(s)}{(s+2)(s+4)(s+6)/D(s)}. \tag{128}$$

Se pot alege

$$D(s) = (s+\sigma_1)\ (s+\sigma_2)\ (s+\sigma_3) \text{ sau } (s+\sigma_1)\ (s+\sigma_2)\ (s+\sigma_3)\ (s+\sigma_4)$$

cu

$$0 \leqslant \sigma_1 < 2 < \sigma_2 < 4 < \sigma_3 < 6 < \sigma_4$$

oricare din cele două polinoame fiind acceptabile. Să alegem $D(s) = (s+1)(s+3)(s+5)$. Atunci, prin comparaţie cu (126) putem să scriem

$$\begin{aligned} z_{22a} + z_{11b} &= \frac{(s+2)(s+4)(s+6)}{(s+1)(s+3)(s+5)} = \frac{\frac{15}{8}}{s+1} + \frac{\frac{3}{4}}{s+3} + \frac{\frac{3}{8}}{s+5} + \frac{16}{5}, \\ z_{21a}\,z_{21b} &= \frac{K(s+5)}{(s+1)(s+3)(s+5)} = \frac{K}{(s+1)(s+3)} = \left(\frac{\frac{15}{8}}{s+1}\right)\left(\frac{\frac{3}{4}}{s+3}\right). \end{aligned} \tag{129}$$

Constatăm că alegînd un zero al lui $D(s)$ în $s = -5$, mai avem un avantaj suplimentar prin simplificarea lui $z_{21a}z_{21b}$. Aceasta nu este însă o caracteristică generală.

Identificarea parametrilor individuali, din ultimul set de ecuații nu este unică. Alegînd pentru constanta K valoarea $45/32$ se pot face următoarele identificări

$$z_{21a} = \frac{\frac{15}{8}}{s+1}; \quad z_{21b} = \frac{\frac{3}{4}}{s+3},$$

$$z_{22a} = \frac{\frac{15}{8}}{s+1}; \quad z_{11b} = \frac{\frac{3}{4}}{s+3} + \frac{\frac{3}{8}}{s+5} + \frac{16}{5}.$$

Fiecare din aceste două seturi poate fi realizat direct. Diportul N_a este un circuit în T degenerat, avînd numai latura din derivație (la fel ca secțiunea B din fig. 7.26 *b*), așa cum se arată în fig. 7.29 *a*. Cît despre N_b, pe lîngă un termen comun la z_{21b} și z_{11b}, care va conduce la un circuit în T degenerat, mai există un termen particular în z_{11b}, care dă un circuit în serie cu intrarea. Circuitul N_b este arătat în fig. 7. 29 *b*, iar întregul circuit este dat în fig. 7.29 *c*. Se recomandă cititorului să verifice că, acest circuit are impedanța de transfer egală cu funcția dată.

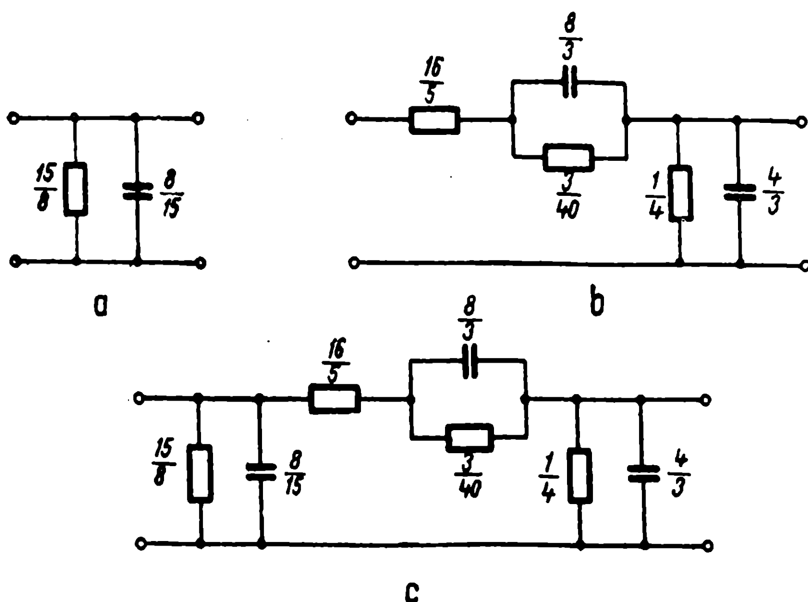


Fig. 7.29. Realizarea exemplului numeric prin circuitele:
(*a*) N_a; (*b*) N_b; (*c*) circuitul general format prin conectarea în cascadă.

Să trecem în revistă metoda utilizată : în prima etapă funcţia de transfer dată $P(s)/Q(s)$, care este realizabilă (are poli reali şi negativi) este împărţită atît la numitor cît şi la numărător cu polinomul auxiliar $D(s)$, ales astfel, încît să facă din raportul Q/D o impedanţă *RC*. Apoi Q/D este dezvoltat în fracţii parţiale. Temenii acestei dezvoltări sînt repartizaţi la z_{22a} şi z_{11b}. Această repartizare este dirijată de descompunerea ce trebuie făcută pentru P/D, care trebuie să reprezinte produsul între z_{21a} şi z_{21b} [1]). Desigur, realizarea nu este unică.

Conectarea în cascadă cu un convertor de negativare

În metoda de sinteză discutată mai înainte, atunci cînd se dă o funcţie $z_{21} = P(s)/Q(s)$ este necesar să se aleagă un polinom $D(s)$, care să facă din Q/D o impedanţă *RC*. Polii funcţiei iniţiale trebuie să fie reali şi negativi. Aceasta este o clasă limitată de funcţii. Dacă această restricţie este înlăturată, permiţîndu-se ca polii să fie situaţi oriunde în semiplanul stîng, funcţia nu va mai fi realizabilă printr-un circuit *RC*. Funcţia Q/D va avea zerouri complexe (unele din ele), iar reziduurile în poli nu vor mai fi toate, pozitive. Această ultimă observaţie ne dă cheia pentru o altă rezolvare.

Să presupunem că un convertor de negativare cu inversare a tensiunii este conectat în cascadă între doi diporţi, ca în fig. 7.30. Sarcina lui N_a nu mai este numai N_b ca mai înainte, ci N_b precedat de un convertor de negativare. Presupunînd că raportul de conversie este unitar, impedanţa de la bornele de intrare în convertorul de negativare este $-z_{11b}$ şi aceasta înlocuieşte în expresia (126), pe $+z_{11b}$. Impedanţa de transfer generală devine acum :

$$z_{21}(s) = -\frac{z_{21a}z_{21b}}{z_{22a}-z_{11b}}. \tag{130}$$

Să presupunem că se dă o funcţie raţională $P(s)/Q(s)$ cu poli complecşi. Împărţim numărătorul şi numitorul cu un polinom auxiliar $D(s)$, cu un număr potrivit ales de zerouri reale, negative. Apoi dezvoltăm pe

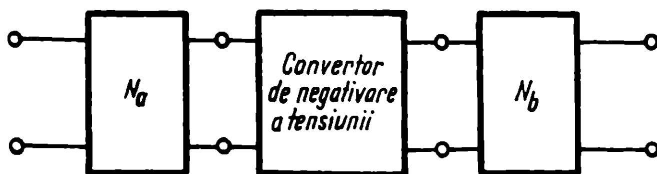


Fig. 7.30. Circuit *RC* cu convertor de negativare conectat în cascadă între diporţi.

[1]) Funcţiile z_{21a} şi z_{22a}, respectiv z_{21b} şi z_{11b}, trebuie să formeze împreună un set de parametri z aparţinînd aceluiaşi diport *RC* (N.T).

Q/D în fracţii parţiale. Unele reziduuri vor fi pozitive şi unele vor fi negative. Aplicînd toate acestea, se obţine rezultatul

$$z_{21} = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P/D}{Q/D} = \frac{P/D}{k_0 + \sum \frac{k_{ip}}{s+\sigma_{ip}} - \sum \frac{k_{in}}{s+\sigma_{in}}}, \tag{131}$$

în care indicii „p" şi „n" au fost utilizaţi pentru marcarea caracterului „pozitiv" şi „negativ" al reziduurilor. Identificarea lui z_{22a} şi z_{11b} se poate face imediat: toţi termenii din dezvoltarea în fracţie parţială, care au reziduul pozitiv aparţin la z_{22a}; cei cu reziduul negativ, la z_{11b}. Factorii polinomului de la numărător $P(s)$ sînt repartizaţi la z_{21a} sau z_{21b}, cu condiţia ca z_{21a} să nu aibă nici un pol pe care nu-l are z_{22a}, iar z_{21b} să nu aibă nici un pol pe care nu-l are z_{11b}. (Termenul „pol" include şi comportarea de la infinit. Astfel, dacă z_{21b} este nenul la infinit şi z_{11b} trebuie să fie tot nenul).

Pentru exemplificare vom lua o funcţie Cebişev de ordinul patru şi două perechi de zerouri ale transmisiunii pe axa frecvenţelor $j\omega$, care împreună formează funcţia dată:

$$z_{21} = \frac{P}{Q} = \frac{(s^2+4)(s^2+9)}{6(s^4+2{,}16s^3+3{,}31s^2+2{,}86s+1{,}26)}.$$

Polinomul auxiliar trebuie să fie cel puţin de gradul patru; să alegem $D(s) = s(s+1)(s+2)(s+3)$. Atunci

$$z_{22a} - z_{11b} = 6 \cdot \frac{s^4+2{,}16\,s^3+3{,}31\,s^2+2{,}86s+1{,}26}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$= 6 + \frac{1{,}26}{s} + \frac{22{,}5}{s+2} - \left(\frac{1{,}65}{s+1} + \frac{45{,}15}{s+3}\right).$$

$$z_{21a}\, z_{21b} = \frac{(s^2+4)(s^2+9)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Evident, fiecare din factorii pătratici din $P(s)$ trebuie repartizat la unul dintre diporţii componenţi. Atunci, doi poli (în 0 şi -2) vor aparţine la N_a şi doi poli (în -1 şi -3) vor aparţine la N_b. Una din perechile de zerouri imaginare trebuie repartizată la N_a; cealaltă pereche la N_b. Astfel

$$z_{21a} = \frac{s^2+4}{s(s+2)}.$$

$$z_{21b} = \frac{s^2+9}{(s+1)(s+3)}.$$

Ambele funcţii sînt nenule la infinit, deci atît z_{22a} cît şi z_{11b} trebuie să fie nenule la infinit. Cu toate acestea, în dezvoltarea în fracţii parţiale a funcţiei Q/D, nu apare nici un termen negativ constant, printre reziduurile negative. Această situaţie poate fi rezolvată adunînd şi scăzînd o constantă, de exemplu 1. Rezultă:

$$z_{22a} = 7 + \frac{1.26}{s} + \frac{22{,}5}{s+2},$$

$$z_{11b} = 1 + \frac{1.65}{s+1} + \frac{45.15}{s+3}.$$

Fiecare dintre perechile de funcţii z_{22a}, z_{21a} şi z_{11b}, z_{21b} este realizabilă printr-un diport RC. Rămîne să se facă realizarea efectivă. Din cauză că zerourile transmisiunii nu sînt reale, problema este ceva mai dificilă decît în exemplul precedent. Cu toate acestea există metode elaborate pentru efectuarea acestei sinteze, dar noi nu vom face aici aceste dezvoltări. (A se consulta bibliografia asupra sintezei).

Conectarea în derivaţie

Să considerăm o altă configuraţie a circuitului ca cea din fig. 7.31 *a*. Un diport RC, N_b, este conectat în cascadă cu un convertor de negativare cu inversare a curentului şi întreaga combinaţie este conectată în paralel cu un alt diport RC, N_a. Ne interesează funcţia de transfer a tensiunii $V_2(s)/V_1(s)$, care exprimată prin parametrii y ai întregului ansamblu, este $V_2/V_1 = -y_{21}/y_{22}$. La conectarea în paralel a unor diporţi, parametrii y globali sînt egali cu suma parametrilor y ai diporţilor componenţi. Datorită prezenţei convertorului de negativare, semnele lui y_{21b} şi y_{22b} se

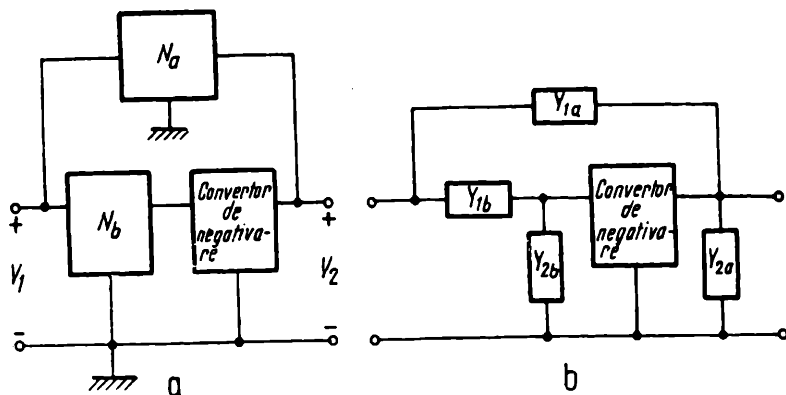


Fig. 7.31. Diporţi conectaţi în paralel cu un convertor de negativare.

inversează (în ipoteza că factorul de conversie este unitar) şi funcţia căutată devine

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-(y_{21a}-y_{21b})}{y_{22a}-y_{22b}}, \qquad (132)$$

Acum, dacă se dă o funcţie raţională P/Q, se poate utiliza obişnuitul polinom auxiliar $D(s)$, cu care se împarte numărătorul şi numitorul, după care funcţia este transformată în forma (132). Nu vom face dezvoltarea generală ci vom înlocui diporţii generali din fig. 7.31 *a* cu o schemă particulară, ca cea arătată în fig. 7.31 *b*. Aceasta nu limitează clasa funcţiilor cu care se poate lucra.

Calculînd parametrii y ai acestor circuite simple şi înlocuindu-i în (132), se obţine rezultatul:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Y_{1a}-Y_{1b}}{(Y_{1a}+Y_{2a})-(Y_{1b}+Y_{2b})} = \frac{Y_{1a}-Y_{1b}}{(Y_{1a}-Y_{1b})+(Y_{2a}-Y_{2b})}. \qquad (133)$$

Numitorul acestei expresii este format din numărător adunat cu un alt termen. Dacă funcţia de transfer dată este de forma $P(s)/Q(s)$, aceasta trebuie pusă în forma (133). Se găseşte

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{KP(s)}{Q(s)} = \frac{KP(s)}{KP(s)+[Q(s)-KP(s)]} = \frac{\frac{KP}{D}}{\frac{KP}{D}+\frac{Q-KP}{D}} \qquad (134)$$

În această expresie K este o constantă de multiplicare, arătată explicit. Polinomul $KP(s)$ a fost adunat şi scăzut la numitor şi apoi s-a introdus obişnuitul polinom auxiliar $D(s)$, cu zerouri reale şi negative. Compararea ultimelor două ecuaţii conduce la

$$Y_{1a} - Y_{1b} = \frac{KP(s)}{D(s)} = k_\alpha s + k_0 + \sum \frac{k_{ip}s}{s+\sigma_{ip}} - \sum \frac{k_{in}s}{s+\sigma_{in}}, \qquad (135a)$$

$$Y_{2a} - Y_{2b} = \frac{Q(s)-KP(s)}{D(s)} = \hat{k}_\alpha s + \hat{k}_0 + \sum \frac{\hat{k}_{ip}s}{s+\sigma_{ip}} - \sum \frac{\hat{k}_{in}s}{s+\sigma_{in}}. \qquad (135\,b)$$

După ce Y/s este dezvoltat în fracţii parţiale, se grupează împreună termenii cu reziduuri pozitive şi cei cu reziduuri negative. Termenii cu reziduuri pozitive din cele două expresii sînt identificaţi cu Y_{1a} şi respec-

tiv Y_{2a}, iar cei cu reziduuri negative cu Y_{1b}, respectiv Y_{2b}. Datorită modului în care au fost construite, fiecare din aceste funcții, va fi relalizabilă printr-o funcție de admitanță RC, iar realizarea poate fi făcută în mod simplu.

Pentru exemplificare să considerăm funcția Cebișev tratată mai înainte:

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{KP(s)}{Q(s)}=\frac{K(s^2+4)\ (s^2+9)}{s^4+2,16\,s^3+3,31\,s^2+2,86s+1,26}.$$

Mai înainte, K a fost ales egal cu 1/6. Polinomul auxiliar cu care s-a lucrat era de gradul 4 și avea un factor s. În cazul de față, nu putem avea un factor s în polinomul auxiliar, deoarece o admitanță RC nu poate avea un pol în $s=0$. Deoarece o admitanță RC poate avea pol la infinit, putem să alegem $D(s)=(s+1)\ (s+2)\ (s+3)$. Deci;

$$\frac{KP(s)}{D(s)}=\frac{K(s^2+4)\ (s^2+9)}{(s+1)\,(s+2)\,(s+3)}=K\left(s+6+\frac{52s}{s+2}-\frac{25s}{s+1}-\frac{39s}{s+3}\right),$$

$$\frac{Q(s)}{D(s)}=\frac{s^4+2,16s^3+3,31s^2+2,86s+1,26}{(s+1)\ (s+2)\ (s+3)}=s+0,21+\frac{3,75s}{s+2}-\left((\frac{0,275s}{s+1}+\frac{7,52s}{s+3}\right).$$

Valoarea lui K poate fi aleasă astfel încît să conducă la simplificarea circuitului. Deoarece KP/D trebuie scăzut din Q/D, K trebuie ales astfel încît să anuleze pe unul din termeni. Astfel, luînd $K=3,75/52=0,072$ obținem:

$$Y_{1a}-Y_{1b}=\frac{KP(s)}{D(s)}=0,072s+0,432+\frac{3,75s}{s+2}-\left(\frac{1,8s}{s+1}+\frac{2,81s}{s+3}\right)$$

$$Y_{2a}-Y_{2b}=\frac{Q-KP}{D}=0,928\,s+\frac{1,53\,s}{s+1}-\left(0,222+\frac{4,71\,s}{s+3}\right).$$

În final,

$$Y_{1a}=0,072\,s+0,432+\frac{3,75\,s}{s+2},$$

$$Y_{2a}=0,928\,s+\frac{1,53\,s}{s+1},$$

$$Y_{1b}=\frac{1,8\,s}{s+1}+\frac{2,81\,s}{s+3}.$$

$$Y_{2b}=0,222+\frac{4,71\,s}{s+3}.$$

Circuitul complet este arătat în fig. 7.32.

Pentru schemele considerate, este necesar să se facă numai sinteza unor diporţi *RC*. Aceasta simplifică în mare măsură calculele necesare.

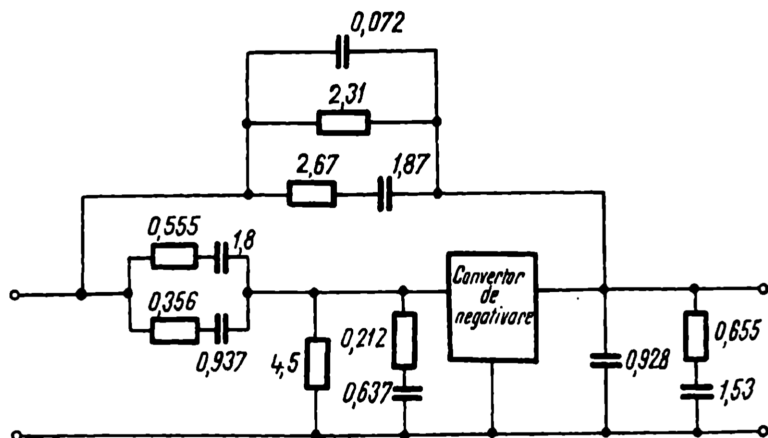


Fig. 7.32. Realizarea exemplului numeric.

Schema *RC* cu amplificator

În subparagrafele precedente s-a utilizat convertorul de negativare, ca dispozitiv activ, în combinaţie cu circuitul *RC*. Desigur, se pot găsi şi alte configuraţii, care utilizează alte dispozitive active. Cea mai simplă posibilitate este utilizarea unui amplificator cu reacţie inversă. Amplificatorul poate fi reprezentat în forma sa cea mai simplă, printr-o sursă controlată (de tensiune sau de curent). Deşi sînt posibile multe configuraţii vom trata numai una, sugerîndu-le pe celelalte ca probleme.

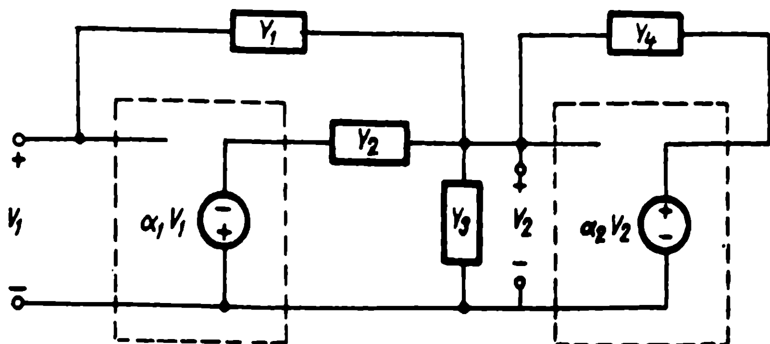


Fig. 7.33. Montaj al amplificatorului cu reacţie inversă.

Să considerăm montajul din fig. 7.33. Acesta conţine două amplificatoare de tensiune (surse de tensiune), controlate prin tensiune), fiecare avînd o polaritate diferită. Să notăm că tensiunea de ieşire din întreg ansamblul este tensiune de intrare în al doilea amplificator. Evaluarea funcţiei de transfer pentru tensiune, în acest montaj, ne dă

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Y_1 - \alpha_1 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3 - (\alpha_2 - 1) Y_4}. \tag{136}$$

Vom presupune că în al doilea amplificator cîştigul α_2 este mai mare ca 1.

Dîndu-se o funcţie raţională $P(s)/Q(s)$, care reprezintă funcţia de transfer pentru tensiune, vom împărţi numărătorul şi numitorul cu obişnuitul polinom auxiliar $D(s)$ avînd un grad potrivit ales (egal cu, sau cu o unitate mai mic, decît gradul lui Q sau P, cel mai mare din ele), şi zerouri distincte, reale şi negative. Fiecare din funcţiile P/sD şi Q/sD se dezvoltă în fracţii parţiale şi termenii cu reziduuri pozitive, ca şi cei cu reziduuri negative sînt grupaţi împreună. În final, se face comparaţia cu (136) şi de aici se obţine identificarea admitanţelor. Rezultă

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)/D(s)}{Q(s)/D(s)},$$

$$Y_1 - \alpha_1 Y_2 = \frac{P(s)}{D(s)} = k_\infty s + k_0 + \sum \frac{k_{ip} s}{s + \sigma_{ip}} - \sum \frac{k_{in} s}{s + \sigma_{in}}, \tag{137 a}$$

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 - (\alpha_2 - 1) Y_4 = \frac{Q(s)}{D(s)} = \hat{k}_\infty s + \hat{k}_0 + \sum \frac{\hat{k}_{ip} s}{s + \hat{\sigma}_{ip}} - \sum \frac{\hat{k}_{in} s}{s + \hat{\sigma}_{in}}. \tag{137 b}$$

Din primele relaţii găsim

$$Y_1(s) = k_\infty s + k_0 + \sum \frac{k_{ip} s}{s + \sigma_{ip}}, \tag{138 a}$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{\alpha_1} \sum \frac{k_{in} s}{s + \sigma_{in}}. \tag{138 b}$$

Introducînd aceste relaţii în (137 b), se pot găsi Y_3 şi Y_4. Astfel

$$Y_3 - (\alpha_2 - 1) Y_4 = (\hat{k}_\infty - k_\infty) s + (\hat{k}_0 - k_0) + \sum \frac{\hat{k}_{ip} s}{s + \hat{\sigma}_{ip}} -$$

$$- \sum \left(\frac{\hat{k}_{in} s}{s + \hat{\sigma}_{in}} + \frac{k_{ip} s}{s + \sigma_{ip}} + \frac{1}{\alpha_1} \frac{k_{in} s}{s + \sigma_{in}} \right). \tag{139}$$

Nu se pot scrie expresiile generale pentru Y_3 şi Y_4, deoarece apar unele incertitudini în membrul drept; de exemplu, termenul constant $(\hat{k}_0 - k_0)$ poate fi pozitiv sau negativ. În primul caz, termenul constant aparţine lui Y_3; în ultimul caz, lui Y_4. Mai departe, setul de poli $-\hat{\sigma}_{ip}$ este conţinut în setul $\{-\sigma_{ip}, -\sigma_{in}\}$ deoarece ultimul conţine toate zerourile lui $D(s)$. Prin urmare, aici vor avea loc reduceri de termeni, care crează o incertitudine cu privire la semnul final. Aceste incertitudini dispar desigur, atunci cînd este vorba de un caz anume. Aceasta se va clarifica prin exemplul care urmează. În orice caz, este necesar să se realizeze numai diporţi *RC*. De asemenea, trebuie specificată valoarea cîştigului amplificatorului.

Într-o realizare practică, ar fi util ca elementele de circuit să apară în locuri potrivite, la intrarea şi ieşirea amplificatorului, pentru a ţine seama de parametrii unui amplificator real, care nu se reduc numai la cîştig. Amplificatorul real, utilizat în realizarea surselor controlate, va avea impedanţe de intrare, ieşire şi de reacţie, aşa cum se arată în fig. 7.33.

Datorită poziţiei lui Y_2 este posibil ca, prin această latură să se realizeze impedanţa de ieşire a primului amplificator. În mod similar Y_3 şi Y_4, pot să conteze ca impedanţe de intrare, de ieşire şi de reacţie la cel de-al doilea amplificator. Prin urmare, este util să avem un termen constant în dezvoltarea lui Y_3. Dacă acesta nu apare datorită faptului că în (139) $k_0 \geqslant \hat{k}_0$, atunci în membrul drept din (139) se poate face adunarea şi scăderea unui termen potrivit ales.

Pentru exemplificare să considerăm următoarea funcţie trece-tot:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{s^2 - 2s + 2}{s^2 + 2s + 2}.$$

În cazul de faţă, gradul lui $D(s)$ nu trebuie să fie mai mare ca 1. Să luăm $D(s) = s + 1$. Atunci

$$Y_1 - \alpha_1 Y_2 = \frac{s^2 - 2s + 2}{s + 1} = s + 2 - \frac{5s}{s + 1},$$

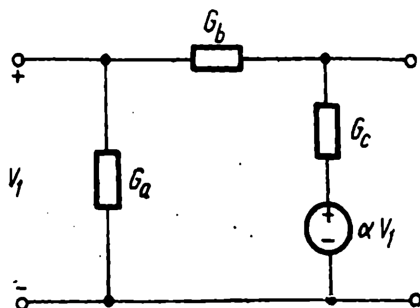


Fig. 7.34. Circuit echivalent al unui amplificator.

de unde

$$Y_1 = s + 2, \quad Y_2 = \frac{1}{\alpha_1} \frac{5s}{s+1},$$

$$Y_3 - (\alpha_2 - 1)\, Y_4 = \frac{s^2 + 2s + 2}{s+1} - Y_1 - Y_2 = -\frac{(\alpha_1 + 5)s}{\alpha_1(s+1)}.$$

Constatăm că în membrul drept nu apare nici un termen constant. Rezultă că, pentru a realiza impedanţa de intrare în cel de-al doilea amplificator, vom aduna şi vom scădea o constantă G. Identificările pentru Y_3 şi Y_4 ne dau:

$$Y_3 = G, \quad Y_4 = \frac{1}{\alpha_2 - 1}\left(G + \frac{(\alpha_1 + 5)s}{\alpha_1(s+1)}\right).$$

Pentru concretizare luăm $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 2$ şi $G = 1$; atunci Y_4 devine

$$Y_4 = 1 + \frac{2s}{s+1} = \frac{3s+1}{s+1} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{\frac{2}{3}}{3s+1}}.$$

Astfel Y_4 se realizează ca o rezistenţă de 1/3 unităţi, în serie cu o latură RC paralel. Realizarea completă este arătată în fig. 7.35. Observăm că în schemă nu apare impedanţa de intrare în primul amplificator. Deoarece impedanţa de intrare a amplificatorului real nu trebuie să aibă nici o influenţă, rezultă că circuitul trebuie alimentat de la o sursă de tensiune sau, cel puţin de la o sursă cu impedanţă de ieşire mică, în comparaţie cu impedanţa de intrare în amplificator.

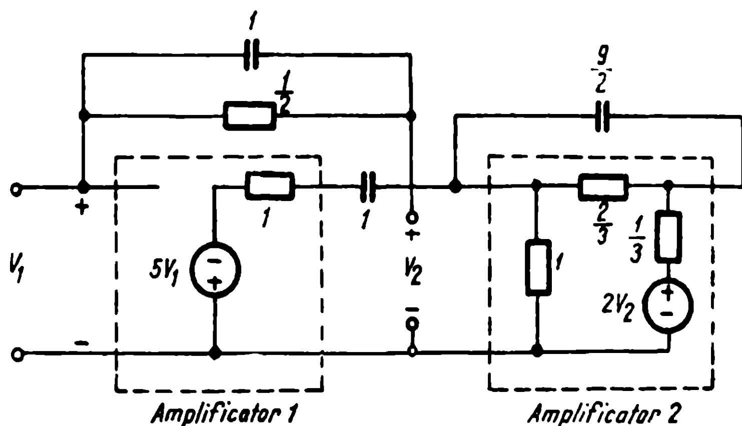


Fig. 7.35. Realizarea unui amplificator RC.

Să rezumăm conţinutul acestui paragraf: am prezentat schematic principalele probleme ale sintezei formale a circuitelor *RC* pasive şi active. Prima etapă constă în alegerea unei scheme particulare, care conţine componente ale circuitelor considerate şi în scrierea funcţiilor de transfer corespunzătoare, în funcţie de parametrii componentelor. Apoi se ia funcţia raţională dată, care este pusă în aceeaşi formă, după ce se introdce un polinom auxiliar, cu care se împarte numărătorul şi numitorul. Aceasta permite să se identifice parametrii circuitelor componente, avînd grijă ca acestea să fie fizic realizabile. Ultima etapă constă în realizarea componentelor.

PROBLEME

Matrice elementare. Matricele elementare sînt de trei tipuri, corespunzînd celor trei tipuri de transformări elementare. Utilizaţi următoarele notaţii:

Tipul 1: $r\mathbf{E}_{ij}$ este matricea elementară care schimbă reciproc liniile (rîndurile) j şi i,
$c\mathbf{E}_{ij}$ este matricea elementară care schimbă reciproc coloanele i şi j.

Tipul 2: $r\mathbf{E}_{i+j}$ este matricea elementară care adună linia j la linia i,
$c\mathbf{E}_{i+j}$ este matricea elementară care adună coloana j la coloana i.

Tipul 3: $r\mathbf{E}_{\alpha i}$ este matricea elementară care înmulţeşte linia i cu α.
$c\mathbf{E}_{\alpha i}$ este matricea elementară care înmulţeşte coloana i cu α.

P. 1. Să se construiască o singură matrice, care realizează asupra unei matrice **A** următoarele operaţii:

(a) Schimbă între ele liniile a treia şi a doua, după ce linia a treia este înmulţită cu 2. Ordinul lui **A**: (3,5).

(b) Adună prima coloană la a treia, după ce prima a fost înmulţită cu 3, iar a treia cu 4. Ordinul lui **A**: (2,3)

(c) Adună linia a doua la prima, după ce prima a fost înmulţită cu -1. Ordinul lui **A**: (3,5).

P 2. Să se găsească o singură matrice care să efectueze următoarele operaţii asupra unei matrice **A**:

(a) Înmulţirea primei linii cu k şi adunarea acesteia la linia a treia; apoi înmulţirea liniei a doua cu 3 şi schimbarea reciprocă a acesteia cu prima linie. Ordinul lui **A**: (4,4).

(b) Adunarea celei de a doua coloane la prima, apoi înmulţirea celei de a doua coloane cu -2 şi adunarea ei la coloana a treia şi în fine, schimbarea reciprocă a coloanelor a doua şi a treia. Ordinul lui **A**: (4,3).

P 3. Să se scrie o singură matrice care realizează fiecare din următoarele operaţii asupra liniilor unei matrice **A**:

(a) Înmulţeşte linia 3 cu -2, apoi o adună la linia 1, după care schimbă între ele linia 1 cu linia 3. Ordinul lui **A**: (3,3).

(b) Schimbă între ele linia 4 cu linia 2: apoi înmulţeşte linia 1 cu 5 şi o adună la rîndul 3; după aceea scade linia 3, din linia 2. Ordinul lui **A**: (4,4).

P 4. Să se repete problema 3 efectuînd operaţiile asupra coloanelor.

P 5. Fie o matrice **A** de ordinul (m,n) cu $m \leqslant n$, care are rangul r.

Să se arate că produsul oricărei matrice elementare cu **A**, va avea acelaşi rang r. Să se arate aceasta înmulţind pe **A**, cu fiecare tip de matrice elementară şi să se găsească efectul acestor operaţii, asupra determinantului submatricilor corespunzătoare lui **A**.

P 6. Să se arate că inversa unei matrice elementare este o matrice elementară de acelaşi tip.

P 7. Să se demonstreze că o matrice nesingulară **A** poate să fie scrisă totdeauna, ca produsul unui număr finit de matrice elementare.

P 8. Să se demonstreze că, două matrice **A** şi **B** de ordin (m, n) sînt echivalente, dacă şi numai dacă ele au acelaşi rang.

P 9. Pentru fiecare din matricele **A** date mai jos să se găsească matricele **P** şi **Q** astfel încît **PAQ** să fie forma normală a lui **A**.

$$(a)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

P 10. Să se reducă următoarele matrice la forma normală:

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad (b) \begin{bmatrix} 6 & 8 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 12 & 16 & -4 & 8 \\ -6 & -8 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & -6 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \qquad (d) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

P 11. Să se reducă următoarele matrice la forma canonică, utilizînd procedeul de reducere Lagrange:

$$(a)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (b)\ \mathbf{A} = 1/4 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -7 \\ -1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 29 & -49 \\ -7 & 3 & -49 & 113 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \mathbf{A} = 1/4 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -7 \\ -1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & 7 \\ -7 & 3 & 7 & 15 \end{bmatrix}$$

P 12. Să se examineze dacă următoarele matrice sînt definite pozitiv:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1/2 & 1 & 4 & 1 \\ 1/2 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 14 & -2 & 4 & -3 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

P 13. Să se demonstreze că o matrice simetrică $\mathbf{A}$ este definită pozitiv, dacă şi numai dacă $\mathbf{A}^{-1}$ este simetrică şi definită pozitiv.

P 14. (a) Să se demonstreze că o matrice reală, simetrică $\mathbf{A}$ este defintă, pozitiv, dacă şi numai dacă, există o matrice reală, nesingulară $\mathbf{B}$, astfel încît $\mathbf{A} = \mathbf{BB}'$.

(b) Să se arate că o matrice reală, simetrică $\mathbf{A}$ de ordinul n şi rang r este semidefinită poztiv, dacă şi numai dacă, există o matrice $\mathbf{B}$ de rang r astfel încît $\mathbf{A} = \mathbf{B}'\mathbf{B}$.

P 15. Fie $\mathbf{A}$ o matrice reală, simetrică, de ordin n şi $\mathbf{B}$ o matrice reală de ordin (r, n) şi rang r. Să se arate că dacă $\mathbf{A}$ este defintă pozitiv, atunci şi $\mathbf{BAB}'$ definită pozitiv.

P 16 Fie $\mathbf{A}$ o matrice reală, nesimetrică şi $\mathbf{x}$ un vector complex. $\mathbf{A}$ poate fi scrisă ca o sumă între părţile sale simetrice şi antisimetrică, $\mathbf{A}_s$ şi respectiv $\mathbf{A}_{ss}$ unde:

$$\mathbf{A}_s = 1/2\ (\mathbf{A} + \mathbf{A}'),$$

$$\mathbf{A}_{ss} = 1/2\ (\mathbf{A} - \mathbf{A}').$$

Se arată că

$$(a)\ \mathrm{Re}\ (\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}_s\mathbf{x},$$

$$(b) = \mathrm{Im}(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}_{ss}\ \mathbf{x}.$$

P 17. În circuitul din fig. 7. P17 toate cele trei bobine sînt cuplate mutual. Să presupunem că este posibil să se cunoscă matricea inductanţelor date, în care toate inductanţele mutuale sînt subunitare. Să se verifice că matricea acestor inductanţe nu este definită sau semidefinită pozitiv. Luînd $R_1 = R_2 = R_3 = 1$ în mod convenţional, să se calculeze frecvenţele naturale.

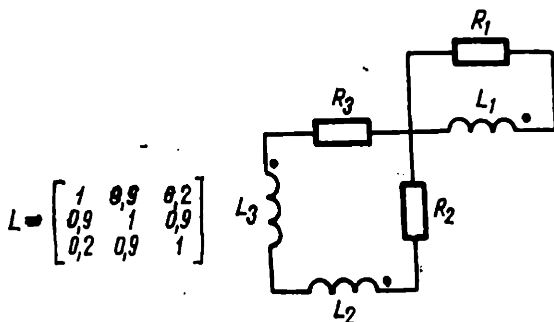


Fig. 7. P. 17.

P18. Fie $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. *Cofactorii principali ascendenţi* ai matricei pătratice **A** sînt definiţi astfel:

$$p_1 = a_{11},\ p_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ p_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_{21} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots\ p_n = \det \mathbf{A}.$$

Să se demonstreze următoarea condiţie pentru caracterul real-pozitiv, care este mai riguroasă decît teorema 4 din text. *O matrice reală, simetrică* **A** *este definită pozitiv, dacă şi numai dacă, toţi cofactorii principali ascendenţi sînt pozitivi.*

P.19. (*a*) Să se găsească rangul fiecărei matrici din cele date în continuare. (Se vor găsi valori diferite).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(*b*) Să se verifice că formele pătratice $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}$ şi $\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X}$ sînt egale.

P 20. Fie **A** o matrice reală, simetrică, definită pozitiv. Să se demonstreze că şi $\mathbf{A}^2$ este tot definită pozitiv.

P 21. Fie $F(s)$ o funcţie real-pozitivă. Să se demonstreze proprietatea argumentului şi anume că $|\arg F(s)| \leqslant |\arg s|$ pentru $0 \leqslant |\arg s| \leqslant \pi/2$.

Indicaţie: se face următoarea transformare bilineară:

$$p = \frac{s-1}{s+1}, \quad W = \frac{F-1}{F+1}.$$

Se analizează în ce mod se realizează transformarea semiplanelor din dreapta, din planele F şi s, în planele W şi p. Se arată că $W(p)$ satisface lema lui Schwarz (vezi Apendicele 2), apoi se înlocuiesc transformările de mai sus în lemă.

P 22. Se afirmă că funcţiile care urmează nu sînt real-pozitive pentru $n > N_0$. Să se verifice această afirmaţie şi să se găsească N_0 pentru fiecare funcţie.

$$\text{(a) } F(s) = \left(\frac{s+1}{s+2}\right)^n, \qquad \text{(b) } F(s) = \left(\frac{s+10}{s+11}\right)^n.$$

P 23. Fie o funcţie de reactanţă $F(s)$ şi $F(j\omega) = jX(\omega)$. Să se demonstreze că

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} \geqslant \left|\frac{X}{\omega}\right|.$$

(Indicaţie: se utilizează funcţiile de energie).

P 24. Să se demonstreze că o transformare bilineară a unei funcţii real-mărginită este real-pozitivă.

P 25. Fie

$$Z(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s + 4}.$$

Partea pară a acestei funcţii real-pozitive are un zero (dublu) pe axa $j\omega$. Prin urmare această funcţie transformă acest punct al axei $j\omega$ într-un punct pe axa jX a planului Z. Să se verifice că derivata dZ/ds în acest punct este reală şi pozitivă.

P 26. Fie $Z(s) = (m_1 + n_1)/(m_2 + n_2)$ o funcţie real-pozitivă. Să se arate că

$$P(s) = m_1 + an_1 + bm_2 + cn_2$$

este un polinom Hurwitz, în care a, b şi c sînt constante pozitive.

P 27. Fie $P(s)$ un polinom Hurwitz. Să se arate că $F(s)$ este o funcţie rp, dacă

$$F(s) = \frac{1}{P(s)} \frac{dP(s)}{ds}.$$

P 28. Fie $Z(s) = P(s)/Q(s)$ o funcţie real-pozitivă. Să se demonstreze că şi următoarea funcţie este tot real-pozitivă.

$$Z_1(s) = \frac{dP(s)/ds}{dQ(s)/ds}.$$

P 29. Fie

$$Y_{RC} = \frac{(s+1)(s+3)(s+8)}{(s+2)(s+4)(s+10)}.$$

Pentru a realiza funcţia Y_{RC}, se sugerează ca prima latură în paralel pe bornele terminale, să fie o rezistenţă de 1/2 ohm.
Admitanţa care rămîne este $Y_{RC} - 2$. Aceasta este o funcţie rp?

P 30. Utilizînd dezvoltările în fracţii parţiale din (99) şi (100), să se arate că:
(a) Im $[Z_{RC}(j\omega)] \lesseqgtr 0$ pentru $\omega \gtreqless 0$, respectiv.
(b) Im $[Y_{RC}(j\omega)] \gtreqless 0$ pentru $\omega \gtreqless 0$, respectiv.
(c) Re $[Z_{RC}(j\omega)]$ este o funcţie monoton *descrescătoare* de ω pentru $\omega \geqslant 0$.
(d) Re $[Y_{RC}(j\omega)]$ este o funcţie monoton *crescătoare* de ω pentru $\omega \geqslant 0$.

P 31. Utilizînd rezultatul problemei 30 să se arate că:
(a) Re $[Z_{RC}(0)] >$ Re$[Z_{RC}(\infty)]$, sau $Z_{RC}(0) > Z_{RC}(\infty)$,
(b) Re $[Y_{RC}(0)] <$ Re$[Y_{RC}(\infty)]$, sau $Y_{RC}(0) < Y_{RC}(\infty)$.

P 32. Rezultatele problemei 30 pot fi descrise ca o transformare a semiplanului superior din s, în semiplanul inferior al lui Z şi o transformare a semiplanului inferior din s, a semiplanului superior al lui Z. Să se utilizeze aceasta pentru a obţine o altă demonstraţie care să arate că $dZ_{RC}(s)/ds$ este negativă pe axa reală.

P 33. Utilizînd interpretarea din problema 32 să se arate că, la o impedanţă $Z_{RL}(s)$, a unui circuit RL pasiv, $dZ_{RL}(s)/ds$ este reală şi pozitivă pe axa reală.

P 34. Fie $Z_1(s)$ și $Z_2(s)$, funcții de impedanță *RC*. Să se demonstreze că Z_1/Z_2 este o funcție real-pozitivă.

P 35. Să se găsească unul sau mai multe circuite care să aibă următoarele funcții de reactanță.

$$\text{(a)}\ Z(s) = \frac{10s(s^2+1)(s^2+1)}{(s^2+1/4)(s^2+2)}, \qquad \text{(b)}\ Z(s) = \frac{2(s^2+1)(s^2+25/4)}{s(s^2+9/4)(s^2+9)}.$$

P 36. Se dă următoarea funcție rațională:

$$Y(s) = \frac{K(s^2+1)(s^2+\alpha^2)}{s(s^2+4)}.$$

Se știe de asemenea că:

$$\text{(a)}\ \left.\frac{dY}{ds}\right|_{s=j1} = \frac{1}{2}, \qquad \text{(b)}\ \left.\frac{dZ}{ds}\right|_{s=j2} = 2.$$

Să se găsească un circuit corespunzător în scară și unul de tip Foster.

P 37. Fie $P(s)$ un polinom ale cărui zerouri sînt toate imaginare. Să se demonstreze că

$$F(s) = \frac{P(s)}{dP/ds}$$

este o funcție de reactanță.

P 38. Admitanța unui circuit *RC* pasiv are zerouri în $s = 0$, -1 și -3. În fiecare din aceste puncte panta lui $Y(\sigma)$ este 2. Pentru valori mari ale lui $s=\sigma$, $Y(\sigma)$ tinde către valoarea 4. Să se găsească un circuit în scară și un circuit de tip Foster, care realizează această funcție

P 39. Fie $Y_{RC}(s)$ admitanța unui circuit *RC* pasiv. Să se arate că reziduurile lui Y_{RC} sînt negative în toți polii, cu excepția polului de la infinit.

P 40. Fie $P(s)$ un polinom ale cărui zerouri sînt toate reale și negative. Să se demonstreze că fiecare din următoarele două funcțiuni este admitanța unui circuit *RC*, pasiv:

$$F_1(s) = \frac{P(s)}{dP/ds}, \qquad F_2(s) = \frac{s\,dP/ds}{P(s)}.$$

P 41. Fie $P(s)$ un polinom ale cărui zerouri sînt toate reale și negative. Dacă K este constantă reală și pozitivă, să se arate că toate zerourile lui $F(s)$ sînt reale și negative, cu

$$F(s) = \frac{s\,dP}{ds} + KP$$

P 42. (a) Fie $F(s) = P(s)/Q(s)$ o funcție de impedanță *RC*. Să se demonstreze că și $F(s)$ este o funcție de impedanță *RC* dacă

$$F(s) = \frac{dP(s)/ds}{dQ(s)/ds}$$

(b) Să se repete problema înlocuind cuvîntul impedanță cu admitanță.

P 43. Se cere să se demonstreze teorema 16 asupra polinoamelor Hurwitz.
În primul rînd, ca să se arate că, dacă $P(s) = m(s)+n(s)$ este Hurwitz, atunci m/n este o funcţie de reactanţă, se observă că factorii unui polinom Hurwitz sînt de forma $(s^2 + as + b)$ sau $(s+c)$, unde a, b şi c sînt reale şi pozitive. Se scrie

$$P(s) = (s^2 + as + b) P_1(s) = (s^2 + as + b)(m_1 + n_1)$$
$$= [(s^2 + b) m_1 + asn_1] + [(s^2 + b) n_1 + asm_1].$$

Raportul între părţile pară şi impară este;

$$\frac{m}{n} = \frac{(s^2 + b) m_1 + asn_1}{(s^2 + b) n_1 + asm_1} = \left(\frac{n_1}{m_1} + \frac{as}{s^2 + b}\right)^{-1} + \left(\frac{s^2 + b}{as} + \frac{m_1}{n_1}\right)^{-1}$$

Să se arate că m/n este o funcţie de reactanţă în ipoteza că şi m_1/n_1 este o funcţie de reactanţă. Se repetă procedurea pînă cînd sînt cuprinşi toţi factorii lui $P(s)$, atît cei pătratici cît şi cei lineari.
În al doilea rînd, trebuie arătat că dacă avem $P(s) = m(s) + n(s)$ şi m/n este o funcţie de reactanţă, atunci $P(s)$ este un polinom Hurwitz (cu excepţia unui factor par, posibil). Zerourile lui $P(s)$ rezultă din

$$P(s) = m + n = n\left(\frac{m}{n} + 1\right) = 0.$$

Să se demonstreze că, deoarece m/n este o funcţie de reactanţă, egalitatea $m/n = -1$ nu poate avea loc, în semiplanul drept din planul s.

P 44. Să se verifice dacă polinoamele care urmează sînt Hurwitz:

(a) $P(s) = s^4 + 7s^3 + 6s^2 + 4s + 1$;

(b) $P(s) = 2s^4 + 4s^3 + 7s^2 + 7s + 3$;

(c) $P(s) = s^7 + 3s^6 + 6s^5 + 6s^4 + 6s^3 + 6s^2 + 5s + 3$;

(d) $P(s) = 2s^5 + 9s^4 + 16s^3 + 15s^2 + 7s + 2$

P 45. Se dă un circuit cu impedanţa de intrare $Z_1 = F(s)$. Se cere să se găsească un al doilea circuit, a cărui admitanţă de intrare Y_2 să fie $F(s)$. Astfel de circuite se numesc inverse. Să se arate în ce condiţii se poate găsi circuitul invers, unui circuit dat, prin metodele de dualitate discutate în cap. 2.

P 46. Se cere să se găsească uniportul invers, pentru fiecare din circuitele arătate în fig. 7.P46.

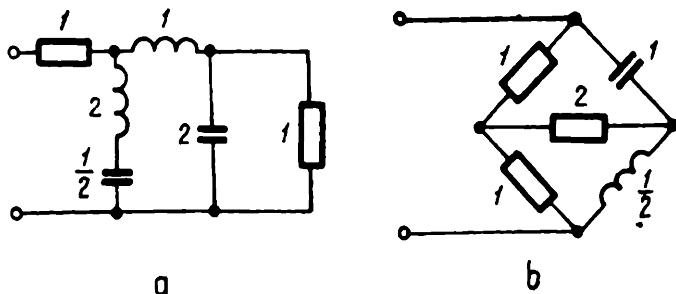


Fig. 7. P. 46.

Să se verifice că admitanța de intrare a circuitului invers este egală cu impedanța de intrare a circuitului dat.

P 47. Să se arate că condiția de reziduuri este satisfăcută cu semnul „egal" (poli compacți), în toți polii finiți și nenuli ai parametrilor y, pentru un diport nedisipativ, terminat cu o rezistență unitară, așa cum se arată în tabelul 7.1.

P 48. Să se arate că matricea simetrică a funcțiilor raționale

$$\begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{12}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix}$$

este o matrice real-pozitivă, dacă și numai dacă, matricea părților reale

$$\begin{bmatrix} r_{11}(\sigma,\omega) & r_{12}(\sigma,\omega) \\ r_{12}(\sigma,\omega) & r_{22}(\sigma,\omega) \end{bmatrix}$$

este definită sau semidefinită pozitiv în $\sigma \geqslant 0$

P 49. Fie două funcții raționale, reale, $y_{11} = y_{22}$ și $y_{21} = y_{12}$. Să presupunem că puntea din fig. 7.P.49 trebuie să aibă acești parametri de scurtcircuit. Să se arate că impedanțele laturilor Z_a și Z_b vor fi real-pozitive dacă

(a) y_{11} este real-pozitivă;
(b) este satisfăcută condiția pentru părțile reale:
$(\mathrm{Re}\, y_{11})^2 - (\mathrm{Re}\, y_{21})^2 \geqslant 0$, pentru $\mathrm{Re}\, s \geqslant 0$.

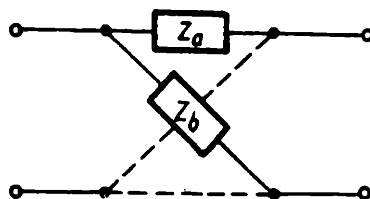


Fig. 7. P. 49.

Dacă în (*b*) se știe că, numai pe axa $j\omega$ este îndeplinită condiția pentru părțile reale, ce condiții suplimentare trebuie impuse pentru funcțiile date y_{11} și y_{21}, pentru ca teorema să fie din nou valabilă.

P 50. Să se arate că într-un zero al lui z_{11}, situat pe axa $j\omega$, z_{21} este imaginar. Apoi să se arate că, orice pol de pe axa $j\omega$ al funcției de transfer pentru tensiuni în gol:

$$g_{21}(s) = \left.\frac{V_2(s)}{V_1(s)}\right|_{I_2=0}$$

este simplu și cu reziduuri imaginare. Să se repete problema și pentru funcția de transfer pentru curenți în scurtcircuit. $h_{21}(s)$.

P 51. Figura 7.P51 *a* reprezintă un diport fără pierderi terminat la o poartă pe o rezistenţă unitară. În fig. 7.P51 *b* cele două porţi au fost schimbate reciproc. În primul caz impedanţa este

$$Z_1(s) = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}.$$

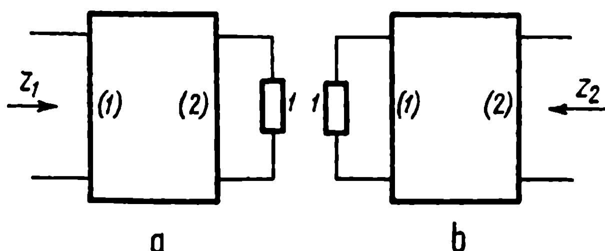


Fig. 7. P. 51.

(a) Să se găsească expresia lui $Z_2(s)$ corespunzătoare cazului A şi B din sinteza Darlington.
(b) Să se observe legătura dintre Z_1 şi Z_2 dacă: (1) $m_1 = m_2$ şi (2) $n_1 = n_2$.

P 52. Să se găsească parametrii z sau y ai diportului nedisipativ, terminat cu o rezistenţă, care realizează următoarele funcţii de impedanţă. Să se menţioneze, care din cazurile Darlington, A sau B, este aplicabil.

(*a*) $Z(s) = \dfrac{s^2 + s + 4}{s^2 + s + 1}$, (*b*) $Z(s) = \dfrac{s^3 + s^2 + 2s + 1}{s^2 + s + 1}$,

(*c*) $Z(s) = \dfrac{s^2 + 5s + 1}{s^3 + 5s^2 + 2s + 1}$. (*d*) $Z(s) = \dfrac{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + s + 1}{s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$,

(*e*) $Z(s) = \dfrac{s^3 + 2s^2 + 5s}{s^3 + 3s^2 + 4s + 35/8}$, (*f*) $Z(s) = \dfrac{s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + 6}{s^3 + 3s^2 + 7s}$.

P 53. Fie $Z(s)$ impedanţa la intrarea unui diport nedisipativ, terminat cu o rezistenţă unitară. Să se arate că:
(a) dacă $Z(s)$ are un pol în $s = 0$, parametrii z ai diportului nedisipativ, vor avea în acest punct un pol, care nu este compact;
(b) dacă $Z(s)$ are un zero în $s = 0$, parametrii y au în acest punct un pol, care nu este compact;
(c) dacă $Z(s)$ nu are nici pol şi nici zero în $s = 0$, atunci atît parametrii z, cît şi parametrii y, vor avea în acest punct un pol compact;
(d) concluziile de la punctele precedente rămîn valabile, dacă punctul $s = 0$ se înlocuieşte cu $s = \infty$.

P 54. Teorema lui Darlington arată că, $Z(s)$, poate fi realizat ca un diport reactiv, terminat cu o rezistenţă la una din porţi. În general, în realizarea diportului intervin şi transformatoare. În cele ce urmează se prezintă o variantă în care transformatorul nu este necesar. Fie o funcţie real-pozitivă scrisă în forma

$$Z(s) = \frac{m_1(s) + n_1(s)}{m_2(s) + n_2(s)}$$

în care m_1 şi m_2 sînt polinoame pare, iar n_1 şi n_2 sînt impare.
Zerourile polinomului $m_1m_2-n_1n_2$ prezintă o simetrie cuadrantală[1].
Fie $H(s)$ un polinom Hurwitz, format din zerourile lui $m_1m_2-n_1n_2$ situate în semiplanul stîng, adică

$$H(s)\ H(-s) = m_1m_2 - n_1n_2$$

şi

$$H(s) = m(s) + n(s)$$

(a) Să se demonstreze că

$$\mathbf{Z}_{oc} = \begin{bmatrix} \dfrac{n^2+m_1m_2}{m_2n_2} & \sqrt{R_2}\dfrac{m}{n_2} & \sqrt{R_3}\dfrac{n}{m_2} \\ \sqrt{R_2}\dfrac{m}{n_2} & R_2\dfrac{m_2}{n_2} & 0 \\ \sqrt{R_3}\dfrac{n}{m_2} & 0 & R_3\dfrac{n_2}{m_2} \end{bmatrix}$$

este matricea impedanţelor de gol a unui triport reactiv, care realizează la una din porţi impedanţa $Z(s)$, atunci cînd celelalte două porţi sînt terminate cu rezistenţe, aşa cum se arată în fig. 7.P54. (Elementul de bază al demonstraţiei constă în a arăta că este îndeplinită condiţia de reziduuri).

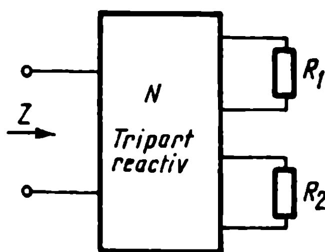


Fig. 7. P. 54.

(b) Să se demonstreze că:

$$\mathbf{Y}_{sc} = \begin{bmatrix} \dfrac{n^2+m_1m_2}{m_1n_1} & \dfrac{m}{\sqrt{R_2}\,n_1} & \dfrac{n}{\sqrt{R_3}\,m_1} \\ \dfrac{m}{\sqrt{R_2}\,n_1} & \dfrac{m_1}{R_2n_1} & 0 \\ \dfrac{n}{\sqrt{R_3}\,m_1} & 0 & \dfrac{n_1}{R_3m_1} \end{bmatrix}$$

este matricea admitanţelor de scurtcircuit a triportului reactiv, considerat anterior.

---

[1] Zerourile sînt plasate în planul s, simetric în raport cu axa reală şi cu cea imaginară. (N.T.).

(c) Să se realizeze impedanţele date în continuare, în forma circuitului arătat. (Realizarea Darlington necesită transformatoare).

$$(1)\ Z(s) = \frac{s^3 + s^2 + 2s + 1}{s^3 + 2s^2 + 3s/2 + 2}, \qquad (2)\ Z(s) = \frac{3s^3 + 5s^2 + 4s + 6}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

P 55. Să se demonstreze că inversa unei matrici real-pozitive este real-pozitivă.

P 56. Fie $Q(s)$ un polinom Hurwitz, ale cărui zerouri sînt toate complexe Fie $P(p)$ un polinom Hurwitz asociat cu $Q(s)$ în modul următor, după transformarea $s = p^2$.

$$Q(s) = Q(p^2) = P(p)\,P(-p)$$

Rezultă că $P(p)$ este polinomul care conţine toate zerourile lui $Q(p^2)$ situate în semiplanul stîng. Să notăm

$$P(p) = A(p^2) + pB(p^2)$$

unde A şi B sînt polinoame impare, ceea ce rezultă din modul în care au fost scrise variabilele lor.

(a) Să se demonstreze că $Q(s)$ poate fi exprimat totdeauna ca o diferenţă între două polinoame în forma:

$$Q(s) = A^2(s) - sB^2(s)$$

unde $A(s)$ şi $B(s)$ au numai zerouri reale şi negative şi unde atît A/sB cît şi B/A sînt funcţii de impedanţă RC. Această formă a lui $Q(s)$ se numeşte *descompunerea Horowitz* a lui Q (a nu se confunda cu Hurwitz).

(b) Să se aplice (*a*) următoarelor polinoame:

(1) $Q(s) = (s^2 + 2s + 2)\,(s^2 + s + 10)$,

(2) $Q(s) = (s^2 + s + 1)\,(s^2 + 2s + 4)$

(3) Polinomul lui Cebişev de ordinul patru cu factorul de ondulaţii $\delta = 0{,}1$,

(4) Polinomul lui Butterworth de ordinul patru,

(5) $Q(s) = (s^2+s+2)\,(s^2+2s+5)\,(s^2+s+8)$,

(6) $Q(s) = (s^2+s+1)\,(s^2+2s+3)\,(s\ +3s+5)$,

(7) Polinomul lui Cebişev de ordinul şase cu factorul de ondulaţii $\delta = 0{,}1$,

(8) Polinomul lui Butterworth de ordinul şase.

P 57. Fie Q_1 şi Q_2 două polinoame de acelaşi grad, cu polinoame Hurwitz asociate P_1 şi P_2 şi fie descompunerea Horowitz corespunzătoare:

$$Q_1 = A_1^2 - sB_1^2$$

$$Q_2 = A_2^2 - sB_2^2$$

(a) Să se demonstreze că, dacă P_1/P_2 este real-pozitiv, atunci

$$A_1^2 - sB_2^2 \text{ şi } A_2^2 - sB_1^2$$

este de asemenea o descompunere Horowitz, adică

$$\frac{A_1}{sB_2},\quad \frac{B_2}{A_1},\quad \frac{A_2}{sB_1},\quad \frac{B_1}{A_2}$$

sînt toate funcții de impedanță *RC*

(b) Să se aplice acest rezultat perechilor potrivite de polinoame din problema **P.56.**

P 58. Fie $Q_1(s) = A_1^2(s) - sB_1^2(s)$ descompunerea Horowitz a unui polinom $Q_1(s)$. Fie $Q_2(s)$ un alt polinom de grad, nu mai mic decît cel al lui Q_1 și fără zerouri reale.

(a) Să se demonstreze că Q_2 se poate scrie totdeauna în forma:

$$Q_2(s) = A_1(s)\, A_2(s) - sB_1(s)B_2(s)$$

unde

$$\frac{A_1}{sB_2},\quad \frac{B_2}{A_1},\quad \frac{A_2}{sB_1} \text{ și } \frac{B_1}{A_2}$$

sînt toate funcții de impedanță *RC*

[Cu transformarea $s = p^2$, $Q_2(p^2)/Q_1(p^2)$ este partea pară a unei funcții rp. Din aceasta se formează funcția rp corespunzătoare, fie aceasta $F(p)$ și se exprimă numărătorul și numitorul prin polinoamele par și impar. În sfîrșit, din $F(p)$ se formează partea pară; numărătorul său trebuie să fie $Q_2(p^2)$.]

(b) Să se aplice acest rezultat polinoamelor, potrivit alese, din problema **P.56.**

P 59. Dacă în problema **P.58** se admite ca polinomul Q_2 să aibă și zerouri reale negative, să se arate că Q_2 poate fi descompus în

$$Q_2 = A_1B_2 - A_2B_1$$

unde

$$\frac{A_1}{sB_2},\quad \frac{B_2}{A_1},\quad \frac{A_2}{sB_1},\quad \frac{B_1}{A_2},\quad \frac{A_1}{sB_1},\quad \frac{B_1}{A_1},\quad \frac{A_2}{sB_2},\quad \frac{B_2}{A_2}$$

sînt toate funcții de impedanță *RC*.

În acest caz, $pQ_2(p^2)/Q_1(p^2)$ este partea impară a unei funcții rp. Se contruiește funcția rp din partea sa impară, adunînd o constantă suficient de mare, pentru ca rezultatul să nu aibă zerouri pe axa $j\omega$. Se reconstruiește partea impară din funcția rp; numărătorul său trebuie să fie $pQ_2(p^2)$.

P 60. Fie $F(s) = \dfrac{Q_1(s)}{Q_2(s)}$ o funcție rațională, reală.

(a) Să se demonstreze că aceasta poate fi descompusă în

$$F(s) = \frac{B_1(s)A_2(s) - A_1(s)B_2(s)}{A_1(s)\, A_2(s) - sB_1(s)B_2(s)}$$

unde

$$\frac{A_1}{sB_1},\ \frac{B_1}{A_1},\ \frac{A_2}{sB_2},\ \frac{B_2}{A_2}$$

sînt toate funcții de impedanță *RC*.

(b) Să se aplice acest rezultat următoarelor funcții:

$$(1)\quad F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 3s + 5)},$$

$$(2)\quad F(s) = \frac{(s^2 + s + 1)(s + 2)(s^2 + 2s + 8)}{(s^2 + 2s + 6)(s^2 + 4s + 10)},$$

$$(3)\quad F(s) = \frac{(s^2 + s + 1)(s^2 + 3s + 5)}{(s^2 + 4s + 8)(s^2 + 5s + 10)}.$$

P 61. Să presupunem că funcția rațională $F(s)$ din problema **P.60** este supusă următoarelor restricții suplimentare: (a) $F(s)$ nu are nici un pol la ∞ și $F(\infty) \geqslant 0$. (b) Orice pol real și negativ al lui $F(s)$ este simplu și cu rezduuri pozitive.

(a) Să se demonstreze că $F(s)$ poate fi descompus astfel

$$F(s) = \frac{A_1(s)\, B_2(s) - A_2(s)\, B_1(s)}{A_1^2(s) - s B_1^2(s)}$$

unde

$$\frac{A_2}{sB_2}, \frac{B_2}{A_2}, \frac{A_1}{sB_1}, \frac{B_1}{A_1}$$

sînt toate funcții de impedanță RC.

(b) Să se aplice acest rezultat, funcțiilor potrivite din problema **P.60**.

P 62. Următoarele funcții de impedanță de transfer, trebuie realizate prin circuitul RC, în cascadă cu un convertor de negativare, arătat în fig. 7.30. Să se găsească descompunerea Horowitz a numitorului (ca în problema **P.56**) și să se formeze de aici, parametrii z ai diporților RC.

$$(a)\quad \frac{K(s^2 + 1)}{s^4 + 4s^3 + 9s^2 + 8s + 5}, \qquad (b)\quad \frac{K(2s^2 - s + 2)}{s^2 + 2s + 6},$$

$$(c)\quad \frac{K(s^2 - 2s + 3)}{(s^2 + s + 3)(s^2 + s + 5)}, \qquad (d)\quad \frac{K(s^2 + 1)(s^2 + 4)}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 3s + 6)}.$$

P 63. Să considerăm că funcțiile din problema **P. 62** sînt funcții de transfer pentru tensiune și trebuie realizate prin circuitul RC în paralel cu convertorul de negativare, arătat în fig. 7.31. Să se utilizeze un polinom auxiliar corespunzător și să se obțină un circuit.

P 64. Funcțiile din problema **P.62** trebuie realizate prin circuitul cu amplificator din fig. 7.33. Să se utilizeze un polinom auxiliar potrivit și să se găsească o realizare.

P 65. Să presupunem că o funcție rațională dată, este mărită cu un polinom auxiliar, cu zerouri reale negative și se face apoi o dezvoltare în fracții parțiale, ca în text în relația (131).

Funcţia poate fi exprimată ca în (130). Rezultatul trebuie realizat prin conexiunea în cascadă arătată în fig. 7 P 65 *a*, unde N_a este un circuit *RC*. Diportul N_b este arătat cu linie punctată. Impedanţa sa de intrare z_{11b} este $-z$. Acest diport este format la rîndul său, din

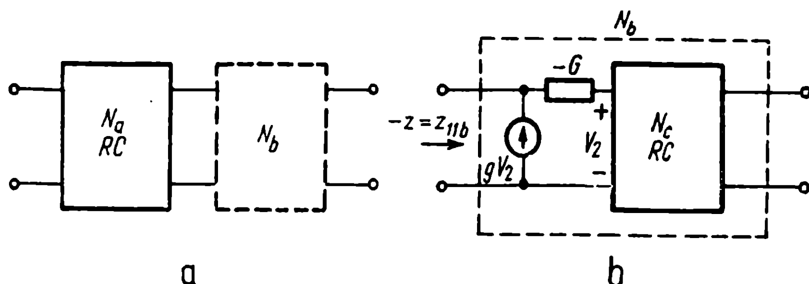


Fig. 7. P. 65.

componentele reprezentate în fig. 7 P 65 *b*. Să se arate că parametrii lui N_c, pot fi exprimaţi prin cei ai lui N_b, cu relaţiile

$$z_{11c} = \frac{1}{g}\,\frac{1/G - z}{1/g - z},$$

$$z_{21c} = \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{G}\right)\frac{z_{21b}}{1/g - z}.$$

Se vede că $-z$ este negativa unei impedanţe *RC*. Din proprietăţile lui $-z(s)$, să se precizeze condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească parametrii g şi G pentru ca N_c să fie un diport *RC*.

P 66. (a) Să se elaboreze o metodă de realizare a funcţiei de transfer pentru tensiune, prin circuitul din fig. 3. P 22 din cap. 3, unde diportul şi admitanţa Y sînt *RC*.

(b) Să se realizeze fiecare din funcţiile date în problema **P.62** în această formă.

P 67. O funcţie ce reprezintă o impedanţă de transfer, trebuie realizată prin conectarea în cascadă a unităţilor arătate în fig. 3. P 26 (cap. 3), în care fiecare din diporţii N_b şi N_a să fie de tip *RC*.

(a) Să se elaboreze o metodă care să permită identificarea funcţiilor realizabile *RC*, z_{21b} şi y_{21a} şi a funcţiilor similare pentru celelalte unităţi conectate în cascadă.

(b) Să se ilustreze metoda cu funcţiile a) şi d) din problema 62.

P 68. Fie $Z(s)$ o funcţie raţională real-poztivă.

(a) Să se demonstreze că

$$F(s) = \frac{kZ(s) - sZ(k)}{kZ(k) - sZ(s)}$$

este de asemenea real-pozitivă, constanta k fiind reală şi pozitivă.

(b) Să se arate că numărătorul şi numitorul au un factor comun $(s + k)$, dacă şi numai dacă $Z(-k) = -Z(k)$.

(c) Exprimînd pe $Z(s)$ în funcție de $F(s)$ se găsește :

$$Z(s) = Z(k)\,\frac{s + kF(s)}{k + sF(s)}\,.$$

Să se arate că, dacă $Z(-k) \neq -Z(k)$, atunci numărătorul și numitorul expresiei pentru $Z(s)$ va avea un factor comun $(s + k)$.

(d) Să se ilustreze cele precedente cu următoarele funcții rp :

$$(1)\ Z(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s + 1}, \quad (2)\ Z(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + s + 1}{s^3 + s^2 + 2s + 1}.$$

P 69. Două funcții real-pozitive $F_1(s)$ și $F_2(s)$ se numesc *complementare*, dacă suma lor este egală cu o constantă pozitivă K. Să presupunem că $F_1(s)$ și K sînt date. Să se determine restricțiile la care trebuie să fie supuse $F_1(s)$ și K, pentru ca $F_1(s)$ să aibă o funcție complementară. Dacă $F_1(s)$ și $F_2(s)$ sînt complementare și reprezintă funcții de impedanță de intrare, aceasta înseamnă că, prin conectarea în serie a celor două circuite corespunzătoare, se obține o impedanță de intrare constantă. Dacă $F_1(s)$ și $F_2(s)$ sînt funcții de admitanță, atunci prin conectarea în paralel a circuitelor corespunzătoare, se obține o admitanță de intrare constantă. O pereche de astfel de circuite se numesc complementare.

P 70. Ne referim la problema **P.69**. Fie $Z_1(s)$ impedanța de intrare a unui circuit *RC* și să presupunem că aceasta este regulată în origine. Să se arate că funcția sa complementară $z_2(s)$ va fi o funcție de impedanță *RL*, regulată la infinit.

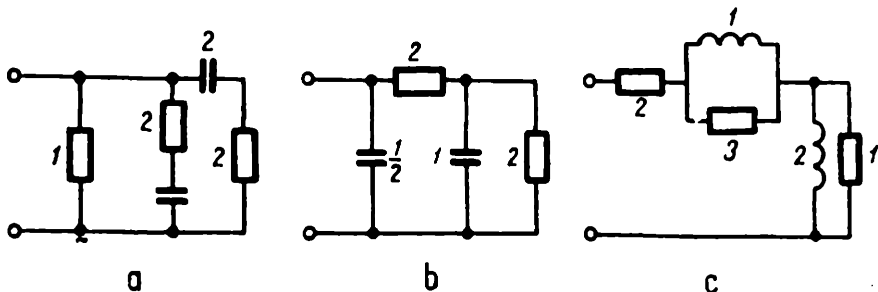


Fig. 7. P. 71.

P 71. Să se găsească circuitele complementare pentru fiecare din circuitele date în fig. 7.P.71.

8

Parametri de repartiţie

Proprietăţile şi comportarea unor circuite multiport pot fi studiate, aşa cum s-a arătat în capitolul 3, prin intermediul *matricelor de impedanţe, admitanţe*, sau *hibride*. Aceste matrice sînt definite cu ajutorul tensiunilor de gol sau al curenţilor de scurtcircuit, considerate la diferite porţi ale reţelei. În condiţii de lucru reale, multiportul poate să nu aibă la unele porţi, bornele în scurtcircuit, sau în gol. Totuşi, aceşti parametri de gol sau de scurtcircuit pot să descrie în mod adecvat funcţionarea multiportului, în orice condiţii de terminaţie. Desigur, unele circuite pot să nu aibă matrice z, altele pot să nu aibă matrice y, iar unele (ca de exemplu transformatoarele ideale [1]), pot să nu aibă nici matrice z nici matrice y.

Ar fi util să existe un alt mod de a descrie comportarea multiportului în alte condiţii de funcţionare, cu porţile terminate altfel decît în gol sau scurtcircuit. Dacă s-ar defini un set de parametri considerînd la fiecare poartă o sarcină finită [2]), aceşti parametri ar fi mai utili pentru a descrie transferul (de putere) de la un generator real (cu impedanţă internă), conectat la o poartă, spre o sarcină conectată la altă poartă. Parametrii de repartiţie constituie un astfel de set.

Parametrii de repartiţie îşi au originea în teoria liniilor de transmisiuni. Aceşti parametri sînt foarte importanţi în teoria circuitelor pentru microunde, în care conceptul de putere este mai important decît conceptele de tensiune şi curent, care devin aici oarecum artificiale. Parametrii de repartiţie vor fi definiţi astfel, încît mărimile ce intervin în transferul de putere să aibă expresii foarte simple.

În dezvoltările care urmează vom utiliza în mod neconvenţional, unele concepte ca incidenţă şi reflexie din teoria liniilor de transmisiuni,

---

[1]) Un transformator ideal este un diport cu matricele z şi y nedefinite deoarece avînd înfăşurări cu inductanţe infinite, elementele matricelor z şi y sînt infinite (N.T.).

[2]) Înţelegînd prin aceasta şi nenulă (N.T.).

numai în scopul unor motivaţii. Expresiile matematice obţinute sînt însă valabile şi nu depind de astfel de interpretări. Vom trata la început cazul mai simplu al uniportului şi apoi vom trece treptat la diporţi şi la multiporţi.

8.1. RELAŢII DE REPARTIŢIE ALE UNUI UNIPORT

Vom începe prin a considera situaţia arătată în figura 8.1. Un circuit uniport Z este considerat ca terminaţie a unei surse de tensiune, în serie cu o impedanţă $z(s)$, care poate fi considerată ca circuit Thévenin echi-

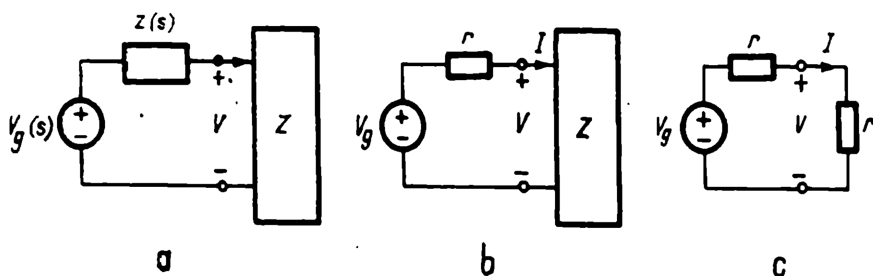


Fig. 8.1. O reţea uniport terminînd un alt uniport, reprezentat prin circuitul Thévenin echivalent.

valent altui circuit, la care este conectat Z. Impedanţa $z(s)$ poate fi considerată *impedanţă a sursei*. Dacă $z(s)$ este reală, situaţia va fi cea din figura 8.1*b*. Uniportul va absorbi putere de la reţeaua sursă. Conectarea optimă va avea loc dacă $Z(s) = z(-s)$, cînd se transferă puterea maximă. (Pentru $s = j\omega$, $z(-s)$ devine $z(-j\omega) = \bar{z}(j\omega) = z(j\bar{\omega})$. Astfel condiţia: $Z(s) = z(-s)$ se reduce la relaţia $Z(j\omega) = \bar{z}(j\omega)$, care reprezintă condiţia cunoscută pentru transfer maxim de putere.

Cînd z este real (egal cu r), adaptarea va avea loc pentru $Z = r$. Utilizînd terminologia de la propagarea undelor, spunem că dacă uniportul este adaptat la sursă (reţea) nu vom avea reflexii la bornele terminale.

În condiţii de neadaptare, transformata V a tensiunii la borne este reprezentată ca fiind compusă din „unda incidentă" sosind din stînga şi „unda reflectată", care se întoarce dinspre uniport. O situaţie similară există şi pentru transformata I a curentului. Astfel putem să scriem:

$$V = V_i + V_r \tag{1a}$$

şi

$$I = I_i - I_r \tag{1b}$$

unde indicii i şi r reprezintă termenul „incident" şi „respectiv „reflectat". Semnul negativ din ecuaţia a doua este un rezultat al referinţei alese pentru curentul reflectat. Să presupunem că acordăm mărimii reale r sensul de „impedanţă caracteristică" a sistemului de transmisie din stînga bornelor uniportului. Atunci mărimile incidente şi reflectate sînt legate prin :

$$\frac{V_i}{I_i} = \frac{V_r}{I_r} = r, \tag{2}$$

care sînt relaţii binecunoscute pentru o linie de transmisiuni. Utilizînd acest rezultat (1) poate fi inversat astfel încît să dea :

$$V_i = \tfrac{1}{2}(V + rI), \qquad I_i = \tfrac{1}{2}(gV + I), \tag{3a}$$

$$V_r = \tfrac{1}{2}(V - rI), \qquad I_r = \tfrac{1}{2}(gV - I), \tag{3b}$$

unde $g = 1/r$. Acum este posibil să se definească un *coeficient de reflexie pentru tensiuni* ρ, ca raportul între transformatele tensiunii incidente şi reflectate şi un *coeficient de reflexie pentru curenţi*, ca raportul între transformatele curentului incident şi reflectat. Astfel, utilizînd (3) pentru variabilele incidente şi reflectate, obţinem :

$$\rho = \frac{V_r}{V_i} = \frac{V - rI}{V + rI} = \frac{Z - r}{Z + r} = \frac{Z/r - 1}{Z/r + 1} = \frac{gZ - 1}{gZ + 1} = \frac{gV - I}{gV + I} = \frac{I_r}{I_i}. \tag{4}$$

Unele etape din această secvenţă utilizează $V = ZI$. La fel ca şi impedanţa Z, care poate să caracterizeze comportarea uniportului şi coeficientul de reflexie poate să-l caracterizeze complet. Există o corespondenţă biunivocă între Z şi ρ dată de transformarea bilineară $\rho = (Z - r)(Z + r)^{-1}$. Observăm că, coeficienţii de reflexie pentru tensiuni şi curenţi sînt aceiaşi. Trebuie subliniat totuşi, că aceasta este adevărat numai în cazul considerat şi anume la o impedanţă reală a sursei. Cînd în continuare vom lua în consideraţie cazul general, vom găsi că cei doi coeficienţi de reflexie sînt diferiţi.

Conceptele de propagare a undelor pe care le-am utilizat în discuţia precedentă sînt artificiale în cazul circuitelor cu elemente concentrate. Cu toate acestea, este posibil să considerăm (3), ca definiţii formale ale variabilelor V_i, V_r, şi I_i, I_r, fără să ataşăm vreo semnificaţie interpretativă acestor mărimi, care reflectă originea lor în mod intuitiv. În dezvoltare am utilizat r ca impedanţă caracteristică. Totuşi, această idee nu este necesară în definiţiile exprimate prin (3) şi (4) ; r este pur şi simplu un număr arbitrar, real şi pozitiv care are dimensiuni de impedanţă.

Este de fapt posibil, să se introducă tensiunile incidente şi reflectate într-un mod diferit. Să considerăm din nou uniportul din figura 8.1 ; acesta este caracterizat prin două variabile V şi I. În locul acestora se poate utiliza, ca set la fel de adecvat, o combinaţie lineară a acestor variabile. Astfel transformarea :

$$V_i = a_{11} V + a_{12} I \, , \qquad V_r = a_{21} V + a_{22} I \tag{5}$$

defineşte două noi variabile V_i şi V_r, în funcţie de cele dinainte V şi I. Coeficienţii transformării trebuie aleşi astfel, încît noile variabile să devină convenabile pentru utilizare. Alegerea $a_{11} = a_{21} = \frac{1}{2}$ şi $a_{12} = - a_{22}$ va face ca (5), să se reduă la (3). Alte valori alese pot să conducă la formulări suplimentare, care pot să fie, sau să nu fie, utile pentru diferite aplicaţii.

Este posibil să se interpreteze variabilele incidente şi reflectate, referindu-ne la situaţia arătată în figura 8.1*c*, în care uniportul este adaptat cu impedanţa reală a sursei. În acest caz $V = rI$. Prin urmare, din (3a) găsim că :

$$V_i = V, \quad I_i = I \tag{6}$$

cind avem adaptare. Aceasta ne arată că, *dacă uniportul este adaptat la bornele sale, tensiunea la borne este V_i iar curentul este I_i*. Prin urmare in condiţii de adaptare, (3b) ne arată că $V_r = 0$ şi $I_r = 0$; din figura 8.1 *c*, observăm că

$$V_i = \frac{1}{2} V_g \, . \tag{7}$$

Din (4) se observă că, în condiţii de adaptare, coeficientul de reflexie este zreo.

Cînd uniportul nu este adaptat, V_r şi ρ nu se anulează. De fapt (1) poate fi scris în forma următoare

$$V_r = V - V_i \, , \tag{8a}$$

$$I_r = I_i - I \; ; \tag{8b}$$

adică, tensiunea reflectată, V_r este o măsură a deviaţiei tensiunii uniportului, în condiţii de lucru reale, faţă de valoarea sa la adaptare. În mod, similar, I_r este o măsură a deviaţiei curentului, în condiţii de lucru, faţă de valoarea sa la adaptare. Se remarcă uşoara asimetrie în sensul că o deviaţie este pozitivă şi alta este negativă.

Variabile normate. Normare reală

În discuțiile precedente s-au utilizat două perechi de variabile: tensiuni incidente și reflectate și curenți incidenți și reflectați. Deoarece așa cum rezultă din (2), aceste mărimi sînt în perechi proporționale, este suficient să considerăm o variabilă incidentă și o variabilă reflectată. În loc să alegem ca variabilă tensiunea, sau curentul vom utiliza variabile normate, legate de ambele.

Variabilele *normate* incidente și reflectate sînt definite în modul următor:

$$a(s) = \sqrt{r}\, I_i(s) = \frac{V_i(s)}{\sqrt{r}}, \tag{9a}$$

$$b(s) = \sqrt{r}\, I_r(s) = \frac{V_r(s)}{\sqrt{r}}. \tag{9b}$$

Vom numi *a* și *b variabile de repartiție.*

Utilizînd (3), aceste noi variabile pot fi exprimate în funcție de tensiuni și curenți astfel:

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}\left(r^{-1/2}\, V + r^{1/2} I\right), \\ b &= \tfrac{1}{2}\left(r^{-1/2}\, V - r^{1/2} I\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Rădăcina patrată din r, care apare în dreapta acestor expresii, este incomodă. Pentru a o elimina se definesc tensiunea normată V_n și curentul normat I_n:

$$V_n = r^{-1/2}\, V, \tag{11a}$$

$$I_n = r^{1/2} I. \tag{11b}$$

Atunci variabilele de repartiție devin:

$$a = \tfrac{1}{2}(V_n + I_n), \tag{12a}$$

$$b = \tfrac{1}{2}(V_n - I_n). \tag{12b}$$

Observînd relația (4) se constată invariația coeficientului de reflexie în raport cu normarea. Astfel

$$\rho = \frac{V_r}{V_i} = \frac{a}{b} = \frac{V_n - I_n}{V_n + I_n} = \frac{Z_n - 1}{Z_n + 1} = \frac{Z - r}{Z + r}, \tag{13}$$

unde $Z_n = Z/r$ este impedanța normată.

Reciproc, tensiunea normată, curentul şi impedanţa pot fi exprimate în funcţie de variabilele de repartiţie şi de coeficientul de reflexie, inversînd (12) şi (13). Astfel:

$$V_n = a + b\,, \tag{14a}$$

$$I_n = a - b\,, \tag{14b}$$

$$Z_n = \frac{1+\rho}{1-\rho} = (1+\rho)(1-\rho)^{-1}. \tag{14c}$$

Circuit mărit

Normarea utilizată mai înainte poate fi interpretată referindu-ne la circuitul arătat în fig. 8.2. Valoarea normată a rezistenţei sursei este 1. Transformatul ideal, cu raport de transformare $1:\sqrt{r}$, conduce la ecuaţiile adecvate între tensiunile şi curenţii care apar în secundar şi tensiunile şi curenţii normaţi din primar. Uniportul iniţial, conectat în cascadă cu transformatorul poate fi numit uniport normat (fig. 8.2 a). Dacă uniportul iniţial este adaptat cu r, aceasta este echivalent cu adaptarea uniportului normat cu unitatea. Din cauza funcţiunii de normare pe care o îndeplineşte, r este numit *număr de normare* sau *rezistenţă de referinţă.* În caz că numărul de normare este unitar, transformatorul ideal, care rezultă cu raportul 1 :1, poate să fie omis în figura 8.2.

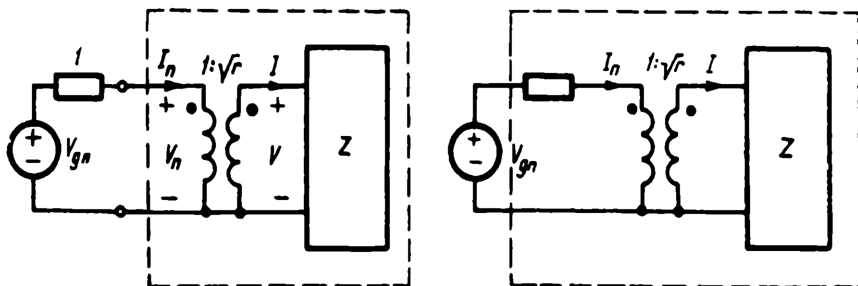


Fig. 8.2. (*a*) Circuit normat; (*b*) circuit normat mărit.

Este evident că, dacă uniportul este adaptat, impedanţa de intrare în primarul transformatorului este o rezistenţă unitară. Cum $V_n = I_n$; din (12), aceasta înseamnă $a = V_n$ şi $b = 0$. Astfel, în condiţii de adaptare, variabila de repartiţie incidentă este egală cu tensiunea normată şi variabila de repartiţie reflectată este nulă. Mai departe, avînd sursa de tensiune

normată, definită ca : $V_{gn} = r^{-1/2}\ V_g$, constatăm că legătura dintre V_g și V_i, dată în (7) este invariantă în raport cu normarea. Astfel;

$$a = \frac{1}{2} V_{gn} \tag{15}$$

Putem să mergem mai depare, incluzînd rezistența serie unitară în interiorul circuitului normat, așa cum se arată în figura 8.2*b*. Astfel se obține un circuit numit ***circuitul normat mărit*** (de tip serie). Desigur este posibil ca circuitul inițial să fie mărit prin înserierea rezistenței *r*, fără a se face normarea. Ceficientul de reflexie al circuitului inițial poate fi exprimat în funcție de admitanța Y_a, a circuitului mărit sau Y_{an} a circuitului mărit, normat. Din figura 8.2 rezultă clar că se poate scrie :

$$Y_a = \frac{I}{V_g} = \frac{1}{Z + r}, \qquad Y_{an} = \frac{I_n}{V_{gn}} = \frac{r}{Z + r} = rI_a \cdot$$

Deci

$$\rho = \frac{Z - r}{Z + r} = \frac{Z + r - 2r}{Z + r} = 1 - \frac{2r}{Z + r}$$

sau

$$\rho = 1 - 2rY_a = 1 - 2Y_{an}. \tag{16}$$

(În dezvoltare *r* a fost adunat și scăzut la numărător). Aceasta este o expresie utilă. Adesea (16) poate fi cea mai simplă formă pentru calculul coeficientului de reflexie.

Ca un exemplu, să considerăm situația arătată în fig. 8.3.

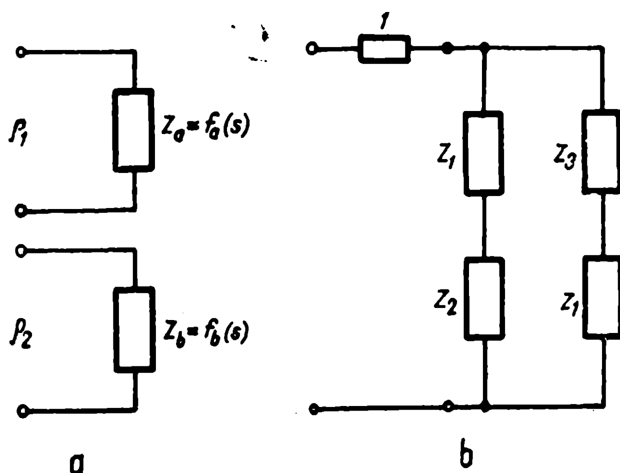


Fig. 8.3. Exemplu ilustrativ.

Doi uniporți avînd impedanțele date de: $Z_a = f_a(s)$ și $Z_b = f_b(s)$, au coeficienții de reflexie ρ_1 și ρ_2, respectiv. Se cere să se găsească coeficientul uniportului arătat în figura 8.3 b în funcție de ρ_1 și ρ_2. Deoarece ρ este invariant în raport cu normarea, să considerăm numărul de normare unitar și să considerăm circuitul mărit. Admitanța de intrare mărită poate fi scrisă imediat în modul următor:

$$Y_a = \frac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{f_a(s) + \cfrac{1}{f_b(s)}} + \cfrac{1}{f_b(s) + \cfrac{1}{f_a(s)}}}} = \frac{1}{1 + \cfrac{1 + f_a f_b}{f_a + f_b}}$$

$$= \frac{f_a + f_b}{f_a f_b + f_a + f_b + 1} = \frac{f_a + f_b}{(f_a + 1)(f_b + 1)}.$$

Deci, utilizînd (16) obținem

$$\rho = 1 - 2Y_a = 1 - \frac{2(f_a + f_b)}{(f_a + 1)(f_b + 1)} = \frac{(f_a - 1)(f_b - 1)}{(f_a + 1)(f_b + 1)},$$

$$\rho = \rho_1 \rho_2$$

Este clar că pentru acest exemplu, coeficientul de reflexie al întregului circuit este exprimat mai simplu prin coeficienții de reflexie ai circuitelor componente, decît este exprimată admitanța globală prin admitanțele componente.

Coeficient de reflexie pentru un circuit invariant în timp, pasiv și reciproc

Proprietățile analitice ale funcției $\rho(s)$, pentru un circuit invariabil in timp pasiv și reciproc, pot fi obținute cu ajutorul relației (13). Pentru un astfel de circuit, $Z_n(s)$ este o funcție real-pozitivă de s. O funcție real-pozitivă $Z_n(s)$, transformă axa $j\omega$ a planului s în domeniul închis format din semiplanul drept al planului Z_n. Ecuația (13) este o transformare biliniară (vezi Anexa 2). Transformarea biliniară transformă domeniul închis al planului Z_n, în interiorul sau conturul cercului cu raza unitate din planul ρ. Prin urmare, dacă $s=j\omega$, punctele corespunzătoare sînt situate în interiorul sau pe contul cercului unitar din planul ρ. Astfel

$$\rho\,|(j\omega)| \leqslant 1. \tag{17}$$

Cît despre polii funcției $\rho(s)$, aceștia sînt dați de zerourile funcției $Z_n(s) + 1$. Acestea nu pot să existe în domeniul semiplanului drept închis, din Z_n, deoarece aceasta ar cere ca $\mathrm{Re}Z_n = -1$, pentru un punct din semiplanul drept închis, ceea ce este imposibil pentru o funcție real-pozitivă. Deci $\rho(s)$ este o funcție regulată în semiplanul drept închis. Constatăm că nu se poate transfera condiția de funcție real-pozitivă a impedanței, asupra coeficientlui de reflexie.

O *funcție real-limitată* $\rho(s)$ a fost definită, în capitolul 7, ca o funcție care este : (1) reală la s real (2) regulată în semiplanul drept închis și (3) $|\rho(j\omega)| \leqslant 1$ pentru orice ω.

Discuția precedentă a arătat că, *pentru un circuit invariant în timp, pasiv și reciproc coeficientul de reflexie este o funcție real-limitată.*

Relații pentru putere

Am văzut că variabilele de repartiție au o semnificație specială, în descrierea transferului de putere, de la o sursă, la o sarcină. Vom discuta acum relațiile pentru putere în circuitul din figura 8.1 în funcție de variabilele de repartiție. Să considerăm condițiile regimului permanent sinusoidal. Puterea complexă debitată uniportului este $W = V(j\omega)\,\bar{I}(j\omega)$. Ce se întîmplă cu această expresie dacă tensiunea și curentul se normează ca în (11) ?

În ipoteza că r este un număr real, răspunsul este : nu se întîmplă nimic. Chiar dacă se introduce normarea avem :

$$W = V_n(j\omega)\,\bar{I}_n(j\omega) \tag{18}$$

Acum putem să introducem (14), pentru a exprima acest rezultat prin intermediul variabilelor de repartiție. Puterea reală va fi

$$\begin{aligned} P = Re\, W = Re\,(a + b)\ (\overline{a - b}) &= |a(j\omega)|^2 - |b(j\omega)|^2 \\ &= |a|^2(1 - |\rho(j\omega)|^2). \end{aligned} \tag{19}$$

Ultima etapă rezultă din relația $\rho = b/a$.

De aici se pot face cîteva observații. Pătratul modulului are la ambele variabile a și b dimensiuni de putere. Deci, ***dimensiunile variabilelor de repartiție sînt rădăcini pătrate din putere*** (tensiune x curent)$^{1/2}$. Putem să interpretăm puterea reală transferată uniportului, ca fiind puterea undei incidente, P_i, mai puțin puterea reîntoarsă spre sursă prin unda reflectată, P_r. Desigur, în condiții de adaptare nu există reflexii. Puterea transferată în aceste condiții, fie aceasta P_m, este puterea maximă ce se poate obține de la sursa cu rezistența serie r. Această putere se determină simplu din figura 1c ca fiind

$$P_m = \frac{|V_g|^2}{4r} = \frac{|r^{-1/2}\,V_g|^2}{4} = \frac{|V_{gn}|^2}{4} = |a|^2. \tag{20}$$

Ultima etapă decurge din (15). Cu aceste ipoteze (19) se poate transcrie în forma :

$$P = P_i - P_r$$

iar

$$\frac{P}{P_m} = 1 - |\rho(j\omega)|^2, \tag{21}$$

unde $P_i = |a|^2$ şi $P_r = |b|^2$. Acest rezultat este extrem de important. Termenul din dreapta precizează, care este fracţiunea din puterea maximă posibilă, care este într-adevăr debitată uniportului. Dacă nu există reflexii ($\rho = 0$) această fracţiune este unitară.

Pentru un uniport pasiv, puterea debitată nu poate să depăşească puterea maximă posibilă; rezultă că, $P/P_m \leqslant 1$. Prin urmare

$$|\rho(j\omega)| \leqslant 1 \text{ (pentru un uniport pasiv)} \tag{22}$$

8.2. RELAŢII DE REPARTIŢIE ALE UNUI MULTIPORT

Aşa cum s-a discutat în paragraful precedent, parametrii de repartiţie sînt deosebit de utili în descrierea transferului de putere. Cea mai simplă situaţie de acest gen, este cea pe care am discutat-o şi anume, transferul puterii de la o sursă cu o impedanţă internă, la o sarcină. Mult mai frecvent este transferul de la o sursă la sarcină, printr-un circuit de cuplare, aşa cum se arată în fig. 8.4 Circuitul N poate să fie un filtru sau,

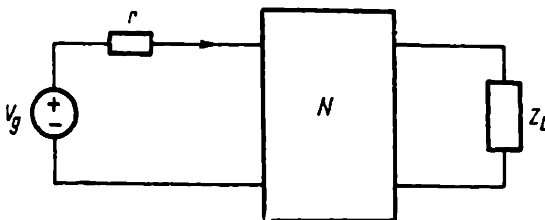


Fig. 8.4. Circuit diport pentru filtrare sau adaptare.

un egalizor de adaptare. Sarcina poate să fie pasivă, reală sau complexă, sau putem avea o sarcină activă (de exemplu o diodă tunel). Mai general, circuitul de cuplare este un multiport de transmitere a puterii, de la una sau mai multe porţi, la alte porţi (una sau mai multe).

Vom studia în detaliu situaţia reprezentată în fig. 8.5. Un multiport este terminat la fiecare poartă cu o rezistenţă *reală* şi pozitivă şi cu

o sursă. Un caz special este diportul arătat în fig. 8.5. *b*. Dezvoltarea relațiilor este o simplă generalizare a cazului cu un uniport, cu observația că relațiile scalare, vor fi acum înlocuite cu matrice. Vom trata cazul general al n-portului, dar vom ilustra amănuntele prin considerarea diportului, pentru a avea o reprezentare mai simplă.

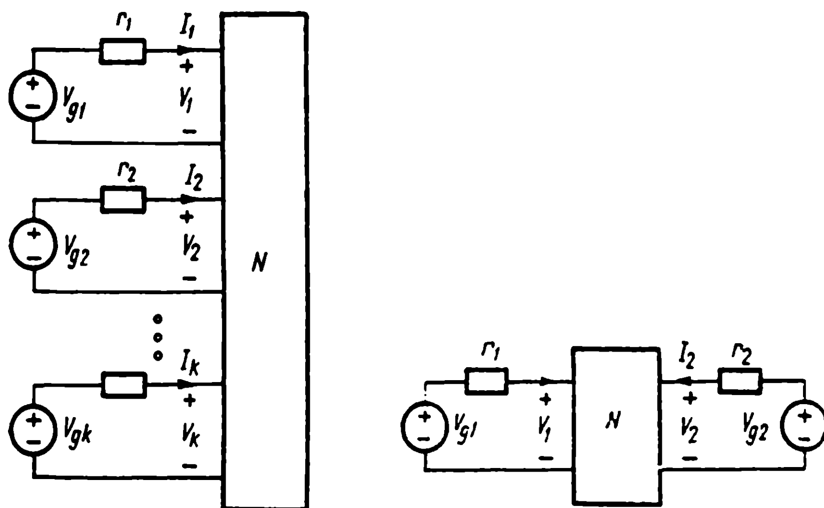


Fig. 8.5. Multiporți cu numere de normare reale.

Pentru început vom defini vectorul variabilelor astfel:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_k \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_k \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{V}_g = \begin{bmatrix} V_{g1} \\ V_{g2} \\ \vdots \\ V_{gk} \end{bmatrix} \tag{23}$$

și matricea diagonală

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & r_2 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & r_3 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots r_k \end{bmatrix} \tag{24}$$

Matricea r este nesingulară şi definită pozitiv deoarece s-a presupus că toţi r_j sînt pozitivi. Conform figurii 8.5. se poate scrie

$$\mathbf{V}_g = \mathbf{V} + \mathbf{rI} = (\mathbf{Z}_{oc} + \mathbf{r})\mathbf{I}, \tag{25}$$

relaţie în care $\mathbf{Z}_{oc}$ este matricea de gol a multiportului N. Să presupunem acum că la fiecare din porţi multiportul este adaptat la rezistenţa sursei. Aceasta înseamnă că raportul V_j/I_j este egal cu rezistenţa r_j la poarta j. Matriceal, aceasta înseamnă $\mathbf{V} = \mathbf{rI}$, sau $\mathbf{Z}_{oc} = \mathbf{r}$, atunci cînd multiportul este adaptat. Prin analogie cu cazul uniportului, introducem vectorul tensiunilor incidente, $\mathbf{V}_i$ şi vectorul curenţilor incidenţi, $\mathbf{I}_i$ ca fiind vectorul tensiunilor la porţi şi respectiv vectorul curenţilor la porţi, atunci cînd toate porţile sînt adaptate; rezultă

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}, \tag{26 a}$$

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{I}, \tag{26 b}$$

şi

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{rI}_i. \tag{26 c}$$

la adaptare.

În mod similar introducem vectorul *tensiunilor reflectate*, $\mathbf{V}_r$ şi vectorul *curenţilor reflectaţi* $\mathbf{I}_r$, ca o deviaţie a vectorului tensiunilor la poartă şi respectiv, a curenţilor la poartă, faţă de valorile la adaptare. Prin analogie cu situaţia de la uniport (8), se poate scrie:

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{V} - \mathbf{V}_i, \tag{27 a}$$

$$\mathbf{I}_r = \mathbf{I}_i - \mathbf{I}. \tag{27 b}$$

Dacă ultimele două perechi de ecuaţii sînt utilizate cu (25), variabilele incidente şi reflectate pot fi scrise ca:

$$\mathbf{V}_i = \tfrac{1}{2}\mathbf{V}_g, \qquad \mathbf{I}_i = \tfrac{1}{2}\mathbf{r}^{-1}\mathbf{V}_g \tag{28}$$

şi

$$\mathbf{V}_i = \tfrac{1}{2}(\mathbf{V} + \mathbf{rI}), \tag{29 a}$$

$$\mathbf{V}_r = \tfrac{1}{2}(\mathbf{V} - \mathbf{rI}), \tag{29 b}$$

$$\mathbf{I}_i = \tfrac{1}{2}\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{V} + \mathbf{rI}), \tag{29 c}$$

$$\mathbf{I}_r = \tfrac{1}{2}\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{V} - \mathbf{rI}). \tag{29 d}$$

Aceste expresii se pot compara cu (7) şi (3) pentru uniport.

Matricea de repartiție

În cazul uniportului s-a definit un coeficient de reflexie, relativ la tensiunea reflectată și incidentă și un altul, relativ la curentul reflectat și incident. Aceștia s-au dovedit a fi egali cu același coeficient de reflexie, a cărui valoare este invariantă în raport cu normarea. În cazul multiportului relația între variabilele reflectate și incidente este o relație matriceală. Definim două relații de acest tip — una pentru tensiuni și una pentru curenți — în modul următor:

$$\mathbf{I}_r = \mathbf{S}_I \mathbf{I}_i , \qquad (30\ a)$$

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{S}_V \mathbf{V}_i , \qquad (30\ b)$$

unde $\mathbf{S}_I$ este *matricea de repartiție a curenților* și $\mathbf{S}_V$ este *matricea de repartiție a tensiunilor*. Aceste matrice pot fi exprimate în funcție de $\mathbf{Z}_{oc}$ și impedanțele de terminație, utilizînd (29) pentru variabilele incidente și reflectate și relația $\mathbf{V} = \mathbf{Z}_{oc}\mathbf{I}$. Calculele de amănunt sînt lăsate pe seama cititorului; rezultatul este următorul:

$$\mathbf{S}_I = \mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Z}_{oc} - \mathbf{r})(\mathbf{Z}_{oc} + \mathbf{r})^{-1}\mathbf{r} = (\mathbf{Z}_{oc} + \mathbf{r})^{-1}(\mathbf{Z}_{oc} - \mathbf{r}), \qquad (31\ a)$$

$$\mathbf{S}_V = (\mathbf{Z}_{oc} - \mathbf{r})(\mathbf{Z}_{oc} + \mathbf{r})^{-1} = \mathbf{r}(\mathbf{Z}_{oc} + \mathbf{r})^{-1}(\mathbf{Z}_{oc} - \mathbf{r})\mathbf{r}^{-1}. \qquad (31\ b)$$

Analizați cu atenție aceste expresii și notați cît de (relativ) simplu este $\mathbf{S}_I$, în care $(\mathbf{Z}_{oc} + \mathbf{r})^{-1}$ *pre*multiplică $(\mathbf{Z}_{oc} - \mathbf{r})$ și cît de (relativ) simplu este $\mathbf{S}_V$ cînd aceasta *post*multiplică $(\mathbf{Z}_{oc} - \mathbf{r})$.

Ce este $(\mathbf{Z}_{oc} + \mathbf{r})$? Aceasta este de fapt matricea de impedanțe a circuitului *mărit*, adică a multiportului din figura 8.5. care include rezistențele în serie la fiecare poartă, ca o parte a multiportului. Inversa. $(\mathbf{Z}_{oc} + \mathbf{r})^{-1}$ este matricea admitanțelor de scurtcircuit a multiportului mărit, pe care o vom nota $\mathbf{Y}_a$. Cei doi coeficienți de reflexie, se determină din (31), în funcție de $\mathbf{Y}_a$ și după cîteva calcule se găsește

$$\mathbf{S}_I = \mathbf{U} - 2\mathbf{Y}_a\mathbf{r}, \qquad (32\ a)$$

$$\mathbf{S}_V = \mathbf{U} - 2\mathbf{r}\mathbf{Y}_a . \qquad (32\ b)$$

Singura diferență, care apare, este aceea că într-un caz $\mathbf{r}$ postmultiplică $\mathbf{Y}_a$ și în alt caz acesta premultiplică $\mathbf{Y}_a$. Fiecare din aceste ecuații poate fi rezolvată în raport cu $\mathbf{Y}_a$. Dacă se egalează cele două expresii pentru $\mathbf{Y}_a$ se găsește o relație între $\mathbf{S}_I$ și $\mathbf{S}_V$:

$$\mathbf{S}_I\mathbf{r}^{-1} = \mathbf{r}^{-1}\mathbf{S}_V . \qquad (33\ a)$$

$$\mathbf{r}\mathbf{S}_I = \mathbf{S}_V\mathbf{r} \qquad (33\ b)$$

Se pare că am ajuns la un impas; apare matricea $\mathbf{r}$ sau $\mathbf{r}^{-1}$ şi încurcă lucrurile. Poate că normarea ne va ajuta. Să privim în urmă, la relaţia (9), pentru a examina cum au fost normate tensiunile şi curenţii incidenţi şi reflectaţi. Să presupunem că procedăm la o normare similară, dar în formă matriceală. Pentru a norma curenţii, multiplicăm cu matricea $\mathbf{r}^{1/2}$; pentru a norma tensiunile multiplicăm cu $\mathbf{r}^{-1/2}$, unde

$$\mathbf{r}^{1/2} = \begin{bmatrix} r_1^{1/2} & & & & & \\ & r_2^{1/2} & & & \bigcirc & \\ & & r_3^{1/2} & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ & \bigcirc & & & & r_k^{1/2} \end{bmatrix} \tag{34}$$

este o matrice reală, diagonală, în care fiecare termen al diagonalei este rădăcina patrată a termenului corespunzător al matricei $\mathbf{r}$. Să vedem ce se întîmplă la multiplicarea ambelor părţi ale (30a) cu $\mathbf{r}^{1/2}$ şi a ambelor părţi ale (30 b) cu $\mathbf{r}^{-1/2}$. Deci

$$\mathbf{r}^{1/2}\mathbf{I}_r = \mathbf{r}^{1/2}\mathbf{S}_I(\mathbf{r}^{-1/2}\mathbf{r}^{1/2})\mathbf{I}_i = (\mathbf{r}^{1/2}\mathbf{S}_I\mathbf{r}^{-1/2})(\mathbf{r}^{1/2}\mathbf{I}_i), \tag{35 a}$$

$$\mathbf{r}^{-1/2}\mathbf{V}_r = \mathbf{r}^{-1/2}\mathbf{S}_V(\mathbf{r}^{1/2}\mathbf{r}^{-1/2})\mathbf{V}_i = (\mathbf{r}^{-1/2}\mathbf{S}_V\mathbf{r}^{1/2})(\mathbf{r}^{-1/2}\mathbf{V}_i). \tag{35 b}$$

Dar să observăm că în (33) — prin multiplicarea şi postmultiplicarea ambelor părţi cu $\mathbf{r}^{1/2}$ — se găseşte

$$\mathbf{r}^{1/2}\mathbf{S}_I\mathbf{r}^{-1/2} = \mathbf{r}^{-1/2}\mathbf{S}_V\mathbf{r}^{1/2} = \mathbf{S}, \tag{36}$$

unde matricea $\mathbf{S}$ se introduce în mod convenabil.

Deoarece $\mathbf{V}_i = \mathbf{r}\mathbf{I}_i$, rezultă că cele două variabile normate din partea dreaptă a relaţiei (35) sînt egale, adică $\mathbf{r}^{-1/2}\mathbf{V}_i = \mathbf{r}^{1/2}\mathbf{I}_i$. În virtutea relaţiei (36) rezultă că, cele două variabile normate din partea stîngă a (35) sînt de asemenea egale.

Avînd discuţiile precedente ca justificare, vom defini *vectorul normat al variabilelor de repartiţie* ca fiind:

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}^{1/2}\mathbf{I}_i = \mathbf{r}^{-1/2}\mathbf{V}_i, \tag{37 a}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}^{1/2}\mathbf{I}_r = \mathbf{r}^{-1/2}\mathbf{V}_r. \tag{37 b}$$

Aceste variabile de repartiție sînt legate prin o *matrice de repartiție* **S**, care este legată de matricele de repartiție ale curenților și tensiunilor prin (36). Astfel:

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}. \tag{38}$$

Legătura cu matricele de impedanță și admitanță

Legătura între această matrice și matricele $\mathbf{Z}_{oc}$ și $\mathbf{Y}_a$ poate fi găsită printr-o pre- și postmultiplicare convenabilă, a relațiilor (32) și (31) prin $\mathbf{r}^{1/2}$ și $\mathbf{r}^{-1/2}$, corelată cu (36). Dacă definim

$$\mathbf{Y}_{an} = \mathbf{r}^{1/2}\mathbf{Y}_a\mathbf{r}^{1/2}, \tag{39 a}$$

$$\mathbf{Z}_n = \mathbf{r}^{-1/2}\mathbf{Z}_{oc}\mathbf{r}^{-1/2}, \tag{39 b}$$

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{r}^{1/2}\mathbf{Y}_{sc}\mathbf{r}^{1/2}, \tag{39 c}$$

unde matricea admitanțelor de scurtcircuit a multiportului, $\mathbf{Y}_{sc}$, este $\mathbf{Z}_{oc}^{-1}$, atunci

$$\mathbf{S} = \mathbf{U} - 2(\mathbf{Z}_n + \mathbf{U})^{-1} = \mathbf{U} - 2\mathbf{Y}_{an}, \tag{40}$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{Z}_n - \mathbf{U})(\mathbf{Z}_n + \mathbf{U})^{-1} = (\mathbf{Z}_n + \mathbf{U})^{-1}(\mathbf{Z}_n - \mathbf{U}) =$$
$$= (\mathbf{U} - \mathbf{Y}_n)(\mathbf{U} + \mathbf{Y}_n)^{-1} = (\mathbf{U} + \mathbf{Y}_n)^{-1}(\mathbf{U} - \mathbf{Y}_n). \tag{41}$$

Calculele de detaliu sînt lăsate pe seama cititorului. Comparați (40) cu (16), care este rezultatul scalar corespunzător pentru uniport.

Legătura între **S** și $\mathbf{Y}_{an}$ arată o proprietate importantă, care nu este evidentă din modul în care a fost obținută. Din cauza rezistențelor serie din circuitul mărit, acest circuit poate avea o matrice de admitanțe, chiar dacă circuitul inițial nu are nici matrice de impedanțe, nici matrice de admitanțe. Aceasta va fi adevărat pentru orice circuit pasiv. Astfel, un avantaj al *parametrilor de repartiție* (cum numim elementele matricei de repartiție) este că aceștia există pentru toate circuitele pasive, chiar pentru acelea la care parametrii de impedanță sau admitanță nu există.

Pentru ilustrare se arată transformatorul ideal din fig. 8.6. Se arată circuitul mărit cu rezistențe unitare la ambele porți. Transformatorul

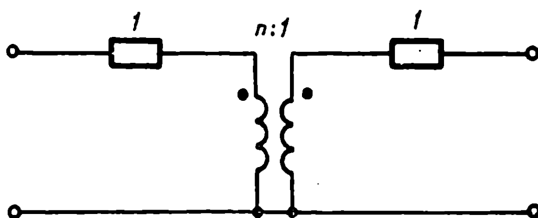


Fig. 8.6. Transformator ideal.

ideal nu are nici matrice de impedanţe, nici matrice de admitanţe. Cu toate acestea circuitul mărit poate fi caracterizat prin admitanţe. Matricea admitanţelor de scurtcircuit poate fi calculată direct şi din (40) se obţine matricea de repartiţie. Calculele de amănunt sînt la latitudinea cititorului; rezultatul va fi

$$\mathbf{Y}_{an} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n^2+1} & \frac{-n}{n^2+1} \\ \frac{-n}{n^2+1} & \frac{n^2}{n^2+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{n^2-1}{n^2+1} & \frac{2n}{n^2+1} \\ \frac{2n}{n^2+1} & -\frac{n^2-1}{n^2+1} \end{bmatrix}.$$

Acesta se reduce la o matrice foarte simplă pentru raportul de transformare $n = 1$.

Să notăm că S_{22} este negativul lui S_{11}. Diporţii care satisfac condiţiile $S_{22} = -S_{11}$ se numesc *antimetrici* prin opoziţie cu diporţii simetrici, pentru care $S_{22} = S_{11}$. (Vezi problemele **P.10** şi **P.11**).

Normarea şi multiportul mărit

Variabilele de repartiţie normate **a** şi **b** pot fi exprimate în funcţie de tensiunile şi curenţii normaţi, aplicînd normarea relaţiei(29). Definind tensiunea şi curentul normat ca, $\mathbf{V}_n = \mathbf{r}^{-1/2}\mathbf{V}$ şi $\mathbf{I}_n = \mathbf{r}^{1/2}\ \mathbf{I}$, aceste ecuaţii şi inversele lor iau formele relativ simple:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{V}_n + \mathbf{I}_n) & \mathbf{V}_n &= \mathbf{a} + \mathbf{b}, \\ \mathbf{b} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{V}_n - \mathbf{I}_n) & \mathbf{I}_n &= \mathbf{a} - \mathbf{b}. \end{aligned} \tag{42}$$

Comparînd acestea cu (12) şi (14) se găseşte că, expresiile pentru variabilele de repartiţie ale multiportului sînt identice cu cele ale uniportului, cu deosebirea că în cazul de faţă, acestea sînt expresii matriceale.

În sfîrşit, să notăm că cele două expresii din (28) care leagă tensiunea incidentă şi curentul cu $\mathbf{V}_g$, se reduc, după normare, la o relaţie simplă.

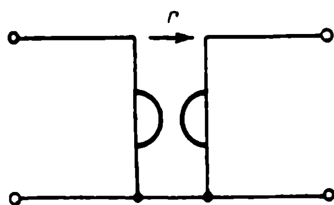
$$\mathbf{a} = \tfrac{1}{2}\mathbf{V}_{gn}. \tag{43}$$

Normarea poate fi interpretată din nou, conectînd transformatoare ideale la porţi. Aceasta se ilustrează pentru un diport în figura 8.7. Rapoartele de transformare ale transformatoarelor sînt $1 : \sqrt{r_1}$ şi $1 : \sqrt{r_2}$. Acestea conduc la relaţii potrivite între tensiunile şi curenţii reali şi valorile

normate. Circuitul total, care include transformatoarele se numește circuit normat. Chiar dacă rezistențele de referință la porți sînt diferite, condițiile de adaptare corespund unei rezistențe unitare la fiecare poartă. Dacă includem o rezistență în serie unitară la fiecare poartă, circuitul total este circuitul mărit (normat), așa cum este arătat în figura 8.7*b*.

Fig. 8.7. Diport normat și mărit.

Cum sînt alese numerele r_j de normare la porți? În exemplul cu transformatorul ideal, de pildă, ce ne-a condus la alegerea numărului de normare unitar pentru ambele porți? Răspunsul la această întrebare este simplu: comoditatea calculelor. Dacă circuitul va lucra în realitate, cu anumite rezistențe de terminație, desigur va fi avantajos și expresiile rezultante se vor simplifica, dacă aceste rezistențe vor fi alese ca numere de normare. În alte cazuri, alegerea unor parametri din circuit ca numere de normare conduce la simplificări. Să considerăm, de exemplu, giratorul arătat în figura 8.8. Acesta are o reprezentare prin matricea de impedan-



$$Z_{oc} = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix}$$

Fig. 8.8. Girator.

ţe care conţine rezistenţa de giraţie r. Dacă numerele de normare la porţi r_1 şi r_2 vor fi alese pentru ambele porţi egale cu $\mathbf{r}$, matricea $\mathbf{Z}_n$ poate fi scrisă foarte simplu. Ecuaţia (40) conduce atunci la matricea de repartiţie. Astfel:

$$\mathbf{Z}_n = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-r}{\sqrt{r_1 r_2}} \\ \dfrac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{U} - 2(\mathbf{U} + \mathbf{Z}_n)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8.3. MATRICEA DE REPARTIŢIE ŞI TRANSFERUL DE PUTERE

Discuţia de mai înainte a condus la stabilirea metodelor de a găsi parametrii de repartiţie ai unui multiport, din matricea sa de impedanţe sau de admitanţe, sau din matricea de admitanţe a circuitului mărit. Dar parametrii de repartiţie apar în relaţiile dintre variabilele de repartiţie de incidenţă şi de reflexie. Vom analiza acum mai în amănunt ce reprezintă aceste relaţii. Pentru simplificare vom trata cazul diportului, pentru care avem relaţiile:

$$b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2, \tag{44a}$$

$$b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2. \tag{44b}$$

Vom presupune că terminaţiilor diportului sînt arbitrare şi că la fiecare poartă pot să existe semnale aplicate aşa cum se arată în figura 8.9.

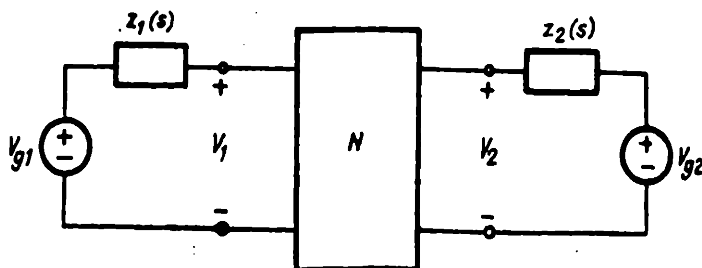


Fig. 8.9. Diport cu sarcini arbitrare.

Interpretarea parametrilor de repartiție

Din (44) rezultă că, parametrii de repartiție pot fi interpretați astfel:

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1}\bigg|_{a_2=0}, \quad S_{12} = \frac{b_1}{a_2}\bigg|_{a_1=0}, \tag{45}$$

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1}\bigg|_{a_2=0}, \quad S_{22} = \frac{b_2}{a_2}\bigg|_{a_1=0}.$$

Constatăm că fiecare parametru este raportul între o variabilă reflectată și una incidentă, în condiții de anulare a variabilei de incidență la cealaltă poartă. Ce înseamnă anularea unei variabile incidente, fie aceasta de exemplu a_2? La aceasta se poate răspunde imediat referindu-ne la (42) sau, în mod echivalent, la (29), care leagă variabilele de repartiție de tensiuni și curenți. Astfel $a_2 = 0$, înseamnă $V_{n2} = - I_{n2}$, sau $V_2 = - r_2 I_2$. Să privim acum figura 8.9. Condiția $V_2 = - r_2 I_2$ înseamnă că poarta *2* este terminată cu r_2 (mai curînd decît cu impedanța Z_2) și că aici nu există sursă de tensiune: adică, *poarta 2 este adaptată*. Mai departe, dacă nu există variabilă incidentă și $V_2 = -r_2 I_2$, (29*b*), ne arată că tensiunea reflectată este tensiunea totală la această poartă ($V_{r2} = V_2$), iar (29 *d*) ne arată că și curentul reflectat este curentul total ($I_{r2} = I_2$). Un sens similar este atașat și condiției $a_1 = 0$.

Astfel, parametrii de repartiție a unui diport sînt definiți prin rapoarte ale variabilelor reflectate și incidente, cînd cealaltă variabilă incidentă este nulă — ceea ce înseamnă că cealaltă poartă este *terminată adaptat*. Mai concret, să-i considerăm pe S_{11}. Acesta este raportul variabilei reflectate pe cea incidentă, la poarta 1, (b_1/a_1), atunci cînd poarta *2* este adaptată. Să substituim acum în raportul b_1/a_1, ecuația scalară pentru poarta *1*, care se obține din (42). Avem:

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{V_{n1}-I_{n1}}{V_{n1}+I_{n1}} = \frac{Z_{n1}-1}{Z_{n1}+1} = \frac{Z_1-r_1}{Z_1+r_1}, \tag{46}$$

unde Z_{n1} este impedanța normată la poarta 1[1]). Comparînd această relație cu (13), care dă coeficientul de reflexie al unui uniport, vedem că S_{11} este coeficientul de reflexie la poarta 1, atunci cînd cealaltă poartă este adaptată. O concluzie similară se obține și pentru S_{22}.

Să analizăm acum termenii din diagonala secundară, în particular S_{21}. Cînd $a_2 = 0$, așa cum am menționat deja, $b_2 = V_{n2}$, sau $V_{r2} = V_2$. Prin urmare, din (43), $a_1 = V_{gn1}/2$ Rezultă:

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1}\bigg|_{a_2=0} = \frac{V_{n2}}{V_{gn1}/2} = 2\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\,\frac{V_2}{V_{01}}. \tag{47}$$

---

[1]) Z_1 din (46) este în acest caz impedanța imagine la poarta *1*, iar S_{11} reprezintă coeficientul de neadaptare la poarta *1*, definit prin intermediul parametrilor imagini ai diportului (N.T.).

Astfel S_{21} apare proporțional cu cîștigul de tensiune, un cîștig al tensiunii *de întoarcere*. Prin fig. 8.10 se prezintă o lămurire suplimentară. Aici diportul a fost înlocuit cu un transformator ideal avînd un raport de transfor-

$$V_1' = \frac{V_{g1}'}{2}$$

$$V_1' = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}\, V_1' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}\, V_{g1}$$

$$\frac{V_2}{V_2'} = 2\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\, \frac{V_2}{V_{g1}} = S_{21}$$

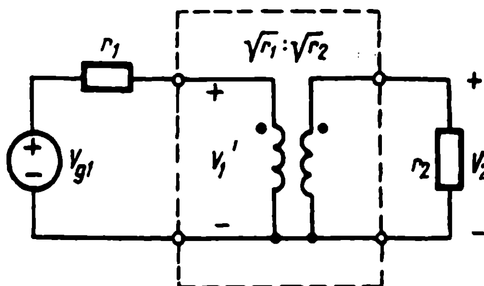


Fig. 8.10. Raportul transductic de tensiune.

mare astfel, încît rezistența r_2 devine adaptată cu r_1. Tensiunea la ieșire este notată, în aceste condiții cu V_2'. Considerînd acum raportul între tensiunea reală de ieșire V_2 și V_2', se obține așa numitul *raport transductic de tensiune*. Calculele indicate pe figură, arată că acesta este tocmai membrul drept al relației (47). Prin urmare S_{21} este *raportul transductic al tensiunii de întoarcere*. Cînd sursa este adaptată ca în fig. 8.10, aceasta va debita în circuit, la bornele sale (anume în primarul transformatorului) puterea maximă. Aceasta este $P_{m1} = |V_{g1}|^2/4r_1$.

Să revenim la cazul inițial. Puterea transferată sarcinii prin circuitul N, cînd aceasta este adaptat și cînd la poarta *2* tensiunea este V_2, va fi $P_2 = |V_2| r_2$. Prin urmare, pătratul modulului lui S_{21}, din (47) va fi;

$$|S_{21}(j\omega)|^2 = 4\,\frac{r_1}{r_2}\,\frac{|V_2(j\omega)|^2}{|V_{g1}(j\omega)|^2} = \frac{P_2}{P_{m1}} = \mathcal{G}(\omega^2) \tag{48}$$

Astfel, pătratul modulului lui S_{21}, care este numit adesea *cîștig transductic de putere*, $\mathcal{G}(\omega^2)$, este de fapt raportul dintre puterea care se obține în sarcină și puterea maximă pe care o poate debita generatorul, atunci cînd ambele porți sînt adaptate [1]). O discuție similară se poate purta și despre S_{21}, *inversul raportului transductic de tensiune*. (Variabila este considerată ω_2, pentru că $\mathcal{G}$ este o funcție pară de frecvență).

După o simplă transformare a relației (48) se obține $|S_{21}|^2 = |V_{n2}|^2|V_{gn1}/2|^2$. Acesta este de fapt cîștigul transductic de putere al

---

[1]) Atragem atenția cititorilor familiarizați cu teoria clasică a diporților că atenuarea compusă, a_c, cunoscută din teoria diporților, poate fi exprimată prin $|S_{21}(j\omega)|^2$ cu relația:

$$a_c = \ln \frac{1}{|S_{21}(j\omega)|^2}\,.$$

în ipoteza că terminațiile diportului sînt rezistive. (N.T.)

circuitului normat. În concluzie, cîştigul transductic de putere nu se modifică prin normare. Atunci cînd un diport este inserat între două terminaţii rezistive, este raţional să se utilizeze terminaţiile ca rezistenţe de referinţă ; coeficientul de transmisie S_{21} descrie direct proprietăţile circuitului legat de transferul de putere.

Parametrii de repartiţie ai unui multiport pot să fie interpretaţi în mod similar, fără a se intra în detalii. Parametrii din diagonala principală a matricei S vor fi coeficienţi de reflexie.
Astfel

$$S_{jj} = \frac{b_j}{a_j}\bigg|_{\substack{\text{toţi ceilalţi} \\ a_k=0}} = \frac{Z_j - r_j}{Z_j + r_j} \tag{49}$$

este coeficientul de reflexie la poarta j atunci cînd toate celelalte porţi sînt adaptate, adică terminate pe rezistenţele lor de referinţă.

Parametrii care nu fac parte din diagonala principlă se numesc *coeficienţi de transmisie* prin contrast cu coeficienţii de reflexie. Aceştia sînt daţi de

$$S_{ij} = \frac{b_i}{a_j}\bigg|_{\substack{\text{toţi ceilalţi} \\ a_k=0}} = 2\sqrt{\frac{r_j}{r_i}}\,\frac{V_i}{V_{gj}}. \tag{50}$$

Printr-o analiză ca şi cea care a condus la (48), se poate stabili că patratul coeficientului de transmisie este raportul dintre puterea în sarcină la o poartă şi puterea maximă, ce se poate obţine de la sursa de la o altă poartă, atunci cînd porţile sînt adaptate. Astfel

$$|S_{ij}|^2 = \frac{4r_j}{r_i}\,\frac{|V_i|^2}{|V_{gj}|^2} = \frac{P_i}{P_{mj}}. \tag{51}$$

Să considerăm, pentru exemplificare circuitul din fig. 8.11. Aici este prezentat un triport, obţinut cu un girator la care se consideră o

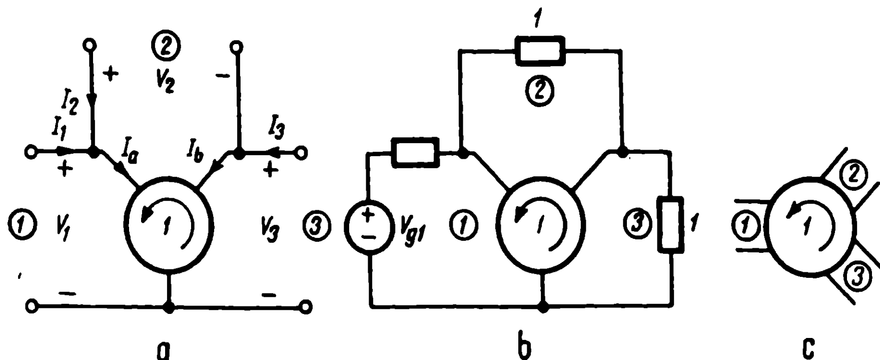


Fig. 8.11. Giratorul ca circulator cu trei porţi.

poartă exterioară (simbolul arătat pentru girator a fost menţionat în problema 3 din capitolul 3). Ne propunem să găsim matricea de repartiţie a triportului şi să interpretăm elementele sale. Să considerăm rezistenţa de giraţie unitară. Aceasta înseamnă că alegem numerele de normare a porţilor, egale cu rezistenţa de giraţie. În acest caz, ecuaţiile giratorului sînt:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix}.$$

Dar $I_a = I_1 + I_2$, $I_b = I_3 - I_2$ şi $V_2 = V_1 - V_3$, aşa cum se poate observa în figura 8.11. Cu acestea avem

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}.$$

Matricea coeficienţilor este în această ecuaţie $\mathbf{Z}_n$. Matricea de repartiţie se poate obţine din (41). Rezultatul este:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{aligned} b_1 &= a_2, \\ b_2 &= -a_3 \\ b_3 &= a_1. \end{aligned} \tag{52}$$

Acest rezultat este foarte interesant. În primul rînd se constată că elementele diagonalei sînt toate nule. Prin urmare, coeficienţii de reflexie sînt nuli la toate porţile, adică toate porţile sînt adaptate. Cît despre coeficieţii de transmisie, să presupunem că avem situaţia din figura 8.11*b* în care există semnal numai la poarta 1 şi toate cele trei porţi sînt adaptate. Rezultă că $V_2 = -I_2$ şi $V_3 = -I_3$. Din (28) şi (37) găsim $a_1 = V_{i1} = V_{g1}/2$ şi $a_2 = a_3 = 0$; din (32) $b_1 = b_2 = 0$ şi $b_3 = V_{g1}/2$. Dar $b_3 = V_{r3} = V_3$; prin urmare puterea din sarcină de la poarta *3*, la care avem adaptare, este

$$P_3 = |V_3|^2 = \frac{|V_{g1}|^2}{4} = P_{m1}.$$

În concluzie, dacă se aplică un semnal incident la poarta 1 şi toate porţile sînt adaptate, la poarta *2* nu se reflectă nimic ($b_1 = 0$) şi nu se transmite nimic) $b_2 = 0$), ci totul este transmis, fără pierderi, la poarta *3*, unde se obţine puterea maximă posibilă debitată de sursa de la poarta *1*.

Pentru celelalte direcţii de transmisie se obţine din relaţia (52) concluzii similare şi anume: un semnal incident la partea *2* este transmis în întregime porţii *1*, iar un semnal incident la poarta *3* este transmis în

întregime la poarta 2. În acest ultim caz, din cauza semnului negativ $b_2 = -a_2$, există o inversare a fazei tensiunii, dar puterea transmisă nu este afectată.

Triportul din figura 8.11 are proprietăţi ciclice de transmisie a puterii. Puterea care intră la o poartă, se transmite în ordine ciclică spre o poartă adiacentă, aşa cum arată săgeata circulară. Un multiport cu astfel de proprietăţi se numeşte *circulator* şi are pentru triport simbolul din figura 8.11 *c*, cu ordinea ciclică 132. Desigur există şi un circulator cu ordine ciclică opusă (123). Matricea de repartiţie care îi corespunde trebuie să fie de forma

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{13} \\ S_{21} & 0 & 0 \\ 0 & S_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{j\theta_1} \\ e^{j\theta_2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\theta_3} & 0 \end{bmatrix}$$

unde $|S_{13}| = |S_{21}| = |S_{32}| = 1$. La o singură frecvenţă, argumentul parametrilor nenuli poate avea orice valoare fără să influenţeze puterea transmisă şi acest lucru este specificat prin matricea a doua. În cazul cel mai simplu toate argumentele sînt nule şi parametrii de repartiţie nenuli sînt unitari. Mai general, fiecare din coeficienţii de transmisie nenuli poate fi o funcţie trece-tot.

Se constată odată în plus, că normarea efectuată în (37) este perfect justificată şi de faptul că, parametrii de repartiţie sînt legaţi într-un mod adecvat de transmisia puterii şi de coeficientul de reflexie. În (37) normarea a fost introdusă pentru a se ajunge la o singură matrice de repartiţie, în loc de a avea două bazate pe tensiuni şi curenţi. Aceste interpretări simple ale parametrilor de repartiţie, în funcţie de puterea transmisă şi de reflexii, nu ar fi fost posibile, dacă am fi continuat să operăm cu oricare din matricele de repartiţie a tensiunilor sau curenţilor.

8.4. PROPRIETĂŢI ALE MATRICEI DE REPARTIŢIE

Deoarece parametrii de repartiţie au o interpretare fizică, strîns legată de putere, procesele de transmitere a puterii se exprimă în mod convenabil în funcţie de parametrii de repartiţie. Să presupunem un multiport cu impedanţe de terminaţie arbitrare, conectate în serie cu sursele de tensiune, ca în figura 8.5, cu singura deosebire că terminaţiile sînt

arbitrare. Puterea în complex, aplicată multiportului, în regim sinusoidal, va fi $W = \mathbf{V}^*\mathbf{I}$, unde $\mathbf{V}^*$este complex-conjugata, transpusă, a matricei $\mathbf{V}$. Dacă se fac unele calcule de amănunt, înlocuind variabilele normate cu cele reale, se găseşte că expresiile pentru putere sînt invariabile în raport cu normarea. Astfel

$$W = \mathbf{V}^*\mathbf{I}_n = (\mathbf{a}^* + \mathbf{b}^*)(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ = (\mathbf{a}^*\mathbf{a} - \mathbf{b}^*\mathbf{b}) + (\mathbf{b}^*\mathbf{a} - \mathbf{a}^*\mathbf{b}). \quad (53)$$

Aici s-a utilizat (42) înlocuindu-se vectorii de tensiune şi curent normat, cu parametrii de repartiţie. Ultimul termen în paranteza din dreapta este diferenţa a două cantităţi complex-conjugate deoarece :

$$(\mathbf{a}^*\mathbf{b}) = (\mathbf{b}^*\mathbf{a})^* = (\overline{\mathbf{b}^*\mathbf{a}}).$$

Ultima egalitate este o consecinţă a faptului că aceste produse matriceale sînt scalari şi transpusa unei matrice scalare este ea însăşi. Dar diferenţa a două cantităţi complex-conjugate este imaginară. Prin urmare puterea reală va fi

$$\mathbf{P} = \mathbf{a}^*\mathbf{a} - \mathbf{b}^*\mathbf{b} = \mathbf{a}^*\mathbf{a} - \mathbf{a}^*\mathbf{S}^*\mathbf{S}\mathbf{a} \\ = \mathbf{a}^*(\mathbf{U} - \mathbf{S}^*\mathbf{S})\,\mathbf{a}. \quad (54)$$

Rezultatul s-a obţinut înlocuind pe $\mathbf{b}$ cu $\mathbf{S}\mathbf{a}$. Această ecuaţie trebuie comparată cu (19) pentru cazul uniportului. Din (54) se pot stabili parametrii de repartiţie pentru diferite clase de circuite. Mai întîi să observăm că partea dreaptă din (54) este o formă patratică. Introducem notaţia :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U} - \mathbf{S}^*\mathbf{S}, \quad (55)$$

astfel încît :

$$\mathbf{P} = \mathbf{a}^*\mathbf{Q}\mathbf{a}. \quad (56)$$

Fără să facem restricţii cu privire la tipul circuitului, să luăm complex — conjugata transpusă a matricei $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q}^* = (\mathbf{U} - \mathbf{S}^*\mathbf{S})^* = \mathbf{U} - \mathbf{S}^*\mathbf{S} = \mathbf{Q} \quad (57)$$

Aşa cum s-a mai menţionat în capitolul 1 o matrice egală cu propria sa complex-conjugată, transpusă, se numeşte ***hermitică***. Astfel $\mathbf{Q}$ este o matrice hermitică. Elementele sale sînt legate prin relaţia $q_{ij} = \bar{q}_{ji}$, care cere ca elementele diagonale să fie reale.

Ne interesează următoarele clase particulare de circuite: active și pasive, reciproce și nereciproce, fără pierderi și cu pierderi. Nu se poate spune nimic deosebit despre circuitele active. Prin urmare ne vom concentra în principal asupra circuitelor pasive, care pot să fie reciproce sau nereciproce. Vom examina mai ales subclasa circuitelor pasive fără pierderi: acestea pot să fie de asemenea reciproce sau nereciproce.

În primul rînd, pentru orice circuit pasiv, puterea reală preluată de multiport, de la sursele sinusoidale, nu poate fi niciodată negativă. Deci:

$$\mathbf{U} - \mathbf{S}^*\mathbf{S} \text{ este semidefinită pozitiv} \tag{58}$$

Aceasta este principala limitare a matricei de repartiție pentru un multiport pasiv. Relația trebuie comparată cu cea din cazul uniportului, (22).

O condiție necesară și suficientă pentru ca o matrice să fie semidefinită pozitiv este ca principalii săi cofactori să fie nenegativi, așa cum s-a discutat în capitolul 7. Elementele diagonale din matricea **Q** sînt și ele cofactori principali și trebuie să fie nenegative. Aceasta înseamnă că elementele matricei **S** trebuie să satisfacă condiția:

$$q_{jj} = 1 - \sum_i \bar{S}_{ij} S_{ij} = 1 - \sum_i |S_{ij}|^2 \geqslant 0. \tag{59}$$

Fiecare termen din această sumă este pozitiv. Expresia ne arată că suma termenilor pozitivi nu poate fi mai mare decît unitatea. Aceasta înseamnă *a fortiori*, că fiecare termen este subunitar, sau că:

$$|S_{ij}(j\omega)| \leqslant 1. \tag{60}$$

Aceasta este principala limitare impusă matricei de repartiție ca o consecință a pasivității. Aceasta ne arată că, *pentru un circuit pasiv modulul coeficientului de reflexie, ca și coeficientul de transmisie, nu poate să depășească unitatea.*

În continuare să considerăm un multiport fără pierderi, rciproc sau nereciproc. În acest caz, în interiorul multiportului nu se disipă putere. Prin urmare, puterea reală aplicată și exprimată prin (56), trebuie să fie nulă pentru orice valoare a lui **a**. Aceasta este posibil numai dacă matricea formei patratice se anulează adică

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U} - \mathbf{S}^*\mathbf{S} = 0$$

sau

$$\mathbf{S}^*\mathbf{S} = \mathbf{U} = \mathbf{S}\mathbf{S}^*. \tag{61}$$

Din definiţia matricei inverse constatăm că $S^{-1} = S^*$. O matrice la care matricea inversă este egală cu matricea conjugată, transpusă, se numeşte *matrice unitară.* Astfel, *matricea de repartiţie a unui multiport fără pierderi este unitară.* (Ultima egalitate din ecuaţie rezultă din faptul că, o matrice schimbă locul cu inversa sa).

Proprietăţile matricei unitare impun cîteva restricţii asupra elementelor matricei de repartiţie, care pot fi stabilite dezvoltînd produsele din (61). Rezultatul va fi:

$$|S_{1j}|^2+|S_{2j}|^2+|S_{3j}|^2+\cdots+|S_{nj}|^2 = 1$$

$$\bar{S}_{1j}S_{1k} + \bar{S}_{2j}S_{2k}+\cdots+\bar{S}_{nj}S_{nk}=0$$

de unde

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{S}_{ij}\, S_{ik} = \delta_{jk}, \qquad (62)$$

sau

$$|S_{j1}|^2+|S_{j2}|^2+|S_{j3}|^2+\cdots+|S_{jn}|^2=1$$

$$S_{j1}\bar{S}_{k1}+S_{j2}\bar{S}_{k2}+\cdots+S_{jn}\bar{S}_{kn}=0$$

de unde

$$\sum_{i=1}^{n} S_{ji}\bar{S}_{ki} = \delta_{jk}, \qquad (63)$$

unde δ_{jk} este determinantul Kronecker.

Proprietăţile circuitului diport

Ecuaţiile precedente stabilesc proprietăţile parametrilor de repartiţie ale multiporţilor. Vom examina în amănunt aceste proprietăţi pentru circuitul diport, limitîndu-ne asupra circuitelor fără pierderi, reciproce şi nereciproce.

Mai întîi avînd $n = 2$, vom lua $j = k = 1$ în (62): iar apoi $j = k=2$ în (63). Rezultatul va fi:

$$|S_{11}|^2+|S_{21}|^2=1, \qquad (64\,a)$$

$$|S_{21}|^2 + |S_{22}|^2=1. \qquad (64\,b)$$

Scăzînd cele două ecuații se obține

$$|S_{11}(j\omega)|^2 = |S_{22}(j\omega)|^2. \tag{65}$$

Astfel, *pentru un diport fără pierderi, fie acesta reciproc sau nereciproc, modulele coeficienților de reflexie la cele două porți sînt egale.* Acest rezultat poate fi extins la frecvențe complexe printr-o extindere analitică. Utilizînd simbolul ρ pentru coeficientul de reflexie, rezultatul poate fi scris astfel:

$$\rho_1(s)\,\rho_1(-s) = \rho_2(s)\,\rho_2(-s). \tag{66}$$

În funcție de poli și zerouri rezultă următoarele. Polii și zerourile funcțiilor $\rho_1(s)\rho_1(-s)$ și $\rho_2(s)\rho_2(-s)$ sînt identici și apar în simetrie cuadrantală. Singurul criteriu după care se pot separa polii și zerourile lui $\rho_1(s)$ din cei ai $\rho_1(s)\rho_1(-s)$ este stabilitatea. $\rho_1(s)$ nu poate avea nici un pol în semiplanul drept. Prin urmare, polii lui $\rho_1(s)\rho_1(-s)$, din semiplanul stîng, trebuie să fie poli ai lui $\rho_1(s)$. Cît despre zerouri, asupra acestora nu există limitări impuse de stabilitate; zerourile lui $\rho_1(s)\,\rho_1(-s)$ pot să fie atribuiți la $\rho_1(s)$, indiferent dacă sînt situați în semiplanul stîng sau în cel drept, cu singura restricție, ca împreună cu simetricele lor în raport cu axa $j\omega$ să alcătuiască mulțimea tuturor zerourilor lui $\rho_1(s)\rho_1(-s)$. Considerații similare se pot face despre polii și zerourile lui $\rho_2(s)$.

Să revenim acum la (62) și să luăm de data aceasta $j = k = 2$. Rezultatul va fi:

$$|S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1. \tag{67}$$

Dacă relația este comparată cu (64 b), găsim că

$$|S_{12}(j\omega)|^2 = |S_{21}(j\omega)|^2; \tag{68}$$

adică modulul coeficientului de transmisie, în sens direct este egal cu modulul coeficientului de transmisie, în sens invers. Aceasta nu este surprinzător pentru circuitele reciproce, deoarece în acest caz $S_{12}(s) = S_{21}(s)$, dar relația are loc și pentru circuitele nereciproce. De fapt, se pot găsi relații mai generale luînd $j = 2$ și $k = 1$ în (62). Rezultatul va fi:

$$S_{11}(j\omega) = -\frac{S_{21}(j\omega)}{\bar{S}_{12}(j\omega)}\,\bar{S}_{22}(j\omega) \tag{69 a}$$

sau

$$\rho_1(s) = -\frac{S_{21}(s)}{S_{12}(-s)}\,\rho_2(-s). \tag{69 b}$$

Aceasta se aplică diporților fără pierderi, reciproci, cît și celor nereciproci. Pentru cazul reciproc $S_{12} = S_{21}$; deci raportul între $S_{21}(s)$ și $S_{12}(-s)$ va fi o funcție trece-tot. Deoarece $\rho_1(s)$ nu poate avea poli în semiplanul drept, zerourile acestei funcții trece-tot trebuie să se simplifice, cu polii din semiplanul drept ai funcției $\rho_2(-s)$.

O aplicație—filtrare sau egalizare

Cu ajutorul schemei prezentate în fig. 8.12 *a* se pot trata mai multe aplicații. Un circuit de cuplaj fără pierderi, N, este introdus între o sursă cu impedanța internă reală și o sarcină reală. Circuitul poate să realizeze funcția de filtrare sau de egalizare; adică să formeze răspunsul în domeniul frecvență într-un mod predeterminat.

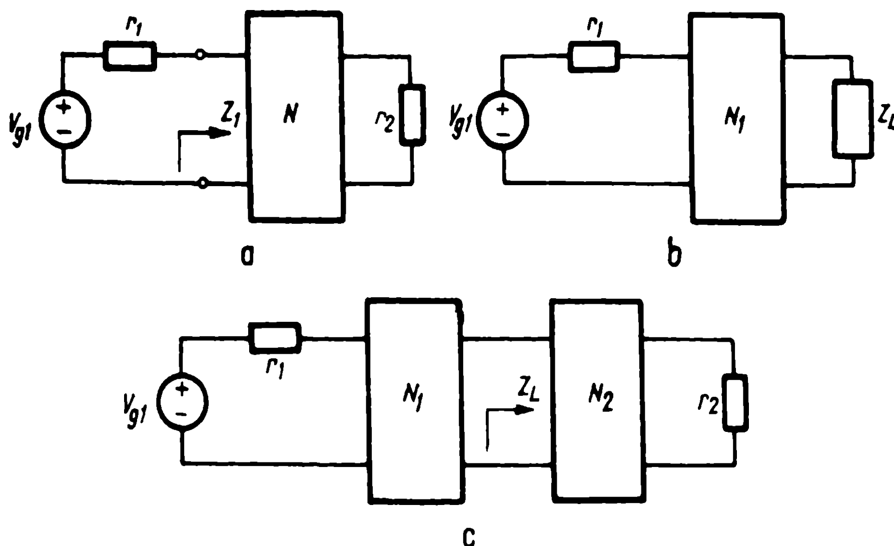


Fig. 8.12. Circuit de filtrare, egalizare sau adaptare.

În alte situații, sarcina poate să fie o impedanță Z_L, ca în figura 8.12 *b*, iar circuitul de cuplare trebuie proiectat, pentru a realiza o adaptare cu sursa rezistivă, într-un domeniu de frecvențe. Această situație poate fi corelată cu prima utilizînd teorema lui Darlington. Aceasta înseamnă că, Z_L poate fi realizat printr-un diport fără pierderi N_2, terminat cu o rezistență r_2, așa cum se arată în figura 8.12 *c*. Combinarea în cascadă a diporților N_1 și N_2 joacă rolul cuadripolului N, fără pierderi, din figura 8.12 *a*. O discuție mai restrînsă asupra acestei probleme de adaptare se va face în paragraful următor.

Să ne concentrăm asupra problemei de filtrare sau egalizare. Ceea ce se prescrie este cîștigul transductic de putere, în funcție de frecvență.

Vom nota această funcție cu $\mathcal{G}(\omega^2)$. Conform relației (48), $\mathcal{G}(\omega^2)$ este de fapt patratul modulului lui S_{21}. Dar $|S_{21}|^2$ este legat de modulul coeficientului de reflexie la intrare, prin relația (64 *a*). Prelungind analitic această expresie se poate scrie relația:

$$\rho_1(s)\rho_1(-s) = 1 - S_{21}S_{21}(-s). \tag{70}$$

în care S_{11} a fost înlocuit din nou cu ρ_1. Dacă se dă $\mathcal{G}(\omega)^2$, membrul drept devine o funcție pară, cunoscută. În aceste condiții, mai este necesar să se repartizeze, în mod convenabil, polii și zerourile din membrul drept, la $\rho_1(s)$.

Coeficientul de reflexie ρ_1 și impedanța Z_1, de la intrarea lui N terminat pe r_2, sînt legate prin (46), relație ce poate fi explicitată în raport cu Z_1, astfel:

$$\frac{Z_1(s)}{r_1} = \frac{1+\rho_1(s)}{1-\rho_1(s)}. \tag{71}$$

Prin urmare, după ce $\rho_1(s)$ a fost determinat din relația (70), impedanța de intrare Z_1 descrie o funcție de s cunoscută. Astfel problema este redusă la o aplicație a teoremei lui Darlington; se cere să realizeze $Z_1(s)$, printr-un diport terminat pe o rezistență.

Pentru exemplificare, să considerăm cîștigul transductic de putere:

$$\mathcal{G}(\omega^2) = \frac{1}{1+\omega^6}.$$

Aceasta este o funcție de filtrare de ordinul trei de tip Butterworth. Prelungirea sa se obține înlocuind $(-\omega^2)$ prin s^2. Dacă aceasta se introduce în (70) se găsește:

$$\rho_1(s)\rho_1(-s) = 1 - \frac{1}{1-s^6} = \frac{-s^6}{1-s^6} = \frac{-s^6}{(1+s)(1+s+s^2)(1-s)(1-s+s^2)}.$$

În ultima egalitate, numitorul a fost factorizat, punîndu-se în evidență polii din semiplanele drept și stîng. Polii din semiplanul stîng, trebuie să aparțină la $\rho_1(s)$, iar cei opuși la $\rho_1(-s)$. În alegerea semnului apare însă o incertitudine. Nu există nici un argument *a priori*, că $\rho_1(s)$ ar avea semn pozitiv. În concluzie $\rho_1(s)$ trebuie să fie de forma:

$$\rho_1(s) = \frac{\pm s^3}{(s+1)(s^2+s+1)}.$$

Introducînd această expresie în (71) se găseşte impedanţa

$$\frac{Z_1(s)}{r_1} = \frac{2s^2+2s+1}{2s^3+2s^2+2s+1} \quad \text{sau} \quad \frac{2s^3+2s^2+2s+1}{2s^2+2s+1},$$

depinzînd de semnul ales pentru $\rho_1(s)$. Aceste impedanţe sînt inverse şi realizările corespunzătoare vor fi duale. În cazul considerat, realizarea se obţine simplu, prin dezvoltare în fracţie continuă. Astfel, din a doua funcţie de impedanţă se găseşte:

$$\frac{Z_1(s)}{r_1} = s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{s+1}}.$$

Circuitul care realizează această funcţie şi dualul său sînt arătate în fig. 8.13. Acestea sînt circuite normate. Reamintim că, matricea Z_{0c} a impedanţelor de gol normate, se obţine împărţind fiecare element cu $\sqrt{r_1 r_2}$. Pentru a reveni la valori nenormate toate impedanţele laturilor trebuie să fie deci, multiplicate cu $\sqrt{r_1 r_2}$. Un circuit nenormat, cu rezistenţele sursei şi sarcinii r_1 şi r_2 este arătat în fig. 8.13 *c*.

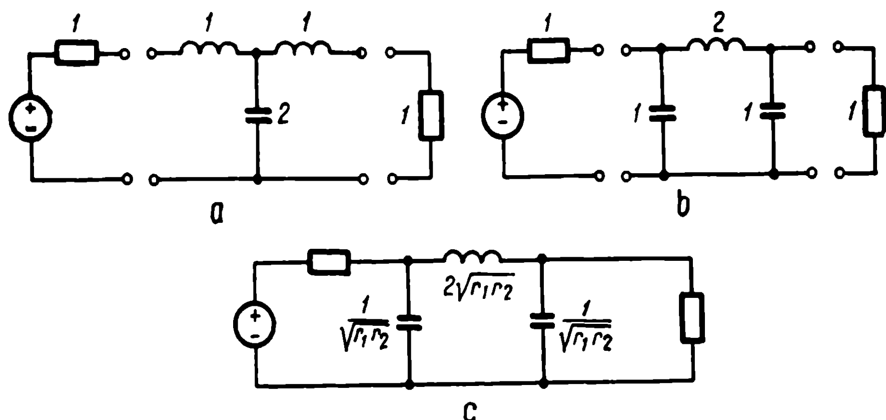


Fig. 8.13. Exemplu ilustrativ.

Limitări datorate capacităţii parazite

Problema circuitelor de adaptare, ilustrată prin fig. 8.12 *b* şi *c*, capătă o semnificaţie specială în cazul particular reprezentat în fig. 8.14 *a*, unde impedanţa de sarcină este formată dintr-o capacitate conectată în paralel cu o rezistenţă. Această schemă este identică cu cea a unui circuit care lucrează între două terminaţii rezistive, R_1 şi R_2 şi care prezintă o capacitate parazită în paralel cu bornele de ieşire, capacitate ce poate fi

tratată ca parte a circuitului, așa cum se sugerează în fig. 8.14 *b*. Această situație este echivalentă cu cea ilustrată în fig. 8.14 *c* unde capacitatea parazită este în paralel cu poarta de intrare.

În capitolul 6 am văzut că o astfel de capacitate conduce la unele restricții integrale [1]), asupra părții reale a impedanței de intrare. Vom

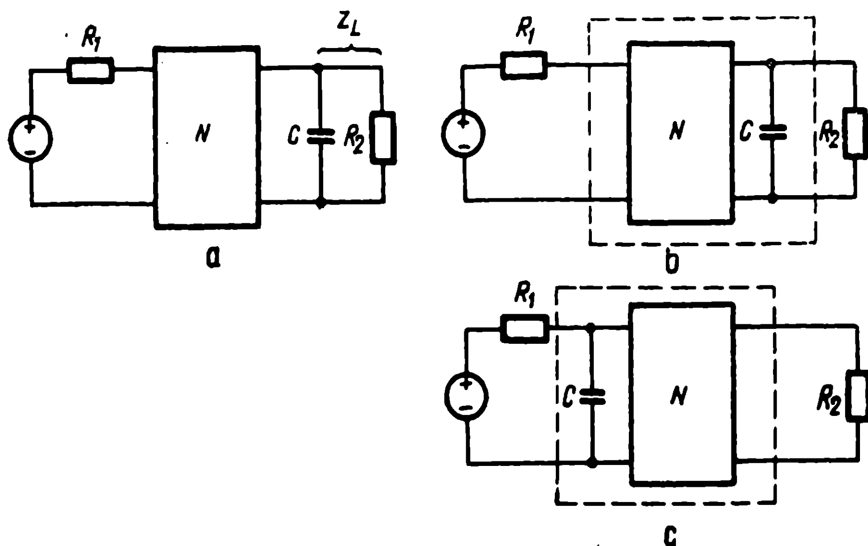


Fig. 8.14. Diport cu capacitate parazită restrictivă.

arăta că pentru coeficientul de reflexie există restricții integrale similare și le vom utiliza, pentru a demonstra o limitare a cîștigului transductic de putere.

Cele două situații din fig. 8.14 *b* și *c* sînt similare și pot fi tratate simultan considerînd fig. 8.15 în care R poate să fie R_1 sau R_2. În primul caz, Z este impedanța de intrare Z_1, la poarta din stînga diportului, reprezentat în fig. 8.14 *c* și terminat pe R_2; iar ρ este coeficientul de reflexie

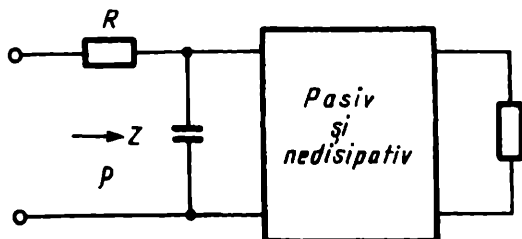


Fig. 8.15. Circuit cu restricții datorate capacității shunt.

[1]) Aceste restricții sînt puse în evidență prin relațiile integrale dintre partea reală și cea imaginară a unei impedanțe (N.T.).

ρ_1 corespunzător. Pentru $R = R_2$, Z este impedanţa de intrare Z_2, privită la poarta din dreapta a diportului punctat, din fig. 8.14*b*, cu cealaltă poartă terminată pe R_1; ρ este coeficientul de reflexie ρ_2, corespunzător. În oricare din situaţii,

$$\rho = \frac{Z-R}{Z+R},$$

În mod ideal, în condiţii de adaptare $\rho = 0$. Aceasta implică $Z = R$ la toate frecvenţele, sau cel puţin în banda frecvenţelor utile. Dar aceasta nu se poate realiza riguros: această condiţie poate să fie aproximată. Dacă ρ nu poate fi identic nul, cel puţin, vom cere să aibă modulul său cît mai apropiat de zero.

Se obişnuieşte să se definească o altă mărime legată de ρ în modul următor:

$$\text{atenuarea de reflexie} = \ln \frac{1}{|\rho(j\omega)|} \tag{72}$$

Dacă $\rho = 0$, atenuarea de reflexie este infinită; în condiţii de totală neadaptare, (cînd $\rho = 1$), atenuarea de reflexie este zero. Rezultă că maximizarea atenuării de reflexie, într-o bandă de frecvenţe, este o măsură de optimizare a adaptării, în această bandă de frecvenţe.

Luînd integrala de contur pentru $\ln (1/\rho)$ în jurul conturului standard — axa $j\omega$ şi semiplanul drept, aşa cum s-a arătat în Capitolul 6 şi cum se arată din nou în fig. 8.16 — se obţine o restricţie integrală, asupra atenuării de reflexie. Pentru a aplica teorema lui Cauchy, integrandul

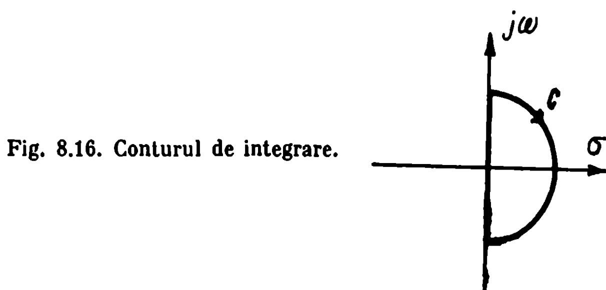


Fig. 8.16. Conturul de integrare.

trebuie să fe o funcţie regulată în semiplanul drept. Totuşi, deşi ρ este o funcţie regulată în semiplanul drept, $1/\rho$ poate să nu fie regulată. De aceea vom înmulţi pe $1/\rho$ cu o funcţie trece-tot, $A(s)$, în modul următor:

$$\frac{1}{\rho} A(s) = \frac{Z+R}{Z-R} \cdot \frac{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_n)} \tag{73}$$

fiecare s_k fiind un pol al lui $1/\rho$ din semiplanul drept. Funcţia obţinută este regulată în semiplanul drept şi acum se poate efectua integrarea. Vom avea contribuţii la integrale de contur, din interiorul semicercului infinit şi de pe axa imaginară. Pentru a le evalua pe primele să observăm că dacă $s \to \infty$, $Z \to 1/sC$, datorită capacităţii shunt. Aşadar,

$$\frac{Z+R}{Z-R} \xrightarrow[s\to\infty]{} \frac{\frac{1}{sC}+R}{\frac{1}{sC}-R} \to -\left(1+\frac{2}{RCs}\right). \qquad (74)$$

Funcţia trece-tot tinde către

$$A(s) = \frac{s^n - s^{n-1}\sum s_k + \cdots}{s^n + s^{n-1}\sum s_k + \cdots} \xrightarrow[s\to\infty]{} 1 - \frac{2\sum s_k}{s}. \qquad (75)$$

În consecinţă

$$\frac{1}{\rho} A(s) \xrightarrow[s\to\infty]{} -\left[1+\frac{2}{s}\left(\frac{1}{RC}-\sum s_k\right)\right]. \qquad (76)$$

Semnul negativ din faţa membrului drept ne arată că vom lua logaritmul lui $-A(s)/\rho$ în loc de $+A(s)/\rho$. Apoi, deoarece $\ln(1+x) \to x$ pentru $|x| \ll 1$,

$$\int_C \ln\left[-\frac{A(s)}{\rho}\right] ds \to \int_C \frac{2}{s}\left(\frac{1}{RC}-\sum s_k\right) ds = -j2\pi\left(\frac{1}{RC}-\sum s_k\right), \qquad (77)$$

unde C este semicercul infinit care face parte din conturul standard iar $\int_C ds/s = j\pi$.

În lungul axei imaginare,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln\left[-\frac{A(j\omega)}{\rho(j\omega)}\right] j d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left|\frac{1}{\rho}\right| j d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} j \arg\left[-\frac{A(j\omega)}{\rho(j\omega)}\right] j d\omega =$$

$$= j2\int_0^{\infty} \ln\frac{1}{|\rho|}\, d\omega. \qquad (78)$$

Prima egalitate provine din faptul că modulul unei funcţii trece-tot este unitar pe axa $j\omega$, astfel că $\ln|A(j\omega)/\rho(j\omega)| = \ln|1/\rho|$. Ultima egalitate

rezultă din faptul că funcţia de ω, $\ln|1/\rho|$ este pară, iar argumentul este o funcţie impară de ω.

Conform teoremei lui Cauchy, suma termenilor, din membrul stîng al ultimelor două ecuaţii, trebuie să fie zero. Prin urmare

$$\int_0^\infty \ln \frac{1}{|\rho(j\omega)|}\, d\omega = \pi\left(\frac{1}{RC} - \sum s_k\right). \tag{79}$$

Să reamintim că s_k este un pol al lui $1/\rho$, situat în semiplanul drept, aşadar partea sa reală este pozitivă. Suma tuturor acestor poli va fi prin urmare pozitivă. Dacă $1/\rho$ nu are nici un pol în semiplanul drept, această sumă se anulează. Deci rezultatul final va fi

$$\int_0^\infty \ln \frac{1}{|\rho(j\omega)|}\, d\omega \leqslant \frac{\pi}{RC}, \tag{80}$$

Aceasta este o limitare fundamentală asupra atenuării de reflexie (sau a coeficientului de reflexie), atunci cînd diportul de adaptare este shuntat la o poartă de o capacitate.

Această retricţie impune limitări şi asupra cîştigului de putere transductică. Pentru a ilustra aceasta să presupunem că banda frecvenţelor utile este domeniul frecvenţelor joase $0 \leqslant \omega \leqslant \omega_c$, care reprezintă banda de trecere, restul scării frecvenţelor constituind banda de blocare. Ambele benzi vor aduce contribuţii la integrala din (80). Situaţia cea mai avantajoasă are loc, atunci cînd $1/\rho$ nu are poli în semiplanul drept şi modulul lui ρ, fie aceasta $|\rho_0|$ este constant în banda de trecere. Atunci

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \ln \frac{1}{|\rho|}\, d\omega &= \int_0^{\omega_c} \ln \frac{1}{|\rho_0|}\, d\omega + \int_{\omega_c}^\infty \ln \frac{1}{|\rho|}\, d\omega = \\ &= \omega_c \ln \frac{1}{|\rho_0|} + \int_{\omega_c}^\infty \ln \frac{1}{|\rho|}\, d\omega = \frac{\pi}{RC}.\end{aligned} \tag{81}$$

În afara benzii de trecere, va fi o neadaptare totală şi $|\rho|$ va fi în mod ideal egal cu 1. În realitate, deşi valoarea sa va fi mai mică decît 1, va trebui să fie apropiată de 1. Prin urmare, $\ln 1/|\rho|$ va fi un număr pozitiv, mic, în mod ideal zero. În consecinţă, integrala de la ω_c la ∞ va fi pozitivă, iar (81) va da:

$$\ln \frac{1}{|\rho_0|} \leqslant \frac{\pi}{\omega_c RC} \text{ sau } \frac{1}{|\rho_0|} \leqslant \varepsilon^{\pi/\omega_c RC} \tag{82}$$

$$|\rho_0| \geqslant \varepsilon^{-\pi/\omega_c RC}.$$

Dacă această expresie se combină cu (64), pătratul modulului lui S_{21} devine

$$|S_{21}(j\omega)|^2 \leqslant 1 - \varepsilon^{-2\pi/\omega_c RC}. \tag{83}$$

Aceasta impune o limită superioară pentru cîștigul transductic de putere, $|S_{21}(j\omega)|$, care poate fi obținut într-o bandă largă de frecvențe, chiar dacă presupunem că, este posibil să se obțină o valoare constantă în toată banda de trecere. Cu cît banda frecvențelor utile este mai largă, cu atît limitarea impusă de o capacitate fixă de shuntare, devine mai severă. Să notăm că, rezultatul obținut aici este valabil pentru fig. 8.14 *c*; dar se aplică, ținînd seama de (65) și (68) și la fig. 8.14 *b*.

8.5. NORMAREA IN COMPLEX

Parametrii de repartiție pe care i-am tratat pînă acum erau definiți pentru un multiport, cu terminații rezistive. Normarea a fost efectuată în raport cu aceste numere. Să presupunem că terminațiile unui multiport nu sînt rezistențe, ci impedanțe; în ce mod le vom norma? Ne vom ocupa acum de această problemă generală. Pentru simplificare vom ilustra aceasta cu un diport, iar rezultatele se vor aplica în formă matriceală și unui multiport general.

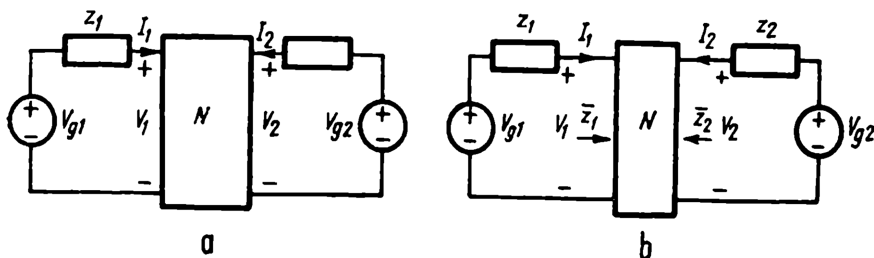


Fig. 8.17. Diport cu terminații oarecare:

(*a*) — cazul general; (*b*) — cazul adaptat.

Situația de care urmează să ne ocupăm este ilustrată cu diportul din fig. 8.17. Impedanțele de terminație sînt strict pasive, cu părți reale pozitive:

$$r_k = \operatorname{Re} z_k > 0. \tag{84}$$

Aceste părţi reale joacă acelaşi rol, ca şi rezistenţele de terminaţie mai înainte şi ele sînt reprezentate de matricea diagonală, definitivă pozitiv în (24). Din fig. 8.17 *a* putem să scriem :

$$\begin{bmatrix} V_{g_1} \\ V_{g_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

ceea ce se poate generaliza pentru un multiport astfel :

$$\mathbf{V}_g = \mathbf{V} + \mathbf{zI} = (\mathbf{Z}_{oc} + \mathbf{z})\mathbf{I}. \tag{85}$$

Termenul din dreapta rezultă prin substituţia $\mathbf{V} = \mathbf{Z}_{oc}\mathbf{I}$. Acesta poate fi comparat cu (25) pentru terminaţii rezistive.

Acum să presupunem că multiportul este adaptat cu impedanţele de terminaţie, la toate porţile simultan, adică impedanţa văzută la poarta j a multiportului este $\bar{z}_j$. Această situaţie este arătată pentru diportul din fig. 8. 17*b*. Din fig. 8.17 rezultă că

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 & 0 \\ 0 & \bar{z}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \mathbf{V} = \bar{\mathbf{z}}\mathbf{I} \quad (\textit{la adaptare}) \tag{86}$$

Ca şi mai înainte, se definesc tensiunile şi curenţii incidenţi, ca fiind tensiunile şi curenţii la o poartă în condiţii de adaptare, adică $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}$ şi $\mathbf{I}_i = \mathbf{I}$, la adaptare. Prin urmare, generalizînd ultima ecuaţie şi introducînd-o în (85) obţinem :

$$\mathbf{I}_i = \tfrac{1}{2}\mathbf{r}^{-1}V_g, \tag{87 a}$$

$$\mathbf{V}_j = \bar{\mathbf{z}}\mathbf{I}_i = \tfrac{1}{2}\bar{\mathbf{z}}\mathbf{r}^{-1}\mathbf{V}_g, \tag{87 b}$$

deoarece $\mathbf{z} + \bar{\mathbf{z}} = 2\mathbf{r}$. Aceasta poate fi comparată cu relaţia (82) pentru terminaţii reale. Cerinţa de adaptare simultană la toate porţile, care cere ca $\mathbf{Z}_{oc}$ să fie conjugată impedanţei de terminaţie z, nu poate fi satisfăcută la toate frecvenţele, ci la o singură frecvenţă. Prin urmare, procedeul care va fi descris aici este strict aplicabil la o singură frecvenţă, care poate să fie orice punct al axei $j\omega$. Acelaşi procedeu poate fi utilizat, fără erori prea mari, şi în aplicaţiile cu bandă îngustă de frecvenţe.

Definim din nou variabilele reflectate, ca deviaţiile în raport cu valorile de la adaptare conform (27). Dacă aici se introduc (85) şi (87) şi se

fac cîteva calcule, ale căror detalii sînt lăsate în seama cititorului, variabilele incidente și reflectate devin

$$\mathbf{V}_i = \tfrac{1}{2}\bar{\mathbf{z}}\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{V}+\mathbf{zI}), \tag{88a}$$

$$\mathbf{V}_r = \tfrac{1}{2}\mathbf{z}\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{V}-\bar{\mathbf{z}}\mathbf{I}), \tag{88b}$$

$$\mathbf{I}_i = \tfrac{1}{2}\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{V}+\mathbf{zI}), \tag{88c}$$

$$\mathbf{I}_r = \tfrac{1}{2}\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{V}-\bar{\mathbf{z}}\mathbf{I}). \tag{88d}$$

Observăm că și aici expresiile pentru tensiuni sînt oarecum mai complicate decît cele în raport cu curenții.

Să introducem acum normarea tensiunii, curentului și a impedanței. Pentru normarea curenților înmulțim cu $\mathbf{r}^{1/2}$ iar pentru normarea tensiunilor înmulțim cu $\mathbf{r}^{-1/2}$. Impedanțele se normează în concordanță, cu (39*b*). Variabilele normate incidente și reflectate devin :

$$\mathbf{r}^{1/2}\mathbf{I}_i = \tfrac{1}{2}(\mathbf{V}_n + \mathbf{z}_n\mathbf{I}_n) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{Z}_n + \mathbf{z}_n)\mathbf{I}_n, \tag{89a}$$

$$\mathbf{r}^{-1/2}\mathbf{V}_i = \tfrac{1}{2}\bar{\mathbf{z}}_n(\mathbf{V}_n + \mathbf{z}_n\mathbf{I}_n) = \tfrac{1}{2}\bar{\mathbf{z}}_n(\mathbf{Z}_n + \mathbf{z}_n)\mathbf{I}_n \tag{89b}$$

și

$$\mathbf{r}^{1/2}\mathbf{I}_r = \tfrac{1}{2}(\mathbf{V}_n - \bar{\mathbf{z}}_n\mathbf{I}_n) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{Z}_n - \bar{\mathbf{z}}_n)\mathbf{I}_n, \tag{90a}$$

$$\mathbf{r}^{-1/2}\mathbf{V}_r = \tfrac{1}{2}\mathbf{z}_n(\mathbf{V}_n - \bar{\mathbf{z}}_n\mathbf{I}_n) = \tfrac{1}{2}\mathbf{z}_n(\mathbf{Z}_n - \bar{\mathbf{z}}_n)\mathbf{I}_n. \tag{90b}$$

unde $\mathbf{z}_n = \mathbf{r}^{-1/2}\mathbf{z}\mathbf{r}^{-1/2} = [z_j/r_j]$. Să examinăm cu atenție aceste expresii. În cazul terminațiilor reale, ambele mărimi din (89) sînt aceleași și sînt cele notate în (37) cu **a**. La fel în (90), pentru terminații reale ambele mărimi sînt aceleași și au fost notate mai înainte cu **b**. Desigur, aceasta nu mai este adevărat pentru terminații complexe. Observăm că, dacă se ia **z** real, cele două expresii (89) se reduc la **a**, iar cele două relații (90) la **b**, din (42).

Se pot defini două matrici de repartiție diferite, una pentru curenți și una pentru tensiuni. Vom defini în mod arbitrar **a** și **b** ca fiind *curenți normați*, incidenți, respectiv reflectați. Astfel din (89) și (90) obținem

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}^{1/2}\mathbf{I}_i = \tfrac{1}{2}(\mathbf{V}_n + \mathbf{z}_n\mathbf{I}_n) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{Z}_n + \mathbf{z}_n)\mathbf{I}_n, \tag{91a}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}^{1/2}\mathbf{I}_r = \tfrac{1}{2}(\mathbf{V}_n - \bar{\mathbf{z}}_n\mathbf{I}_n) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{Z}_n - \bar{\mathbf{z}}_n)\mathbf{I}_n. \tag{91b}$$

Vom defini acum matricea de repartiție $\mathbf{S}$, ca mai înainte, prin relația $\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}$. Dacă se înlocuiesc $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ din (91), putem găsi matricea de repartiție din relația

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{Z}_n - \bar{\mathbf{z}}_n)\mathbf{I}_n = \mathbf{S}\tfrac{1}{2}(\mathbf{Z}_n + \mathbf{z}_n)\mathbf{I}_n$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{Z}_n - \bar{\mathbf{z}}_n)(\mathbf{Z}_n + \mathbf{z}_n)^{-1} \tag{92}$$

Aceasta trebuie comparată cu (41) pentru cazul terminațiilor reale. Observăm că $(\mathbf{Z}_n + \mathbf{z}_n)^{-1}$ este matricea admitanțelor normate a circuitului mărit, $\mathbf{Y}_{an}$. Rezultă că adunînd și scăzînd $\mathbf{z}_n$ în primele paranteze din (92), această expresie poate fi scrisă ca

$$\mathbf{S} = \mathbf{U} - 2\mathbf{Y}_{an}, \tag{93}$$

deoarece $\mathbf{z}_n + \bar{\mathbf{z}}_n = 2\mathbf{U}$. Aceasta este o expresie similară cu (40) pentru cazul terminațiilor reale.

Se poate defini o altă matrice, fie aceasta $\hat{\mathbf{S}}$, pentru variabilele tensiunilor, normate, scriind $\mathbf{r}^{-1/2}\mathbf{V}_r = \hat{\mathbf{S}}\mathbf{r}^{-1/2}\mathbf{V}_i$. Ținînd seama de (89) și (90), se găsește:

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{z}_n(\mathbf{Z}_n - \bar{\mathbf{z}}_n)(\mathbf{Z}_n + \mathbf{z}_n)^{-1}\bar{\mathbf{z}}_n^{-1}. \tag{94}$$

Comparînd aceasta cu (92) se găsește legătura dintre cele două matrice în forma:

$$\hat{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{z}}_n = \mathbf{z}_n\mathbf{S}. \tag{95}$$

Datorită complexității relative a matricei de repartiție a tensiunilor $\mathbf{S}$, s-au ales definițiile pentru $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ și pentru matricea de repartiție $\mathbf{S}$, în modul arătat. Mai potrivită chiar, se dovedește a fi relația lor cu puterea. Pentru a arăta aceasta să explicităm în (91) pe $\mathbf{V}_n$ și $\mathbf{I}_n$, în funcție de $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$. Astfel

$$\mathbf{V}_n = \bar{\mathbf{z}}_n\mathbf{a} + \mathbf{z}_n\mathbf{b}, \tag{96 a}$$

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{a} - \mathbf{b} \tag{96 b}$$

deoarece $\mathbf{z}_n + \bar{\mathbf{z}}_n = 2\mathbf{U}$. Acestea nu sînt chiar aceleași relații cu cele din (42), pentru cazul terminațiilor reale. Totuși, dacă se formează expresia pentru $\mathbf{V}_n^{*}\mathbf{I}_n$ ca și în (53), expresia pentru partea reală corespunzătoare

în funcție de matricea de reparatiție definită aici, va fi exact aceeași ca și în (54).

Prin urmare, proprietățile matricei de repartiție stabilite în § 8.4 se aplică și matricei de repartiție **S** dată de (92). Aceasta este deci o extindere potrivită a variabilelor de repartiție și a matricei de repartiție, pentru cazul normării complexe.

Normarea independentă de frecvență

Discuția precedentă referitoare la normarea complexă, fiind bazată pe adaptarea optimă în regim permanent sinusoidal, este valabilă pentru o singură frecvență. Vom extinde discuția la semnale arbitrare și pentru toate valorile s. În fig. 8.18 se arată un diport, care reprezintă un multiport oarecare, alimentat de surse de tensiune arbitrare, prin impedanțe de terminație În cazul general

$$\mathbf{V}_g(s) = \mathbf{V}(s) + \mathbf{z}(s)\mathbf{I}(s) \tag{97 a}$$

$$= [\mathbf{Z}_{oc}(s) + \mathbf{z}(s)]\,\mathbf{I}(s) \tag{97 b}$$

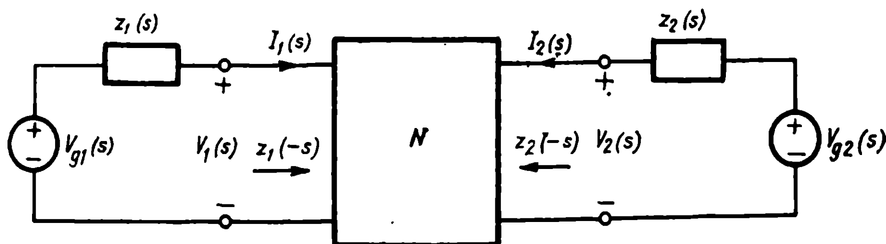


Fig. 8.18. Adaptare în cazul general cu semnale arbitrare și impedanțe de terminații pasive.

Aceste relații sînt identice cu (85) cu observația că se aplică la orice s. Fie :

$$\mathbf{r}(s) = \tfrac{1}{2}\{\mathbf{z}(s) + \mathbf{z}(-s)\}; \tag{98}$$

adică $r_1(s)$ și $r_2(s)$ sînt părțile pare ale $z_1(s)$ $z_2(s)$. Deoarece $\mathbf{r}(s)$ este par, $\mathbf{r}(-s) = \mathbf{r}(s)$; nu vom scrie argumentul (variabila) pentru $\mathbf{r}$, decît pentru a evidenția dependența de acesta. Fără să ne preocupăm de adaptarea în putere reală, să ne referim la o situație specială în cazul unui diport și anume :

$$\mathbf{Z}_{oc}(s) = \begin{bmatrix} z_1(-s) & 0 \\ 0 & z_2(-s) \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \mathbf{Z}_{oc}(s) = \mathbf{z}(-s). \tag{99}$$

Să considerăm aceasta ca o situație de referință și să o numim *condiție de adaptare* [1]. Dacă $s = j\omega$, $\mathbf{r}$ este chiar partea reală a $\mathbf{z}(s)$.

Ca și mai înainte, se definesc tensiunea și curentul de incidență, ca fiind tensiunile și curenții în condiții de adaptare adică $\mathbf{V}_i(s) = \mathbf{V}(s)$ și $\mathbf{I}_i(s) = \mathbf{I}(s)$, atunci cînd $\mathbf{Z}_{oc} = \mathbf{z}(-s)$. Din fig. 8.18 și din (97) rezultă

$$\mathbf{I}_i(s) = \tfrac{1}{2}\mathbf{r}^{-1}\mathbf{V}_g(s) = \tfrac{1}{2}\mathbf{r}^{-1}[\mathbf{V}(s) + \mathbf{z}(s)\mathbf{I}(s)]. \tag{100 a}$$

$$\mathbf{V}_i(s) = \mathbf{z}(-s)\,\mathbf{I}_i(s) = \tfrac{1}{2}\mathbf{z}(-s)\mathbf{r}^{-1}\mathbf{V}_g(s)$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathbf{z}(-s)\mathbf{r}^{-1}[\mathbf{V}(s)+\mathbf{z}(s)\mathbf{I}(s)]. \tag{100 b}$$

Se definesc din nou, variabilele reflectate ca deviații de la situația de referință (adaptare), ca și mai înainte. Introducînd (100) și (97) în $\mathbf{I}_r = \mathbf{I}_i - \mathbf{I}$ și în $\mathbf{V}_r = \mathbf{V} - \mathbf{V}_i$ obținem

$$\mathbf{I}_r(s) = \tfrac{1}{2}\mathbf{r}^{-1}[\mathbf{V}(s) - \mathbf{z}(-s)\mathbf{I}(s)] \tag{101 a}$$

$$\mathbf{V}_r(s) = \tfrac{1}{2}\mathbf{z}(s)\mathbf{r}^{-1}[\mathbf{V}(s) - \mathbf{z}(-s)\mathbf{I}(s)]. \tag{101 b}$$

Să comparăm aceasta cu (88); observăm că $\mathbf{z}$ a fost înlocuit cu $\mathbf{z}(-s)$. Dacă $s = j\omega$, $z(-s) = z(-j\omega) = z[(\overline{j\omega})] = \bar{z}(j\omega)$.

O altă expresie utilă se obține punînd $\mathbf{V} = \mathbf{Z}_{oc}\mathbf{I}$. Atunci

$$\mathbf{I}_i = \tfrac{1}{2}\mathbf{r}^{-1}[\mathbf{Z}_{oc}(s) + \mathbf{z}(s)]\mathbf{I}(s) \qquad \mathbf{V}_i(s) = \mathbf{z}(-s)\mathbf{I}_i(s), \tag{102 a}$$

$$\mathbf{I}_r = \tfrac{1}{2}\mathbf{r}^{-1}[\mathbf{Z}_{oc}(s) - \mathbf{z}(-s)]\mathbf{I}(s) \qquad \mathbf{V}_r(s) = \mathbf{z}(s)\mathbf{I}_r(s) \tag{102 b}$$

Ca și mai înainte, etapa următoare este normarea. Totuși acest procedeu este acum mai complicat. În cazurile precedente, $\mathbf{r}$ era o matrice cu numere reale și normarea se făcea împărțind sau înmulțind componentele vectorului de normat, cu rădăcina patrată din elementele scalare ale $\mathbf{r}$. Acum $\mathbf{r}(s)$ este o funcție pară de s. Extragerea rădăcinii patrate nu mai este atît de simplă. Să facem aici o digresiune pentru a examina proprietățile funcției $\mathbf{r}(s)$.

Să începem cu matricea de impedanță $\mathbf{z}$ ale cărei elemente sînt funcții raționale real-pozitive, deci regulate în semiplanul drept. Notăm numărătorul, și numitorul elementului j al matricei $\mathbf{z}$ cu $n_j(s)$ și $d_j(s)$. Atunci

$$z_j(s) = \frac{n_j(s)}{d_j(s)} \tag{103}$$

[1] O tratare mai completă în domeniul timp este dată în E. S. Kuh și R.A. Rohrer, „*Theory of Linear Active Networks*", Holden Day, San Francisco, 1967, pp. 287–300.

Deci

$$r_j(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{n_j(s)}{d_j(s)} + \frac{n_j(-s)}{d_j(-s)}\right] = \frac{n_j(s)\,d_j(-s) + n_j(-s)\,d_j(s)}{2d_j(s)\,d_j(-s)}. \quad (104)$$

Atît numărătorul cît și numitorul termenului din dreapta sînt polinoame pare de s. Prin urmare, zerourile lor apar în simetrie cuadrantală. Să definim o funcție $f_j(s)$, avînd ca zerouri și poli, zerourile și polii funcției $r_j(s)$, situați în semiplanul stîng. Funcția $f_j(-s)$ va conține în acest caz, toate zerourile și polii lui $r_j(s)$, din semiplanul drept. Astfel

$$r_j(s) = f_j(s)\,f_j(-s). \quad (105)$$

Fiecare funcție $f_j(s)$ și $f_j(-s)$ este un fel de „rădăcină patrată" a lui $r_j(s)$, deoarece produsul lor conduce la $r_j(s)$.

Înainte de a trece mai departe să considerăm un exemplu simplu. Să presupunem că z_j este o funcție real-pozitivă

$$z_j(s) = \frac{s+4}{s+1};$$

Deci

$$r_j(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{s+4}{s+1} + \frac{-s+4}{-s+1}\right) = \frac{(s+2)(s-2)}{(s+1)(s-1)}.$$

În mod evident,

$$f_j(s) = \frac{s+2}{s+1}, \quad f_j(-s) = \frac{s-2}{s-1}.$$

Constatăm că pentru $s = j\omega$, părțile reale ale acestor două funcții sînt egale; deci pentru normarea complexă la o singură frecvență, oricare din ele este potrivită.

Am considerat aici un singur element al matricei $\mathbf{r}$. În formă matriceală relațiile stabilite devin

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{f}(s)\,\mathbf{f}(-s), \quad (106)$$

relații în care $\mathbf{f}(s)$ este o matrice diagonală, la care fiecare elemente nenul este o fracție rațională, avînd atît la numărător cît și la numitor polinoame Hurwitz.

Să revenim acum la discuția principală. Tendința noastră este să normăm, înmulțind curenții cu „rădăcina patrată" din $\mathbf{r}(s)$, dar care „rădăcină patrată" trebuie aleasă, $\mathbf{f}(s)$ sau $\mathbf{f}(-s)$? În alegerea noastră este determinantă dorința ca, variabilele de repartiție ce trebuie definite să conducă la o matrice de repartiție, care să satisfacă relațiile fundamentale relative la cîștigul de putere, date în (54). În acest scop se generalizează conjugata unui vector, luînd în locul ei vectorul în $(-s)$. Astfel. $\overline{\mathbf{V}}$ devine $\mathbf{V}(-s)$, care se reduce la $\overline{\mathbf{V}}$ pentru $s = j\omega$. Este deci util să se scrie o expresie pentru putere și de aici să se deducă normarea necesară. În prima etapă se explicitează tensiunea și curentul din (100 *a*) și (101 *a*), ca funcții de tensiuni și curenții incidenți și reflectați. Rezultatul va fi:

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{r}(s)\,[\mathbf{I}_i(s) + \mathbf{I}_r(s)],$$

$$\mathbf{I}(s) = \mathbf{I}_i(s) - \mathbf{I}_r(s).$$

Apoi formăm $\mathbf{V}'(-s)\mathbf{I}(s)$ și luăm partea pară, P. Obținem

$$\begin{aligned} P &= \text{Par}\,[\mathbf{V}'(-s)\,\mathbf{I}(s)] \\ &= \text{Par}\,[\mathbf{I}_i'(-s)\,\mathbf{r} + \mathbf{I}_r'(-s)\,\mathbf{r}]\,[\mathbf{I}_i(s) - \mathbf{I}_r(s)] \\ &= \text{Par}\,[\mathbf{X}(s)] + \text{Par}\,[\mathbf{Y}(s)] \end{aligned}$$

unde

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{I}_i'(-s)\,\mathbf{r}\mathbf{I}_i(s) - \mathbf{I}_r'(-s)\,\mathbf{r}\mathbf{I}_r(s),$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{I}_r'(-s)\,\mathbf{r}\mathbf{I}_i(s) - \mathbf{I}_i'(-s)\,\mathbf{r}\mathbf{I}_r(s).$$

Observăm că $\mathbf{r}$ este matrice diagonală și deci $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$. Prin evaluare directă se găsește că:

$$\mathbf{X}(-s) = \mathbf{X}'(s) = \mathbf{X}(s),$$

$$\mathbf{Y}(-s) = -\,\mathbf{Y}'(s) = -\,\mathbf{Y}(s),$$

deoarece $\mathbf{X}$ și $\mathbf{Y}$ sînt matrice diagonale. Prin urmare $\mathbf{X}(s)$ este pară, iar $\mathbf{Y}(s)$ este impară. Rezultă că

$$P = \mathbf{I}_i'(-s)\,\mathbf{r}\mathbf{I}_i(s) - \mathbf{I}_r'(-s)\,\mathbf{r}\mathbf{I}_r(s). \tag{108}$$

Vom defini matricea de repartiție a curentului prin

$$\mathbf{I}_r(s) = \mathbf{S}_I\,\mathbf{I}_i(s) \tag{109}$$

şi o vom introduce în (108) obţinînd rezultatul

$$P = \mathbf{I}_i'(-s)\,[\mathbf{r}-\mathbf{S}_I(-s)\,\mathbf{r}\overline{\mathbf{S}}_I(s)]\,\mathbf{I}_i(s).$$

Reamintindu-ne că $\mathbf{r} = \mathbf{f}(s)\,\mathbf{f}(-s)$, această expresie poate fi pusă sub forma (54) *numai* în modul următor:

$$P = [\mathbf{f}(s)\,\mathbf{I}_i(-s)]'\,\{\mathbf{U}-[\mathbf{f}^{-1}(s)\mathbf{S}_I'(-s)\,\mathbf{f}(-s)]\,[\mathbf{f}(s)\,\mathbf{S}_I(s)\mathbf{f}^{-1}(-s)]\}\,\mathbf{f}(-s)\,\mathbf{I}_i(s)]. \tag{110}$$

Acum e clar! Trebuie să definim variabilele de repartiţie **a** şi **b**, ca variabile normate ale *curnetului* incident şi reflectat şi matricea de repartiţie **S** ca matrice de repartiţie a curentului, *normată* după cum urmează:

$$\mathbf{a}(s) = \mathbf{f}(-s)\,\mathbf{I}_i(s) \tag{111 a}$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{f}(s)\,\mathbf{I}_r(s) \tag{111 b}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{f}(s)\,\mathbf{S}_I(s)\,\mathbf{f}^{-1}(-s) \tag{112}$$

[Ecuaţia (111*b*) este justificată, dacă se înmulţeşte (109) cu $\mathbf{f}(s)$ şi se utilizează expresiile pentru $\mathbf{a}(s)$ şi **S**]. Atunci (110) devine

$$P = \mathbf{a}'(-s)\,[\mathbf{U} - \mathbf{S}'(-s)\,\mathbf{S}(s)]\,\mathbf{a}(s). \tag{113}$$

Pentru $(s = j\omega)$, această expresie se reduce la puterea de intrare aşa cum este dată în (54), pentru cazul normării reale. Aşadar, matricea de repartiţie definită prin (112) şi (109) are proprietăţile discutate în paragraful 8.4 pentru normarea reală.

A mai rămas să găsim expresia pentru **S**, în funcţie de $\mathbf{Z}_{oc}$ şi impedanţele de terminaţie. În acest scop să revenim la (102) şi să utilizăm (109), pentru a determina matricea de repartiţie a curentului.

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_I &= \mathbf{r}^{-1}\,[\mathbf{Z}_{oc}(s) - \mathbf{z}(-s)]\,[\mathbf{Z}_{oc}(s) + \mathbf{z}(s)]^{-1}\,\mathbf{r}\\ &= [\mathbf{Z}_{oc}(s) + \mathbf{z}(s)]^{-1}[\mathbf{Z}_{oc}(s) - \mathbf{z}(-s)] \qquad (114)\\ &= \mathbf{U} - 2\mathbf{Y}_a(s)\,\mathbf{r},\end{aligned}$$

unde $\mathbf{Y}_a$ este matricea de admitanţă (nenormată) a circuitului mărit

$$\mathbf{Y}_a(s) = [\mathbf{Z}_{oc}(s) + \mathbf{z}(s)]^{-1}. \tag{115}$$

Introducînd relația (114) în (112) se obține matricea de repartiție

$$\mathbf{S} = \mathbf{f}(s)\,[\mathbf{Z}_{oc}(s) + \mathbf{z}(s)]^{-1}\,[\mathbf{Z}_{oc}(s) - \mathbf{z}(-s)]\,\mathbf{f}^{-1}(-s)$$

$$= \mathbf{f}(s)\,\mathbf{f}^{-1}(-s) - 2\mathbf{f}(s)\,\mathbf{Y}_a(s)\,\mathbf{f}(s). \qquad (116)$$

Să comparăm aceasta cu relațiile (92) și (93) pentru cazul normării complexe la o singură frecvență.

Constatăm că în cazul normării complexe independente de frecvență expresia pentru S este ceva mai complicată, decît expresia pentru matricea de repartiție la o singură frecvență.

Pentru un uniport avînd o impedanță $Z(s)$, coeficientul de reflexie *pentru curent* ρ_I se obține din (114), observînd că matricele din aceste expresii sînt, în cazul uniportului, scalari. Astfel,

$$\rho_I(s) = \frac{Z(s) - z(-s)}{Z(s) + z(s)}, \qquad (117)$$

Coeficientul de reflexie însuși, așa cum rezultă din (116), diferă de această expresie prin funcția $f(s)/f(-s)$, care este o funcție trece-tot. Astfel

$$\rho(s) = \frac{Z(s) - z(-s)}{Z(s) + z(s)} \cdot \frac{f(s)}{f(-s)}, \qquad (118)$$

unde $A(s) = f(s)/f(-s)$ este o funcție trece-tot.

Exemple

Să considerăm de exemplu uniportul din fig. 8.19 terminat cu R și C în paralel. Atunci

$$z(s) = \frac{1}{G + sC}, \qquad r(s) = \tfrac{1}{2}\,[z(s) + z(-s)] = \frac{G}{(G + sC)(G - sC)},$$

$$f(s) = \frac{\sqrt{G}}{G + sC}, \qquad f(-s) = \frac{\sqrt{G}}{G - sC}.$$

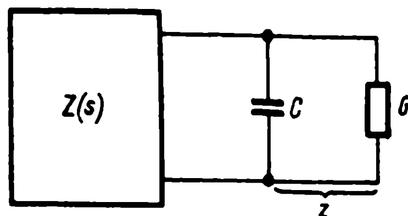


Fig. 8.19. Ilustrarea coeficientului de reflexie al unui uniport.

Din (117) se găsește coeficientul de reflexie al curentului

$$\rho_I(s) = \frac{Z(s) - \dfrac{1}{(G - sC)}}{Z(s) + \dfrac{1}{(G + sC)}} = \frac{(G-sC)\,Z(s)-1}{(G+sC)\,Z(s)+1} \cdot \frac{G+sC}{G-sC}.$$

În sfîrșit din (118) se găsește coeficientul de reflexie

$$\rho(s) = \rho_I(s) \frac{f(s)}{f(-s)} = \frac{(G-sC)}{(G+sC)} \rho_I(s) = \frac{(G-sC)\,Z(s)-1}{(G+sC)\,Z(s)+1}.$$

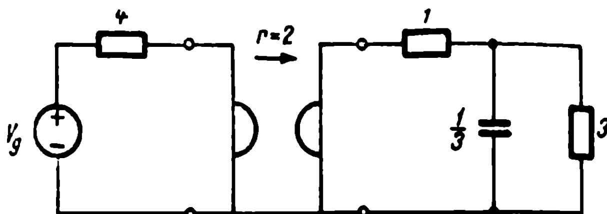


Fig. 8.20. Exemplu ilustrativ.

Să considerăm un alt exemplu arătat în fig. 8.20, pentru ilustrarea normării complexe, independent de frecvență. Un girator este terminat la o poartă printr-o rezistență, iar la cealaltă poartă printr-o impedanță

$$z_2 = \frac{s+4}{s+1}.$$

Giratorul are o matrice a impedanțelor de gol : prin urmare se poate scrie

$$\mathbf{Z}_{oc} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \dfrac{s+4}{s+1} \end{bmatrix}$$

și

$$\mathbf{Y}_a = (\mathbf{Z}_{oc} + \mathbf{z})^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & \dfrac{s+4}{s+1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+4}{8(s+\frac{5}{2})} & \dfrac{s+1}{4(s+\frac{5}{2})} \\ \dfrac{-(s+1)}{4(s+\frac{5}{2})} & \dfrac{s+1}{2(s+\frac{5}{2})} \end{bmatrix}.$$

Impedanța de terminație z_2 este aceeași ca și cea prezentată imediat după relația (105). Așadar, funcțiile $\mathbf{f}(s)$ și $\mathbf{f}^{-1}(-s)$ sînt :

$$\mathbf{f}(s) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \dfrac{s+2}{s+1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}^{-1}(-s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-s+1}{-s+2} \end{bmatrix}.$$

Introducînd relațiile de mai sus în (116) se obține matricea de repartiție

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \dfrac{s+2}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-s+1}{-s+2} \end{bmatrix} - \frac{2}{8(s+\frac{5}{2})} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \dfrac{s+2}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (s+4) & 2(s+1) \\ -2(s+1) & 4(s+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \dfrac{s+2}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \dfrac{-\frac{3}{2}}{s+\frac{5}{2}} & \dfrac{-(s+2)}{s+\frac{5}{2}} \\[2ex] \dfrac{s+2}{s+\frac{5}{2}} & \dfrac{-\frac{3}{2}}{s+\frac{5}{2}} \cdot \dfrac{s+2}{-s+2} \end{bmatrix}.$$

Constatăm că S_{22} este egal cu S_{11} înmulțit cu o funcție trece-tot; modulele lor, pe axa $j\omega$, sînt prin urmare aceleași. Ecuațiile (65) și mai general (66) sînt satisfăcute. Puteți verifica că și relațiile (64), (67), (68) și (69) sînt de asemenea satisfăcute.

Amplificator cu rezistență negativă

Vom analiza în continuare, pentru ilustrarea aplicațiilor parametrilor de repartiție, un circuit a cărui analiză și proiectare se simplifică considerabil prin ultizarea paremetrilor de repartiție. Dezvoltarea amplificatoarelor cu rezistență internă negativă a fost impulsionată de apariția diodei tunel, al cărui model linear simplificat este prezentat în fig. 8.21 *a*. În fig. 8.21 *b* se arată un model mai complet, dar pentru multe aplicații modelul mai simplu este mai potrivit.

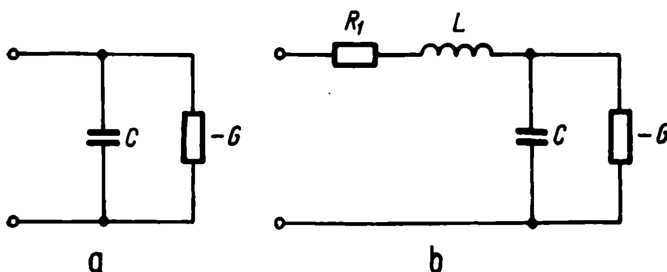


Fig. 8.21. Modele ale diodei tunel.

Impedanța modelului simplu al diodei tunel este:

$$Z_d(s) = \frac{1}{-G+sC}.$$

Aceasta nu este desigur o funcție real-pozitivă. Să considerăm funcția $-Z_d(-s)$:

$$-Z_d(-s) = \frac{-1}{-G-sC} = \frac{1}{G+sC} = Z(s),$$

care *este* o funcție real-pozitivă: impedanța dipolului G în paralel cu C. Aceasta este de fapt, o exemplificare a unei proprietăți mai generale, care poate fi formulată după cum urmează. Fie $Z_d(s)$ impedanța unui circuit *activ*, alcătuit din inductanțe și capacități pozitive și rezistențe *negative*. Fie $Z(s)$ impedanța circuitului *pasiv* obținut prin modificarea semnului fiecărui element. Avem $Z(s) = -Z_d(-s)$. Demonstrația acestui rezultat este lăsată în seama cititorului (vezi problemele **P.30** și **P.31**).

Acum să presupunem că o diodă tunel, reprezentată prin modelul din fig. 8.20 *a* este conectată la o poartă a unei rețele triport fără pierderi, așa cum se arată în fig. 8.22 *a*. Să considerăm impedanțele de normare la cele trei porți, care vor fi $z_1 = R_1$, $z_2 = R_2$ și $z_3 = 1/(G+sC)$. Astfel, porțile 1 și 2 sînt terminate pe impedanțele de normare, în timp ce poarta 3 este terminată printr-o impedanță $z_a(s)$, legată de impedanța sa de normare prin relația $z_a(s) = -z_3(-s)$. Relațiile de repartiție ale triportului pot fi scrise astfel

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3, \tag{119 a}$$

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + S_{23}a_3, \tag{119 b}$$

$$b_3 = S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + S_{33}a_3. \tag{119 c}$$

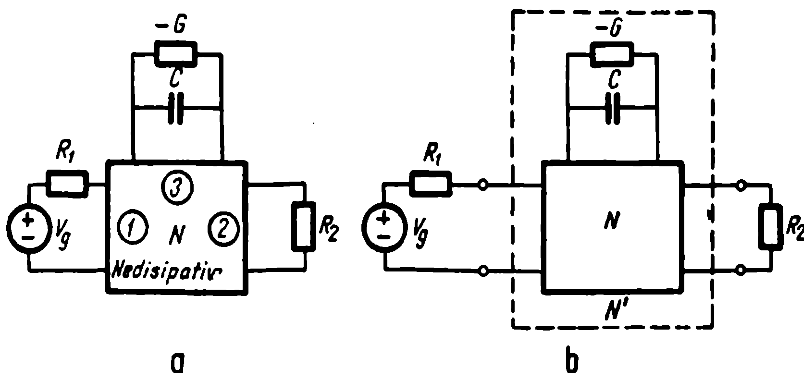


Fig. 8.22. Amplificator cu rezistență negativă.

În alt mod, dacă terminația la poarta 3 este inclusă în rețea, schema poate fi considerată ca un diport *N'*, așa cum se arată în fig. 8.22 *b*, cu terminațiile reale R_1 și R_2. Să notăm cu indice prim parametrii de repartiție ai diportului. Prin definiție

$$S'_{11}(j\omega) = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} = S_{11}(j\omega) + S_{13}(j\omega)\frac{a_3}{a_1}$$

$$= S_{11}(j\omega) - \frac{S_{13}(j\omega)\,S_{31}(j\omega)}{S_{33}(j\omega)}. \tag{120}$$

Prima egalitate se obține din (119 *a*), luînd $a_2 = 0$. Deoarece poarta 3 din fig. 8.22 *a* este închisă cu o impedanță, care este pe axa *j* negativ conjugata impedanței de normare, avem $b_3 = 0$, conform problemei **P.27**. A doua egalitate din ultima ecuație rezultă din (119 *c*).

Printr-o tratare similară se pot obține ceilalți parametri de repartiție, din fig. 8.22 *b*. Rezultatele sînt date în continuare, calculele de detaliu fiind lăsate pe seama cititorului:

$$S'_{11} = \frac{S_{11}S_{33} - S_{13}S_{31}}{S_{33}}, \qquad S'_{12} = \frac{S_{12}S_{33} - S_{13}S_{32}}{S_{33}},$$
$$S'_{21} = \frac{S_{21}S_{33} + S_{23}S_{31}}{S_{33}}, \qquad S'_{22} = \frac{S_{22}S_{33} + S_{23}S_{32}}{S_{33}}. \tag{121}$$

Deoarece triportul din fig. 8.22 este fără pierderi, matricea sa de repartiție este unitară. Această proprietate impune unele condiții pentru parametrii de repartiție (vezi problema **P**.35). În aceste condiții relațiile de mai sus devin:

$$S'_{11}(j\omega) = \frac{S_{22}(-j\omega)}{S_{33}(j\omega)}, \qquad S'_{12}(j\omega) = \frac{-S_{21}(-j\omega)}{S_{33}(j\omega)},$$
$$S'_{21}(j\omega) = \frac{-S_{12}(-j\omega)}{S_{33}(j\omega)}, \qquad S'_{22}(j\omega) = \frac{S_{11}(-j\omega)}{S_{33}(j\omega)}. \tag{122}$$

Aceste ecuații ne dau legătura, între coeficienții de reflexie și de transmisie ai diportului cu amplificator cu rezistență negativă și parametrii de repartiție ai triportului fără pierderi. Cîștigul transductic de putere

al amplificatorului este $\mathscr{G}(\omega^2) = |S'_{21}(j\omega)|^2$, care se obține conform relațiilor de mai sus:

$$\mathscr{G}(\omega^2) = |S'_{21}(j\omega)|^2 = \frac{|S_{21}(j\omega)|^2}{|S_{33}(j\omega)|^2}, \tag{123}$$

deoarece $|S_{12}(-j\omega)| = |S_{12}(j\omega)|$. Deoarece N este un triport fără pierderi, $|S_{12}(j\omega)|^2 \leqslant 1$. Deci

$$\mathscr{G}(\omega^2) \leqslant \frac{1}{|S_{33}(j\omega)|^2}. \tag{124}$$

Dar S_{33} este coeficientul de reflexie la poarta 3, la bornele căreia apare o capacitate. Prin urmare, așa cum s-a discutat în paragraful precedent, există o limitare de principiu a acestei funcții, așa cum rezultă din (80), luînd aici $S_{33} = \rho$.

Proiectarea optimă într-o bandă de frecvențe, $O-\omega_c$, dată, se obține dînd lui $|S_{12}(j\omega)|$ valoarea constantă, maximă, în banda de frecvențe dată și făcînd ca $|S_{33}(j\omega)|$ să fie constant. Valoarea maximă pentru $|S_{12}(j\omega)|$ este 1. Cu limitarea dată de (82) se găsește cîștigul transductic de putere, care trebuie să satisfacă relația

$$\mathscr{G}(\omega^2) \leqslant \varepsilon^{2\pi/\omega_c RC} \tag{125}$$

în care $R = 1/G$, în fig. 8.22. Aceasta este limitarea principală a produsului „cîștig-bandă", care depinde numai de parametrii diodei tunel.

Să revenim la proiectarea triportului. Să presupunem că triportul din fig. 8.22 *a* este un circuit reciproc. Dacă $|S_{12}(j\omega)|=1$ într-o bandă de frecvențe, toți ceilalți parametri de repartiție se vor anula la aceste frecvențe. (Vezi problema P.36). Rezultă că nu se poate obține un triport *reciproc*, care să nu degenereaze într-un caz banal, prin proiectarea optimă prezentată.

Să considerăm triportul circulator arătat în fig. 8.23 *a*. Matricea sa de repartiție, normată în raport cu rezistențele r_1, r_2 și r_3, unde r_3 este un număr real, arbitrar, este:

$$\mathbf{S}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{126}$$

Aici S_{12} este identic 1: dar ceilalți parametri ai circuitorului nu sînt potriviți, pentru a face din circulator triportul dorit. Dacă se atașează altceva la poarta 2, atunci S_{12} nu va mai fi 1. Aceasta menține poarta 3 nemodificată.

Să considerăm schema din fig. 8.23 *b*. Aceasta constă dintr-un circulator avînd la o poartă un diport reciproc $\hat{N}$. Fie matricea de repartiție $\hat{\mathrm{S}}$ a diportului de forma

$$\hat{\mathrm{S}} = \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{21} & \hat{S}_{22} \end{bmatrix}$$

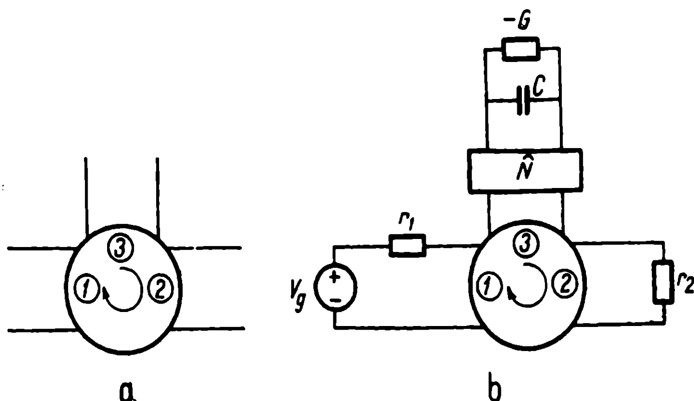


Fig. 8.23. Amplificator cu rezistență negativă, nereciproc.

fiind normată în raport cu r_3 și $z_3 = 1/(G+sC)$, la intrare și respectiv ieșire, r_3 este același ca și rezistența de normare a circuitului la poarta 3. Rămîne să exprimăm matricea de repartiție a întregului triport în funcție de parametrii S_c și $\hat{\mathrm{S}}$ din (126) și (127). Aceasta se poate face, utilizînd rezultatele din problema **P**.24. Detaliile de calcul revin cititorului; rezultatul este

$$\hat{\mathrm{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \hat{S}_{11} & 0 & \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{21} & 0 & \hat{S}_{22} \end{bmatrix} \tag{128}$$

În fine, matricea de repartiție pentru întreg amplificatorul cu rezistență negativă (cea notată cu S'), se obține utilizînd (122). Astfel,

$$\mathrm{S}' = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\hat{S}_{11}(-j\omega)}{\hat{S}_{22}(j\omega)} \\ \dfrac{-1}{\hat{S}_{22}(j\omega)} & 0 \end{bmatrix} \tag{129}$$

Ambii coeficienți de reflexie sînt nuli, ceea ce arată că amplificatorul este adaptat atît la intrare, cît și la ieșire. Dacă se utilizează (65), se constată că coeficientul de transmisie invers, S'_{12} are modulul unitar. Coeficientul de transmisie, direct, al amplificatorului este legat numai de coeficientul de reflexie de la ieșire al diportului $\hat{N}$. Astfel,

$$\mathcal{G}(\omega^2) = \frac{1}{|\hat{S}_{22}(j\omega)|^2} \tag{130}$$

Problema de proiectare poate fi formulată acum după cum urmează. Se alege o funcție de cîștig $\mathcal{G}(\omega^2)$, care să fie supusă limitării cîștig bandă din (125) și care să maximizeze funcția $1/|\hat{S}_{22}(j\omega)|^2$. Apoi, apare problema determinării diportului $\hat{N}$, din $|\hat{S}_{22}(j\omega)|^2$, care să fie terminat pe r_3 la o poartă și pe dioda tunel la cealaltă poartă, așa cum se arată în fig. 8.24.

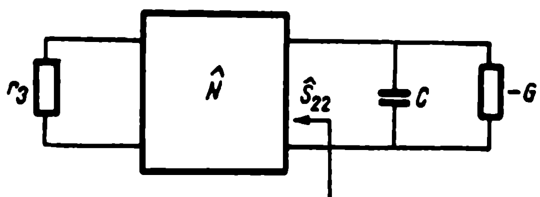


Fig. 8.24. Diportul $\hat{N}$, care trebuie proiectat.

Problema nu este la fel cu cea a filtrului discutat în paragraful 8.4 [1]). Din $|\hat{S}_{22}(j\omega)|^2$ este necesar să se găsească $\hat{S}_{22}(s)$. Această funcție este legată de impedanța Z, privită de la poarta 2 a lui N prin (118), în care ρ joacă rolul lui $\hat{S}_{22}$. Diportul $\hat{N}$ poate fi găsit apoi din Z.

În această tratare sumară s-au ignorat o serie de probleme legate de alegerea potrivită a lui $\hat{S}_{22}(s)$ din modulul său la patrat, deoarece acesta nu este un proces unic. Amănuntele acestei alegeri ne-ar fi dus în afara problemei noastre și de aceea nu au fost dezvoltate aici.

PROBLEME

P 1. Doi uniporți avînd impedanțele $Z_a = f_a(s)$ și $Z_b = f_b(s)$ au coeficienții de reflexie ρ_1 și ρ_2. Să se găsească coeficientul ρ al uniportului arătat în fig. 8 P1 în funcție de ρ_1 și ρ_2.

$$Z_1 = f_a(s), \quad Z_3 = f_b(s)$$

$$Z_2 = \frac{1}{f_b(s)}, \quad Z_4 = \frac{1}{f_a(s)}$$

---

[1]) Diferența esențială provine din faptul că aici este vorba de neadaptarea dintre o funcție real-pozitivă și o impedanță real-negativă, care este impedanța diodei tunel. În acest caz $\hat{S}_{22}$ nu mai este o funcție cu modulul limitat (*N.T.*).

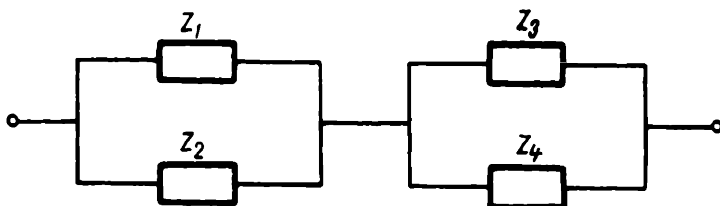


Fig. 8.P1

P 2. Sensul undelor de incidență și de reflexie este asociat cu ceea ce se consideră a fi direcția fluxului de putere. În figura 8.P2 *a* se arată un uniport, cu sistemul obișnuit de referință pentru tensiune și curent. Coeficientul de reflexie pentru acest uniport este ρ_1. În fig. 8.P2 *b* curentul prin uniport este inversat. În aceste condiții, se consideră că uniportul debitează putere, în rețeaua conectată în stînga bornelor. Să se găsească noul coeficient de reflexie ρ_2, în funcție de Z și ρ_1.

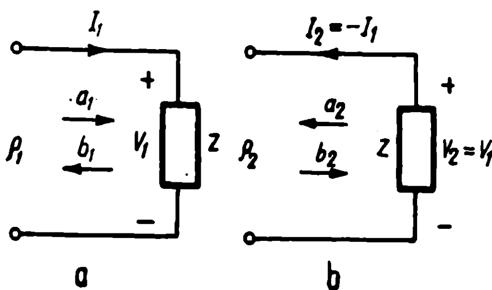


Fig. 8.P2

P 3. În text s-a arătat că $\mathbf{S}=\mathbf{U}-2\mathbf{Y}_{an}$, unde $\mathbf{Y}_{an}$ este matricea y normată a circuitului mărit, în ipoteza că multiportul are o matrice a admitanțelor de scurtcircuit. Să se dmonstreze acest rezultat pentru circuitul mărit fără a face ipoteza menționantă.

P 4. Să se arate că $\mathbf{S}=2(\mathbf{U}+\mathbf{Y}_n)^{-1}-\mathbf{U}$.

P 5. Se consideră un triport, *nedisipativ, nereciproc, adaptat.* Pornind de la forma generală a matricei de repartiție și utilizînd proprietățile multiporților nedisipativi, adaptați, să se determine elementele matricei de repartiție. Se poate identifica clasa multiportului din această matrice de repartiție?

P 6. (a) Să se scrie matricea de reapartiție care reprezintă un circulator cu patru porți.

(b) Se consideră transpusa matricei obținute și se cere să se arate, ce fel de circuit cu patru porți îi corespunde.

P 7. În fig. 8.P7 se arată două surse controlate care nu pot fi reprezentate prin impedanțe sau admitanțe. Să se găsească matricele de repartiție pentru acești diporți.

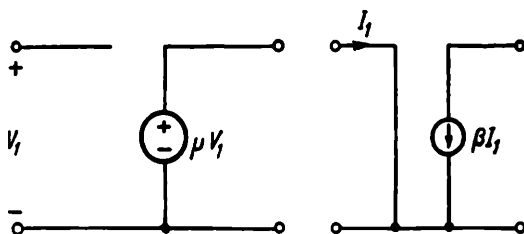


Fig. 8.P7

P 8. În fig. 8.P8 se arată două surse controlate. Una din ele nu poate fi reprezentată prin impedanțe, cealaltă prin admitanțe: ambele posedă însă o matrice de repartiție. Să se găsească aceste matrice.

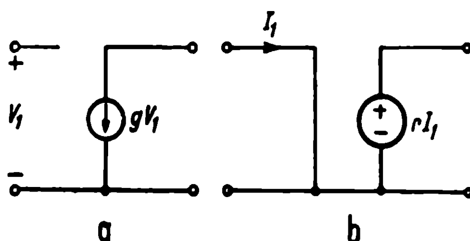


Fig. 8.P8

P 9. Utilizînd relația (41) din text, să se găsească parametrii S_{11}, S_{12}, S_{21} și S_{22} ai unui diport, în funcție de parametrii z.

P 10. Diporții pasivi, *simetrici* sînt definiți prin relația $z_{11}=z_{22}$. Utilizînd rezultatele problemei 9, să se arate că un diport simetric are $S_{11}=S_{22}$.

P 11. Diporții pasivi, *antimetrici* sînt definiți prin relațiile: $z_{11} = y_{22}$, $z_{22} = y_{11}$ și $z_{21} = -y_{21}$. Să se arate că diporții antimetrici sînt caracterizați prin relația $S_{22}=-S_{11}$.

P 12. (a) Se consideră circulatorul arătat în fig. 11 din text, cu terminațiile $-r$ la poarta 1 și r la poarta 3. Să se găsească legătura dintre tensiunea și curentul de la poarta 2. Un uniport cu relația $v-i$ de acest gen se numește *norator*.

(b) Să se repete problema (*a*) cu $-r$ și r schimbate între ele. Un uniport avînd relația $v-i$ de acest tip se numește *nulator*.

P 13. Să se arate că

$$(a)\ (\mathbf{Z}_n + \mathbf{U})^{-1} (\mathbf{Z}_n-\mathbf{U}) = (\mathbf{Z}_n-\mathbf{U}) (\mathbf{Z}_n + \mathbf{U})^{-1}$$

$$(b)\ \mathbf{r}^{-1} \{\mathbf{Z}_{oc} (s)-\mathbf{z}(-s)\} \{\mathbf{Z}_{oc}(s) + \mathbf{z}(s)\}^{-1} \mathbf{r}$$

$$= \{\mathbf{Z}_{oc}(s) + \mathbf{z}(s)\}^{-1} \{\mathbf{Z}_{oc}(s)-\mathbf{z}(-s)\}$$

unde $\mathbf{Z}_n$ este matricea de impedanțe a unui uniport, normat în raport cu numere reale.

P 14. Fiecare din multiporţii din fig. 8.P14 este o conectare ideală constînd din legături directe între porţi. Să se găsească matricea de repartiţie a fiecăruia, considerînd la fiecare poartă o rezistenţă de normare de 1 ohm. În fiecare caz se presupune că puterea se obţine de la o sursă de tensiune, în serie cu rezistenţa de terminaţie a porţii. Să se găsească fracţiunea din putere reflectată la acea poartă şi cea transmisă, spre fiecare din celelalte porţi. Rezultatul era previzibil fără a se considera parametrii S?

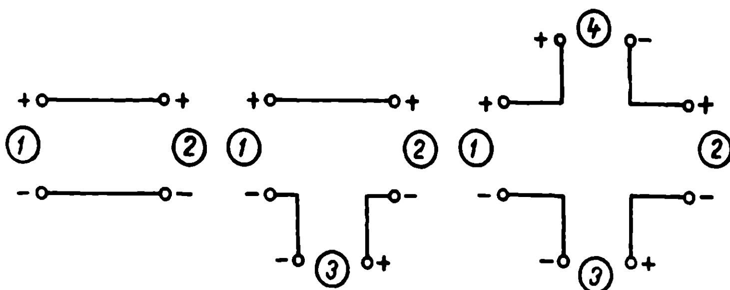


Fig. 8.P14

P 15. Schema din fig. 8.P15 este aceea a unui transformator diferenţial. Aceasta constă din trei înfăşurări de transformator ideal, din care se formează un circuit cu patru porţi. Cele două înfăşurări secundare ale transformatorului au rapoartele de transformare, relative la primar, n_2 şi n_3. Ecuaţiile ce caracterizează transformatorul sînt date pe

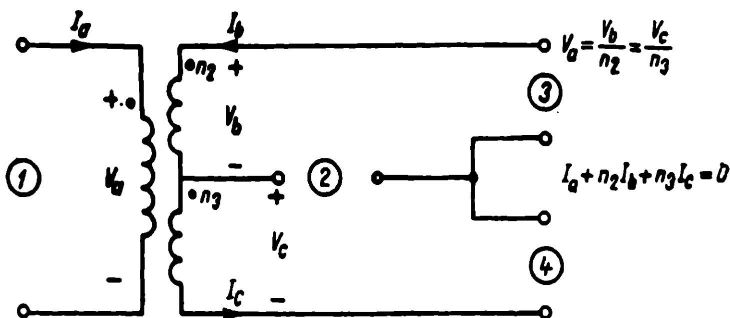


Fig. 8.P15

figură. Să presupunem că fiecare poartă este terminată cu rezistenţele sale reale de normare, r_1, r_2, r_3 şi r_4. Rapoartele de transformare şi rezistenţele de normare trebuie alese astfel încît :

(a) Dacă poarta 1 este alimentată (de la o sursă de tensiune în serie cu rezistenţa de terminaţie), să nu avem nici un fel de transmisie spre poarta 2 şi reciproc;

(b) Dacă poarta 3 este alimentată, să nu avem nici un fel de transmisie spre poarta 4 şi reciproc;

(c) Toate porţile să fie adaptate (să nu avem reflexii).

Să se găsească matricea de repartiţie pentru acest circuit cu 4 porţi exprimînd-o numai prin n_2 şi n_3.

P 16. Să presupunem că se cere să se studieze condițiile de existență a unui triport reciproc, fără pierderi, care este terminat adaptat pe impedanțe reale. Să se utilizeze proprietățile matricei de repartiție pentru a determina realizabilitatea unui astfel de circuit. Dacă este realizabil să se găsească S_{12} și S_{13}.

P 17. În fig. 8.P17 se arată un circuit triport reciproc și fără pierderi, care este presupus simetric. Triportul *nu* este terminat adaptat. Se presupune că atunci cînd la o poartă se aplică o excitație (de la o sursă de tensiune în serie cu rezistența de terminație), la celelalte porți se obțin puteri egale. Să se găsească, ce fracțiune din puterea maximă a sursei se poate obține în aceste condiții la fiecare poartă și ce fracțiune din această putere se reflectă.

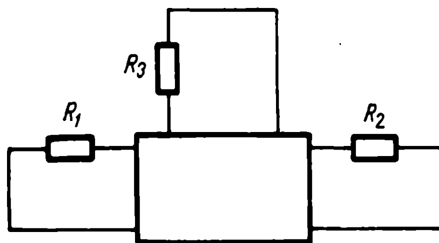


Fig. 8.P17

P 18. Circuitul din fig. 8.P18 este o punte conectată între două terminații rezistive. Să se calculeze cîștigul transductic de putere. Să se găsească condițiile pe care trebuie să le satisfacă elementele punții, pentru ca aceast cîștig să fie egal cu unitatea și să nu depindă de frecvență. În aceste condiții să se găsească coeficienții de reflexie și de transmisie.

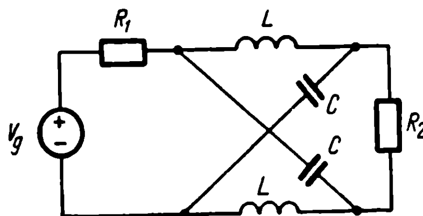


Fig. 8.P18

P 19. În fig. 8. P19 se arată un diport terminat la ieșire cu o impedanță care nu este cea de normare. Fie ρ_2 coeficientul de reflexie al lui Z_2, normat față de r_2 care este rezistența de normare a diportului. Intrarea este terminată adaptat; adică r_1 este rezistența de normare. Să se găsească coeficientul de reflexie ρ_1 de la intrare și cîștigul de tensiune V_{2n}/V_{gn} în funcție de ρ_2 și de parametrii de repartiție ai diportului.

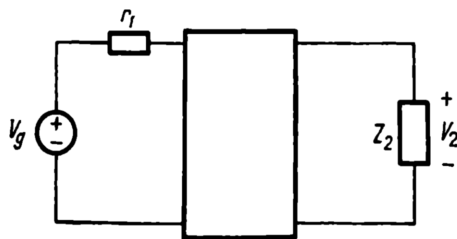


Fig. 8.P19

P 20. Se face o generalizare a problemei precedente. Un circuit cu n porţi este terminat adaptat la m din porţile sale şi cu terminaţii arbitrare la $n-m$ din porţi aşa cum se arată în fig. 8.P20. Ecuaţiile de repartiţie ale multiportului sînt distribuite aşa cum se arată în continuare. Coeficientul de reflexie la poarta terminată cu Z_k este ρ_k. Fie ρ matricea diagonală

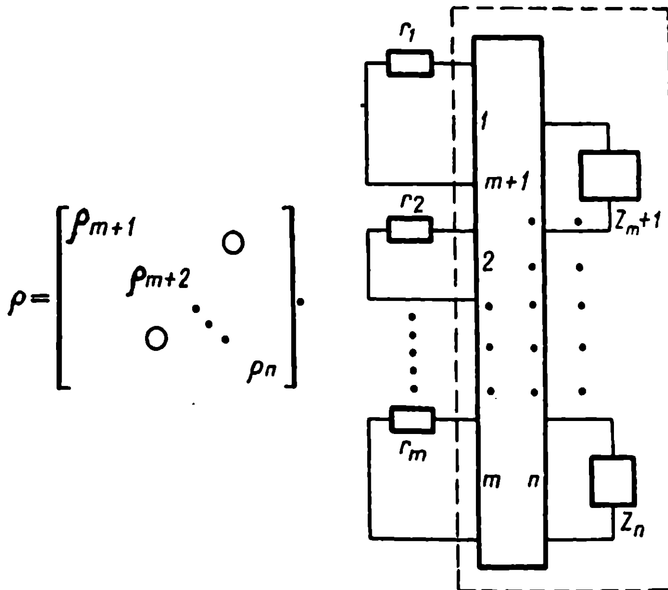


Fig. 8.P20

Se cere să se găsească matricea S' a m-portului din interiorul liniei punctate din figură, care este dată de relaţia $\mathbf{b}_1=\mathbf{S}'\mathbf{a}_1$. Utilizînd relaţiile între a_k, b_k şi ρ_k se poate scrie expresia ce dă legătura între $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_2$ şi ρ. Să se introducă aceasta în forma distribuită a relaţiilor de repartiţie şi să se arate că

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2\rho(\mathbf{U}-\mathbf{S}_4\rho)\mathbf{S}_3.$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \\ \cdots \\ b_{m+1} \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc:ccc} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1m} & S_{1m+1} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2m} & & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ S_{m1} & S_{m2} & \cdots & S_{mm} & S_{mm+1} & \cdots & S_{mn} \\ \hdashline S_{m+11} & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nm} & & & S_{nn} \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ \cdots \\ a_{m+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_3 \\ \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}$$

P 21. Se dă circulatorul din fig. 8.P21. avînd una din porți terminată neadaptat. Utilizînd rezultatele problemei precedente să se găsească matricea de repartiție S' a diportului din interiorul liniei punctate.

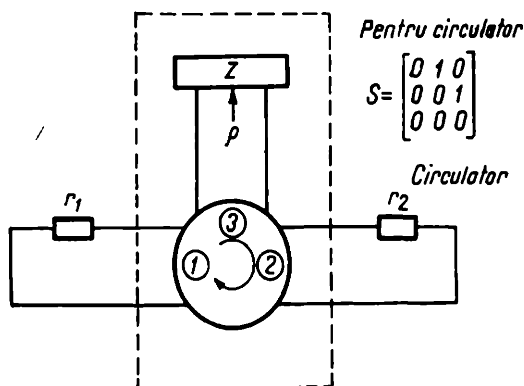


Fig. 8.P21

P 22. Circuitul cu patru porți din fig. 8. P22 este un transformator diferențial terminat adaptat la două din porți și neadaptat la celelalte două. Să se găsească matricea de repartiție a diportului din interiorul liniei punctate în funcție de ρ_3 și ρ_4. În ce condiție diportul nu va avea reflexii la porțile sale?

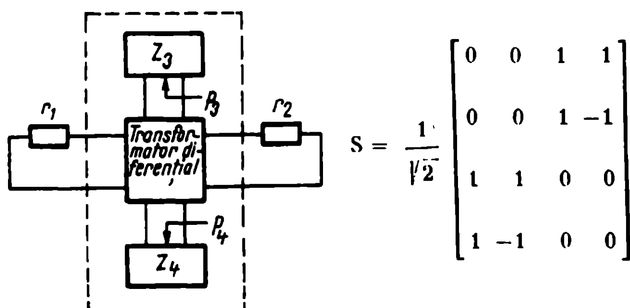


Fig. 8.P22

P 23. În cazul unui diport format prin conectarea în cascadă a doi subdiporți, pentru care se dorește legătura între tensiuni și curenți este avantajos să se utilizeze matricele lanț [1]) ale subdiporților. Se cere să se găsească o matrice $\underline{T}$ care să îndeplinească un rol similar pentru doi diporți conectați în cascadă, dar la care în locul curenților și tensiunilor reale să se utilizeze variabilele de repartiție. Să considerăm circuitul din fig. 8.P23, pentru care relația căutată poate fi scrisă în forma globală $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$.

---

[1]) În literatura de specialitate această matrice este numită și *matrice fundamentală* sau *matrice de transfer*. (N.T.)

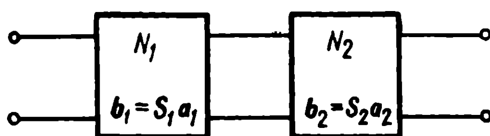


Fig. 8.P23

(a) Să se determine elementele vectorilor x și y (dintre variabilele de repartiție, astfel încît matricea **T** globală, să fie egală cu $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ unde $\mathbf{x}_1=\mathbf{T}_1\mathbf{y}_1$ și $\mathbf{x}_2=\mathbf{T}_2\mathbf{y}_2$. Să se menționeze ce condiție ar trebui impusă, în cazul normării complexe, ca și în cazul normării reale. (Aceasta poate fi numită *condiție de compatibilitate*).

(b) Să se exprime elementele matricei **T** a diportului prin parametri de repartiție ai diportului.

(c) Să se arate ce condiții trebuie să satisfacă matricea **T** dacă diportul este reciproc.

P 24. În problema P20, unele dintre porți sînt terminate pe sarcini individuale : să presupunem că în locul acestor sarcini se conectează porțile altui multiport, așa cum se arată în fig. 8.

P 24. Multiportul N are $m+k$ porți, iar multiportul $\hat{N}$ are $n+k$ porți. Un număr de k porți

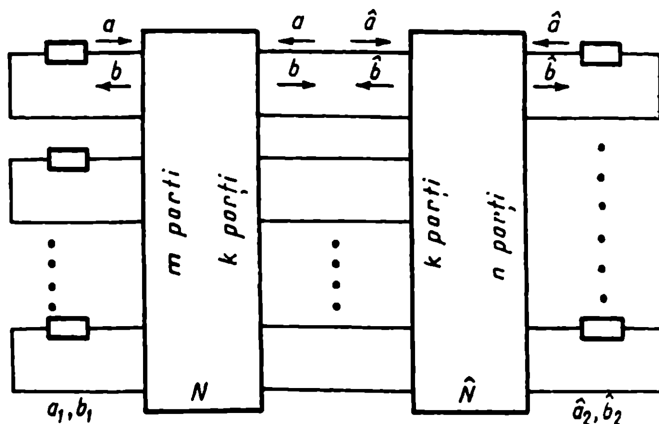


Fig. 8.P24

de la un multiport sînt conectate la k porți ale celuilalt, rezultînd un circuit cu $(m+n)$ porți. Fie $\mathbf{S}$ și $\hat{\mathbf{S}}$, matricele de repartiție ale celor doi multiporți. Relațiile de repartiție pot fi distribuite astfel:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ \mathbf{b}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12}\\ \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{b}}_1\\ \hat{\mathbf{b}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{S}}_{11} & \hat{\mathbf{S}}_{12}\\ \hat{\mathbf{S}}_{12} & \hat{\mathbf{S}}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{a}}_1\\ \hat{\mathbf{a}}_2\end{bmatrix}$$

unde $\mathbf{b}_1$ și $\mathbf{a}_1$ sînt m vectori, $\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_2, \hat{\mathbf{b}}_1$ și $\hat{\mathbf{a}}_1$ sînt k vectori, iar $\hat{\mathbf{b}}_2$ și $\hat{\mathbf{a}}_2$, n vectori. Matricea impedanțelor normate (independentă de frecvență) a fiecărui multiport este divizată, după cum urmează

$$\begin{matrix} & m & k \\ m & \bar{\mathbf{z}}_1(s) & 0 \\ k & 0 & \bar{\mathbf{z}}_2(s)\end{matrix}\;,\qquad \begin{matrix} & k & n \\ k & \bar{\mathbf{z}}_1(s) & 0 \\ n & 0 & \bar{\mathbf{z}}_2(s)\end{matrix}\;.$$

Fie S' matricea de repartiție a $(m+n)$-portului global, scrisă în forma

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix}.$$

(a) Să se găsească *condiția de compatibilitate*, care permite ca $\hat{b}_1 = a_2$, $\hat{a}_1 = b_2$ (vezi problema **P** 23).

(b) Să se arate că, parametrii de repartiție globali sînt dați de expresiile:

$$S'_{11} = S_{11} + S_{12}\hat{S}_{11}(U - S_{22}\hat{S}_{11})^{-1}S_{21} = S_{11} + S_{12}(U - \hat{S}_{11}S_{22})^{-1}\hat{S}_{11}S_{12}$$

$$S'_{12} = S_{12}(U - \hat{S}_{11}S_{22})^{-1}\hat{S}_{12}$$

$$S'_{21} = \hat{S}_{21}(U - S_{22}\hat{S}_{11})^{-1}S_{21}$$

$$S'_{22} = \hat{S}_{22} + \hat{S}_{21}(U - S_{22}\hat{S}_{11})^{-1}S_{22}\hat{S}_{12} = \hat{S}_{22} + \hat{S}_{21}S_{22}(U - \hat{S}_{11}S_{22})^{-1}\hat{S}_{25}$$

(c) Să se compare rezultatul general cu cazul particular tratat în problema **P 20** și să se arate că, rezultatul general se reduce la cel particular.

P 25. Circuitul cu patru porți încadrate cu linie puctată în fig. 8. P 25 reprezintă un repetor telefonic. Cei doi diporți notați cu L sînt filtre trece-jos, iar cei notați cu H sînt filtre trece-sus. Acești diporți sînt reciproci și simetrici, în consecință sînt definiți, fiecare, numai

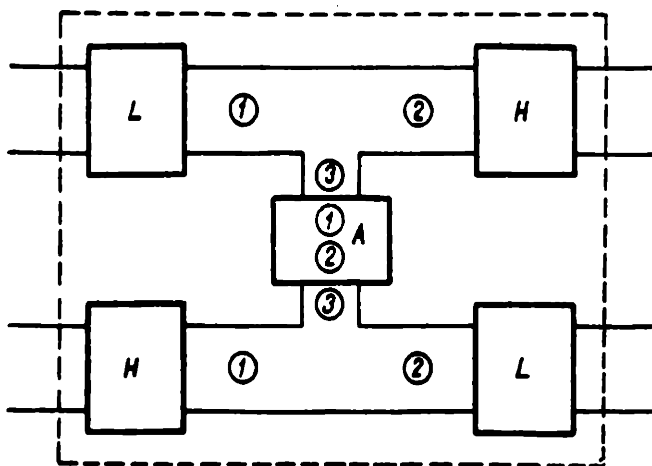


Fig. 8.P25

prin doi parametri. Diportul notat cu A este un amplificator, care transmite numai într-o singură direcție (în jos). Există de asemenea în repetor, doi triporți formați prin legătură direc-

tă. Matricele de repartiţie ale circuitelor componente sînt date în continuare avînd toate rezistenţele normate în raport cu 1 ohm:

$$\mathbf{S}_L = \begin{bmatrix} \rho_L & t_L \\ t_L & \rho_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_H = \begin{bmatrix} \rho_H & t_H \\ t_H & \rho_H \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_A = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ t & \rho_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}_j = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Să se găsească matricea de repartiţie pentru repetorul cu patru porţi. Examinînd elementele acestei matrice să se descrie modul în care semnalele de joasă şi de înaltă frecvenţă se transmit sau se reflectă, la fiecare poartă.

P 26. Matricele de repartiţie a curenţilor şi tensiunilor pentru cazul normării complexe la o singură frecvenţă, nu au fost definite în text. Să definim $\mathbf{S}_I$ şi $\mathbf{S}_V$ prin relaţiile

$$\mathbf{I}_r = \mathbf{S}_I \mathbf{I}_i \text{ şi } \mathbf{V}_r = \mathbf{S}_V \mathbf{V}_i .$$

Pornind de la relaţia (88) indicată în text să se arate că

$$\mathbf{S}_I = \mathbf{U} - 2\mathbf{Y}_a \mathbf{r}, \text{ unde } \mathbf{Y}_a = (\mathbf{Z}_{oc} + \mathbf{z})^{-1}$$

şi

$$\mathbf{z}\mathbf{S}_I = \mathbf{S}_V \mathbf{z}.$$

Prima din aceste relaţii este la fel cu (114), dedusă pentru normarea independentă de frecvenţă. Să se arate că, în mod similar situaţiei de la normarea independentă de frecvenţă:

$$\mathbf{z}(s)\mathbf{S}_I = \mathbf{S}_V \mathbf{z}(-s).$$

P 27. Fie $z_k(s)$ impedanţa complexă de normare la poarta k, a unui multiport.

(a) Dacă această poartă este terminată cu o impedanţă $z_k(-s)$, să se arate că variabilele incidente la această poartă sînt zero: $a_k = 0$

(b) Dacă poarta este terminată cu o impedanţă $-z_k(-s)$, să se arate că în acest caz $b_k = 0$.

P 28. Să se găsească matricea de repartiţie pentru transformatorul ideal din fig. 8. P 28, care are elementele normate în raport cu impedanţele de terminaţie (normare independentă de frecvenţă).

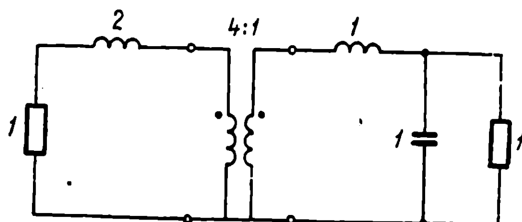


Fig. 8.P28

P 29. Să se găsească matricea de repartiție a giratorului din fig. 8. P 29, normată (independent de frecvență), în raport cu impedanțele de terminație. Să se verifice proprietățile coeficienților de reflexie și de transmisie ale diportului.

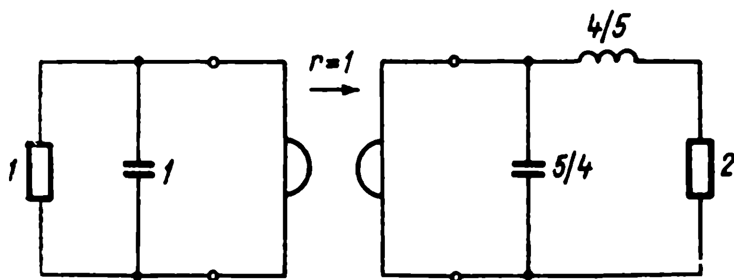


Fig. 8.P29

P 30. În fig. 8. P 30 *a* se reprezină un diport pasiv, nedisipativ, terminat pe o rezistență de -1 ohm. În fig. 8. P 30, *b*, același diport este terminat pe o rezistență de $+1$ ohm. Să se arate, utilizînd expresiile pentru Z și Z_1 în funcție de parametrii **z** sau **y** ai diportului, că $Z_1(s) = -Z(-s)$.

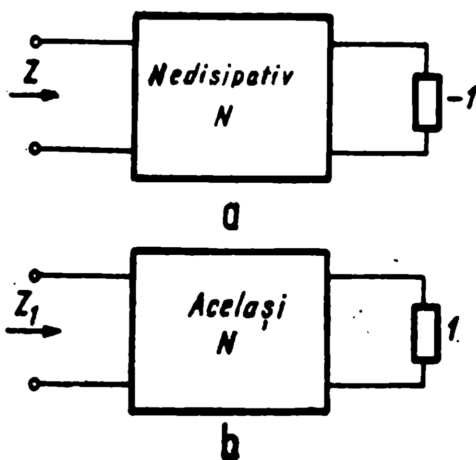


Fig. 8.P30

P 31. În fig. 8. P 31 *a* este reprezentat un circuit format din inductanțe și capacități

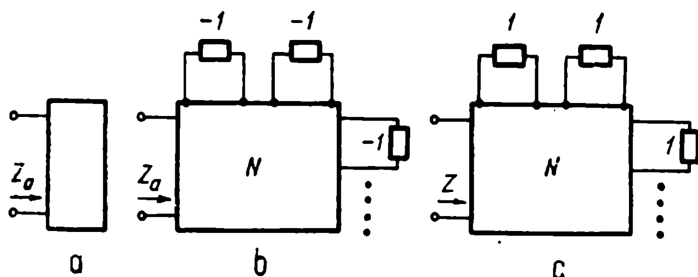


Fig. 8.P31

pozitive și $n-1$ rezistențe negative, care se consideră de -1 ohm, pentru simplificare. Acest circuit poate fi reprezentat prin n-portul din fig. 8.P 31 *b*, cu toate porțile, cu excepția uneia, terminate prin -1 ohm. Să considerăm același n-port, terminat la porți cu rezistențe de $+1$ ohm ca în fig. 8. P 31 *c* și avînd impedanța corespunzătoare Z. Scriind ecuațiile cu impedanțele de gol să se arate că $Z(s) = -Z_a(-s)$.

P 32. Fie $z_a(s)$ impedanța unui circuit activ conținînd inductanțe, capacități și rezistențe negative. Fie $z(s)$ impedanța ce se obține inversînd semnul tuturor rezistențelor. Fiecare din aceste circuite este destinat să lucreze ca terminație a unui diport $Z(s)$ Fie coeficienții de reflexie corespunzător, ρ_a respectiv ρ, normați în complex, independent de frecvență. Să se arate că $\rho_a(s) = 1/\rho(s)$.

P 33. Să se demonstreze rezultatul dat prin relația (121) din text.

P 34. Să se demonstreze că, determinantul unei matrice unitare este egal cu unitatea.

P 35. Fie S matricea de repartiție a unui triport pasiv, nedisipativ.
Ținînd seama de proprietățile unitare ale matricei S să se demonstreze următoarele. [Atunci cînd argumentul unui parametru nu este dat, se presupune că este $j\omega$: astfel S_{12} înseamnă S_{12} $(j\omega)$.]

$$S_{11}(-j\omega) = S_{22}S_{33}-S_{23}S_{32} \qquad S_{21}(-j\omega) = S_{13}S_{32}-S_{12}S_{33}$$

$$S_{12}(-j\omega) = S_{23}S_{31}-S_{21}S_{33} \qquad S_{22}(-j\omega) = S_{11}S_{33}-S_{13}S_{31}$$

$$S_{13}(-j\omega) = S_{21}S_{32}-S_{22}S_{31} \qquad S_{23}(-j\omega) = S_{12}S_{31}-S_{11}S_{32}$$

$$S_{31}(-j\omega) = S_{12}S_{23}-S_{13}S_{22}$$

$$S_{32}(-j\omega) = S_{13}S_{21}-S_{11}S_{23}$$

$$S_{33}(-j\omega) = S_{11}S_{22}-S_{12}S_{21}$$

P 36. Fie un triport reciproc, nedisipativ, avînd pe axa j, modulul unuia dintre coeficienții de transmisie identic 1. Ținînd seama de faptul că S este unitară și simetrică, să se arate că toți ceilalți parametri trebuie să fie identic nuli.

P 37. Se dorește realizarea unui amplificator cu rezistență negativă în forma arătată în fig. 8.P 37. Aceasta se obține din cea prezentată în fig 8.23 adăugînd un alt diport la poarta 2 a circuitorului. Urmînd procedura prezentată în text, să se găsească matricea S' a circuitului global al amplificatorului, în funcție de parametrii de repartiție ai fiecărui subcircuit din figură.

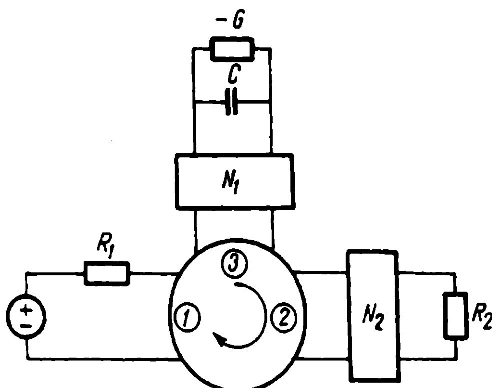


Fig. 8.P37

9

Grafurile de fluență a semnalelor și reacția

Modelul unei rețele liniare, așa cum a fost tratat pînă acum, include un număr de componente ca : rezistențe, condensatoare, giratoare, transformatoare etc. Fiecare din aceste componente au fost caracterizate printr-un parametru, așa cum este R, și printr-un simbol grafic așa cum este —▭— pentru rezistență. Rețelele sînt formate prin interconectarea acestor componente. În orice relație tensiune-curent interesul se concentrează adesea asupra unui parametru scalar : de exemplu scriind $v = Ldi/dt$, atenția a fost concentrată asupra lui L.

Dar orice relație tensiune-curent definește o *operație matematică*. În loc să ne concentrăm atenția asupra parametrului, putem pune accentul pe operațiile matematice și pe semnalele asupra căroia ele acționează. Un simbol operațional poate fi folosit pentru a reprezenta operația matematică și aceste simboluri operaționale pot fi interconectate într-o *diagramă operațională*. Analiza acestor diagrame operaționale va constitui un mijloc prin care se pot determina funcțiile de transfer ale rețelelor. *Graful de fluență al semnalelor* constituie o asemenea diagramă operațională.

Multe din metodele de analiză prezentate în capitolele precedente se aplică rețelelor liniare în genere, indiferent dacă sînt pasive sau active, reciproce sau nereciproce. Nu s-a acordat o atenție specială rețelelor active, nereciproce. Analiza pe baza grafurilor de fluență a semnalelor este indicată tocmai pentru astfel de rețele. Mai mult, pentru rețelele nereciproce active, o serie de concepte, ca reacția sau stabilitatea, devin foarte importante. Acest capitol va fi consacrat prezentării ideilor de bază referitoare la grafuri de fluență a semnalelor, reacție și stabilitate.

9.1. DIAGRAME OPERAŢIONALE

Fiecare element sau grup de elemente dintr-o reţea operează pe o anumită cale asupra unui semnal de excitaţie pentru a furniza un răspuns. Elementul sau sistemul de elemente poate fi considerat drept un operator. Procesul poate fi reprezentat ca în fig. 9.1 *a*. Semnalele de excitaţie şi de răspuns sînt reprezentate prin cîte un nod; între ele apare un bloc numit „operator". Săgeţile care intră şi care ies din acest bloc indică „trecerea semnalului".

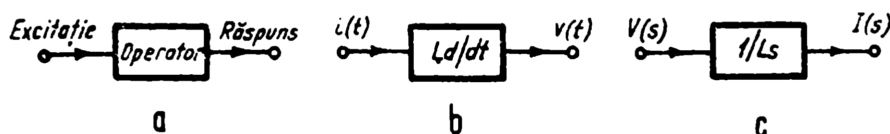


Fig. 9.1. Simboluri operaţionale.

În figura. 9.1 *b* şi *c* se consideră cazul particular al unei bobine. În fig. 9.1 *b* semnalele sînt reprezentate în domeniul timp. În fig. 9.1 *c*, unde semnalele sînt reprezentate în domeniul frecvenţei *s*, se arată că alegerea variabilei ce reprezintă excitaţia sau răspunsul este arbitrară, dacă reţeaua are condiţii iniţiale nule. Această posibilitate nu apare întotdeauna — de exemplu în cazul surselor controlate. În cele ce urmează se vor folosi transformatele Laplace şi deci toţi operatorii vor fi funcţii de variabila *s*.

Simbolul operaţional din fig. 9.1 este foarte simplu, dar el poate fi simplificat şi mai mult. În fond dreptunghiul nu este necesar; el poate fi înlocuit printr-un segment de dreaptă, iar operatorul poate fi scris alături. În acest caz va fi necesară doar o singură săgeată pentru a indica sensul de trecere al semnalelor. Acest lucru este ilustrat în fig. 9.2 pentru simbolul din fig. 9.1 *c*. Din punct de vedere dimensional operatorul poate fi de natura unei impedanţe, a unei admitanţe, a unei amplificări de curent etc. Se foloseşte termenul „transmitanţă" pentru a desemna operaţia prin care semnalul de excitaţie este multiplicat pentru a obţine răspunsul. Transmitanţa din fig. 9.1, *a* este $1/Ls$.

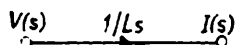


Fig. 9.2. Latura unei diagrame.

Există două tipuri de relaţii între variabilele dintr-o reţea sau dintr-un sistem. În unele relaţii o variabila se exprimă în funcţie de alta prin intermediul unui operator. În alte relaţii se exprimă un echilibru; teoremele lui Kirchhoff sînt de această natură. În toate aceste relaţii de echilibru,

o variabilă se poate exprima ca o combinație liniară a altor variabile. Astfel, expresia

$$V_1=3V_2-2sI+\frac{s+1}{s+2}V_3$$

poate fi reprezentată printr-o diagramă operațională atribuind cîte un nod pentru fiecare variabilă și introducînd laturi de transmitanțe corespunzătoare între aceste noduri și nodul reprezentativ al variabilei V_1. Acest lucru este ilustrat în fig. 9.3.

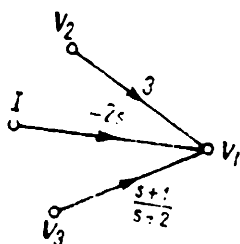


Fig. 9.3. Diagrama unei ecuații.

Dîndu-se o rețea, se poate trasa o diagramă operațională luînd transformatele operaționale ale ecuațiilor ce descriu funcționarea rețelei. Înainte de a descrie acest proces se vor da cîteva exemple simple. Se consideră doi diporți conectați serie-paralel așa cum se arată în fig. 9.4. O descriere completă a comportării lor între cele patru porți se poate obține pe baza parametrilor g dacă se cunosc acești parametri pentru fiecare dipórt. Totuși, se poate să nu ne intereseze o astfel de descriere completă; ne poate interesa, de exemplu, raportul dintre transformatele semnalelor de ieșire și de intrare, presupunînd că se cunosc aceste rapoarte pentru fiecare dipoit.

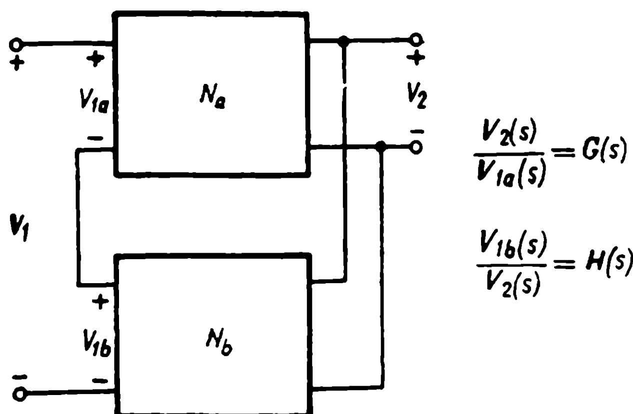


Fig. 9.4. Rețea cu reacție.

Funcţia respectivă poate fi obţinută dintr-o diagramă. Se presupune că cei doi diporţi nu se influenţează reciproc, adică presupunem că relaţiile caracteristice fiecărui diport rămîn aceleaşi şi după interconectarea lor.

Ecuaţiile care descriu această reţea sînt :

$$
\begin{aligned}
V_2 &= G(s)V_{1a}.\\
V_{1a} &= V_1 - V_{1b}.\\
V_{1b} &= H(s)V_2.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Prima şi ultima ecuaţie pot fi reprezentate prin laturile operaţionale din fig. 9.5 *a*. A doua ecuaţie exprimă un echilibru de tensiuni şi poate fi reprezentată prin laturile din fig. 9.5 *b*. Toate cele trei reprezentări pot fi acum combinate pentru a obţine rezultatul din fig. 9.5 *c*. Această diagramă operaţională reprezintă reţeaua din fig. 9.4 în aceeaşi măsură ca şi relaţiile (1).

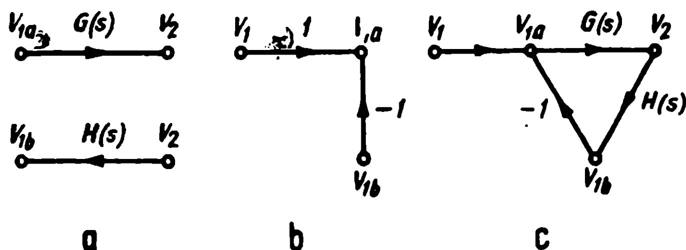


Fig. 9.5. Trasarea diagramei operaţionale.

Ca un al doilea exemplu se consideră reţeaua din fig. 9.6. Rezistenţa totală de la ieşire este R_3. Se pot scrie următoarele ecuaţii

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{R_3} V_2\\
V_2 &= V_b - \frac{1}{sC} I\\
V_b &= R_2(-gV_a - I) = -gR_2V_a - R_2I\\
V_a &= V_1 + aV_2.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Se poate trasa acum cîte o diagramă operațională pentru fiecare ecuație, așa cum se arată succesiv în fig. 9.7 *a* la *d*. Cînd toate aceste reprezentări sînt suprapuse se obține rezultatul final din fig. 9.7 *e*.

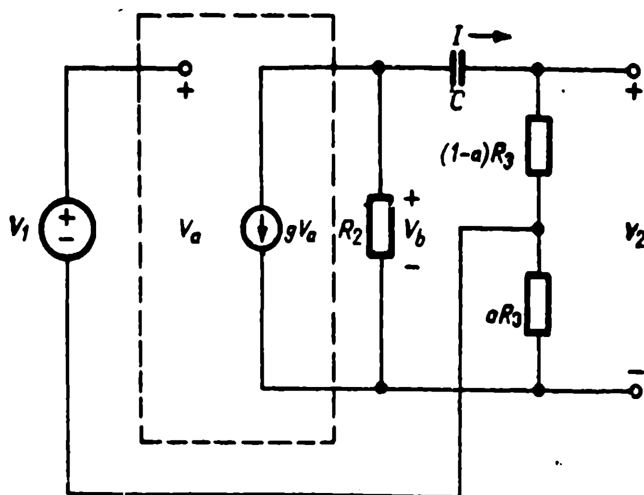


Fig. 9.6. Amplificator cu reacție.

Comparînd diagrama operațională cu schema amplificatorului de la care am pornit este evident că între cele două mijloace de reprezentare nu există o asemănare structurală. Diagrama operațională arată modul în care diversele părți ale rețelei operează asupra semnalelor din rețea pentru a furniza alte semnale Totuși, pentru componente pasive, oricare semnal poate fi considerat drept semnal de excitație și oricare drept răspuns. Aceasta înseamnă că diagrama operațională poate fi trasată în diferite moduri funcție de forma în care s-au scris ecuațiile.

Să presupunem, de exemplu, că primele trei ecuații din (2) sînt aranjate după cum urmează

$$V_2 = R_3 I$$

$$V_b = V_2 + \frac{1}{sC} I$$

$$I = -gV_a - \frac{1}{R_2} V_b.$$

Diagrama operațională corespunzătoare va avea forma din fig. 9.8, ceea ce se propune cititorului să verifice. În comparație cu diagrama precedentă ea arată cu totul altfel. Acest exemplu arată un fapt interesant și anume că nu există o diagramă operațională unică pentru o rețea dată.

Cele arătate anterior au atins o serie de probleme fundamentale. Pentru a trasa o diagramă operațională pentru o rețea se cere, în primul rînd, să se scrie ecuațiile care descriu comportarea rețelei. Aceasta pune pro-

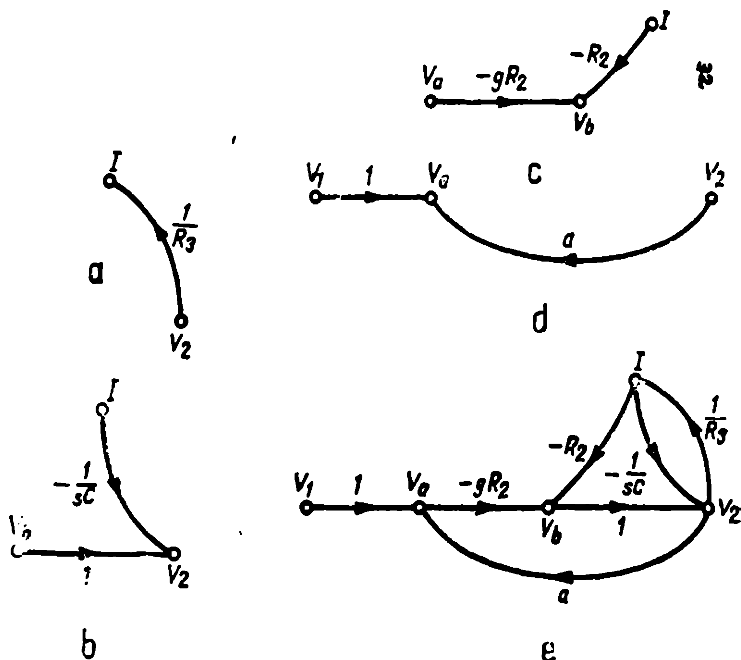


Fig. 9.7. Trasarea diagramei operaționale a amplificatorului.

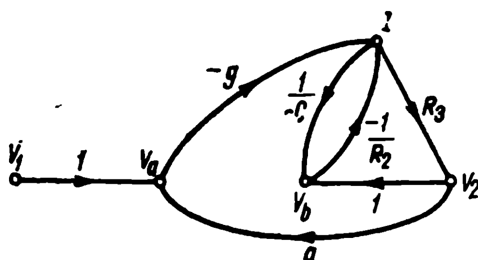


Fig. 9.8. O variantă a diagramei operaționale a amplificatorului.

blema variabilelor care trebuie alese pentru a descrie performanțele rețelei, cîte asemenea variabile sînt necesare și cîte ecuații trebuie scrise. Într-o tratare sistematică trebuie să se dea răspuns unor asemenea probleme. Răspunsurile vor fi amînate însă pentru a fi date într-unul din paragrafele următoare, pentru a face aici o analiză mai detaliată a diagramelor operaționale.

9.2. GRAFURI DE FLUENŢĂ A SEMNALELOR

Examinăm retrospectiv diagrama operaţională din fig. 9.8 pentru a observa proprietăţile ei abstracte. Ea constă dintr-un număr de laturi legate împreună prin noduri. Ea este deci un graf topologic. Laturile sînt *orientate* şi li se ataşează nişte *ponderi*.

Aceste observaţii vor sta la baza definiţiei care urmează. Vom defini un *graf de fluenţă a semnalelor* ca o reprezentare a ecuaţiilor sistemului printr-un graf *orientat* şi *ponderat*. Este clar deci, că un graf de trecere a semnalelor este legat de reţea numai prin ecuaţiile reţelei. Acestea sînt ecuaţiile care se reprezintă prin graf. Pentru a sublinia faptul că analiza pe baza grafului de fluenţă a semnalelor este o metodă generală şi nu este limitată la reţelele electrice, se va utiliza o notaţie generală.

Se consideră un sistem de ecuaţii liniare de forma

$$\mathbf{AX} = \mathbf{Y}. \tag{3}$$

În aplicaţii tipice elementele matricei $\mathbf{Y}$ sînt transformatele excitaţiilor iar elementele matricei $\mathbf{X}$ sînt transformatele răspunsurilor. Aceasta este forma standard în care se scriu sistemele de ecuaţii liniare, dar ea nu reprezintă o formă convenabilă pentru trasarea grafurilor de trecere a semnalelor. Examinînd exemplele precedente se observă că o formă convenabilă este aceea în care fiecare variabilă este explicitată în funcţie de celelalte. Acest lucru se poate obţine adunînd vectorul $\mathbf{X}$ în ambii membri ai relaţiei (3) şi rearanjînd termenii sub forma

$$\mathbf{X} = -\mathbf{Y} + (\mathbf{A} + \mathbf{U})\mathbf{X}. \tag{4}$$

În numeroase aplicaţii apare o singură funcţie de excitaţie. Această funcţie poate să apară, desigur în mai multe ecuaţii din (4). Dacă apare o singură funcţie de excitaţie y_0, atunci matricea $\mathbf{Y}$ se poate scrie sub forma

$$\mathbf{Y} = \mathbf{K}y_0, \tag{5}$$

unde $\mathbf{K}$ este o matrice coloană. Cu această reprezentare relaţia (4) devine

$$\mathbf{X} = [-\mathbf{K} \quad (\mathbf{A}+\mathbf{U})]\begin{bmatrix} y_0 \\ \mathbf{X} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Dacă apar mai multe funcţii de excitaţie, scalarul y_0 se înlocuieşte prin matricea $\mathbf{Y}_0$, iar matricea $\mathbf{K}$ va avea mai multe coloane în loc de una singură.

Dacă matricea $\mathbf{X}$ este de ordinul n atunci matricea coeficienţilor din relaţia (6) este de ordinul $(n, n+1)$. În cele ce urmează se vor mări dimensiunile acestei matrice prin adăugare de elemente nule pentru a obţine o matrice pătrată $\mathbf{C}$ de forma

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mathbf{K} & \mathbf{A}+\mathbf{U} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Această matrice poate fi asociată cu un graf orientat şi ponderat aşa cum se arată în continuare. Pentru fiecare coloană din matricea $\mathbf{C}$ se atribuie cîte un nod, marcat prin simbolul variabilei asociate lui. Pentru fiecare element nenul c_{ij} din matricea $\mathbf{C}$ se trasează o latură orientată de la nodul j la nodul i şi marcată prin mărimea c_{ij} ca pondere. Această pondere se numeşte *transmitanţa* laturii. Dacă $c_{ij} = 0$, nu va exista o latură de la nodul j la nodul i. Graful orientat şi ponderat care se obţine reprezintă graful de trecere a semnalelor pentru sistemul de ecuaţii (6). Matricea $\mathbf{C}$ se numeşte *matricea de conexiune* a grafului. Drept exemplu, se consideră următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ -y_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Atunci

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}+\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

şi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Matricea de conexiune corespunzătoare este

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Graful de fluență a semnalelor pentru acest sistem de ecuații va avea patru noduri marcate prin y_0, x_1, x_2, x_3. Acestea se plasează în mod convenabil, ca in fig. 9.9 *a*. Se trasează apoi laturile în conformitate cu matricea de conexiune. Astfel, în linia a treia (corespunzătoare lui x_2, prima linie formată numai din zerouri a fost introdusă pentru a face matricea C pătra-

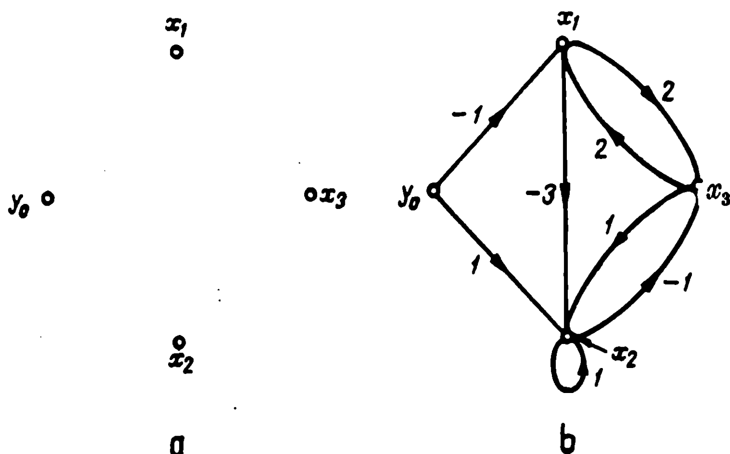


Fig. 9.9. Trasarea unui graf de trecere a semnalului.

tă) și pe coloana a patra (corespunzătoare lui x_3) se află un element nenul de valoare 1. Așadar va exista o latură de la x_3 la x_2 cu ponderea 1. Toate celelalte laturi sînt introduse în același mod, rezultatul final fiind ilustrat în fig. 9.9 *b*.

Proprietățile grafului

Pe baza considerentelor din exemplele anterioare și din alte exemple se pot deduce o serie de proprietăți ale grafurilor de fluență a semnalelor. Fie, de exemplu, nodul corespunzător lui y_0 din fig. 9.9. Apar două laturi care pleacă din acest nod, dar nu există nici o latură care să intre în el. Semnalul y_0 nu este deci cauza altor semnale. El reprezintă o sursă. Un nod la care sînt incidente numai laturi care pleacă din nodul respectiv se numește *nod sursă*. Similar un nod la care sînt incidente numai laturi care intră in nodul respectiv se numește *nod sarcină* (*nod puț*). Nici unul din celelalte noduri care apar în fig. 9.9 nu satisfac această condiție. Totuși, un nod sarcină poate fi introdus întotdeauna în mod simplu într-un graf de trecere a semnalelor. În fig. 9.9, de exemplu, adăugînd ecuația $x_3 = x_3$ se va introduce un nod nou marcat prin x_3 și legat printr-o latură de transmitanță 1 de vechiul nod x_3. Orice nod, cu excepția nodului sursă, poate fi considerat drept un nod sarcină.

O altă observație care se degajă din fig. 9.9 este aceea că există secvențe de laturi care pleacă dintr-un nod și se întorc în același nod. O astfel de secvență se numește *buclă de reacție* și fiecare latură dintr-o buclă de reacție este o *latură de reacție*. Există desigur și secvențe de laturi care nu formează bucle de reacție. Astfel, plecînd din x_1 de-alungul laturii -3 pînă în x_2; apoi din x_2 la x_3 de-a lungul laturii -1 și de la x_3 înapoi la x_1 de-a lungul laturii 2 care iese din x_1 nu se parcurge o buclă de reacție deoarece latura incidentă la x_1 este parcursă în sens opus orientării sale. Se poate merge de la x_1 la x_3 și apoi la x_2 dar nu se poate reveni la x_1 deoarece orientarea laturii -3 este opusă sensului de parcurgere. Unele bucle de reacție sînt formate dintr-o singură latură, așa cum este cazul laturii de transmitanță 1 care pleacă și se întoarce la nodul x_2. O astfel de buclă se numește *buclă proprie*. Orice nod care face parte dintr-o buclă de reacție se numește *nod de reacție*. În fig. 9.9, exceptînd nodul y_0, toate celelalte noduri sînt noduri de reacție.

Nu toate laturile unui graf fac parte din bucla de reacție. Orice latură care nu este o latură de reacție se numește *latură cascadă*. În fig. 9.9 *b* cele două laturi care pleacă din nodul y_0 sînt laturi cascadă. Toate celelalte laturi din acest graf sînt laturi de reacție.

Acele noduri care nu sînt nici noduri sursă și nici noduri sarcină vor avea laturi incidente care intră și care ies. Variabila corespunzătoare unui asemenea nod are două roluri: ea este semnalul dat de laturile care intră în nod și în același timp semnalul care pleacă prin toate laturile care ies din nod. Aceste două roluri pot fi separate prin *despicarea* nodului. Pentru a ilustra cele de mai sus se consideră graful din fig. 9.10 *a*. Nodul x_1 are laturi incidente care intră și care ies. În fig. 9.10 *b* nodul x_1 a fost despicat în două noduri notate cu x_1 și x_1'. Unul din ele (x_1) este un nod sursă, din care toate laturile ies. Altul (x_1') este un nod sarcină în care toate laturile intră. Prin despicarea unui nod se întrerup toate buclele de reacție ce trec prin nodul respectiv. Prin despicarea unui număr corespunzător de noduri toate buclele de reacție ale grafului pot fi întrerupte. Numărul minim de

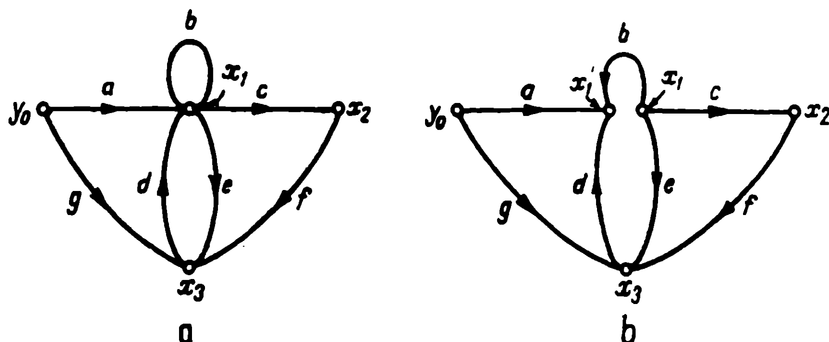


Fig. 9.10. Despicarea unui nod.

noduri care trebuie despicate pentru a întrerupe toate buclele de reacție dintr-un graf se numește *indexul* grafului de fluență a semnalelor. În graful din fig. 9.10 *a* apar trei bucle de reacție; în graful din fig. 9.10 *b*, unde s-a despicat nodul x_1, nu există bucle de reacție. Așa dar indexul grafului din fig. 9.10 *a* este unu. O mulțime de noduri, avînd nu număr de elemente egal cu indexul grafului, care trebuie despicate pentru a întrerupe toate buclele de reacție se numește mulțimea *nodurilor esențiale*. În fig. 9.10 această mulțime (care conține în acest caz un singur nod) este unică: numai nodul x_1 este un nod esențial. În alte cazuri pot exista mai multe mulțimi de noduri esențiale.

Inversarea unui graf

Faptul că un nod particular dintr-un graf de trecere a semnalelor este un nod sursă este rezultatul modului în care s-au scris ecuațiile prezentate prin graf. Prin rearanjarea acestor ecuații un nod care era nod sursă poate să devină un nod care nu este sursă și un nod care nu era nod sursă poate să devină nod sursă. De exemplu, dintr-o ecuație explicitată în raport cu x_2 se poate explicita x_1 după cum urmează:

$$x_2 = ax_1 + bx_3 + cx_4$$

$$x_1 = \frac{1}{a} x_2 - \frac{1}{a} (bx_3 + cx_4).$$

Graful corespunzător primei relații este cel din fig. 9.11 *a*; graful corespunzător celei de a doua relații este cel din fig. 9.11 *b*.

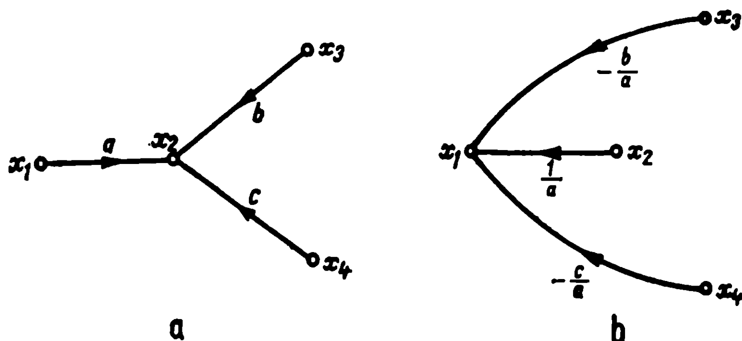


Fig. 9.11. Inversarea unei laturi.

Să ne concentrăm atenţia asupra laturii de transmitanţă a care apare de la x_1 la x_2. În graful modificat sensul acestei laturi a fost inversat şi transmitanţa a fost inversată. În acelaşi timp se observă ce s-a întîmplat cu celelalte laturi. Latura care intra iniţial în x_2 de la x_3 a fost deplasată la x_1 iar transmitanţa ei a fost împărţită prin transmitanţa cu semn schimbat a laturii care a fost inversată. Aceeaşi modificare o suferă şi latura care iniţial venea de la x_4 la x_2. Din ecuaţii se vede clar, că orice altă latură care iniţial ar intra în x_2, va suferi aceleaşi schimbări.

Rezultatul acestui proces se numeşte *inversarea unei laturi.* Inversarea unei laturi se poate face pentru orice latură care pleacă dintr-un nod sursă şi conduce la transferarea nodului respectiv într-un nod sarcină. Acelaşi proces se poate aplica pentru o cale formată dintr-un număr oarecare de laturi între un nod şi altul. Se inversează pe rînd cîte o latură, plecînd de la nodul sursă. Acest proces este ilustrat în fig. 9.12. (Graful este acelaşi ca şi în fig. 9.7 cu simboluri generale pentru transmitanţe.) Se urmăreşte inversarea căii dintre V_1 şi I. Se inversează mai întîi latura a, ceea ce conduce la graful din fig. 9.12 *b*. Acum nodul V_a a devenit un nod sursă; aşadar se poate inversa latura b ceea ce conduce la graful din fig. 9.12 *c*. Se inversează apoi succesiv laturile c şi e. Graful final cu calea inversată este dat în fig. 9.12 *d*.

Se observă că graful original din fig. 9.12 *a* are trei bucle de reacţie şi este de index 1; aşadar un singur nod (V_2) trebuie despicat pentru a întrerupe toate buclele de reacţie. Totuşi, graful cu calea inversată este un graf în cascadă, care nu are bucle de reacţie. Acesta este un graf mai simplu.

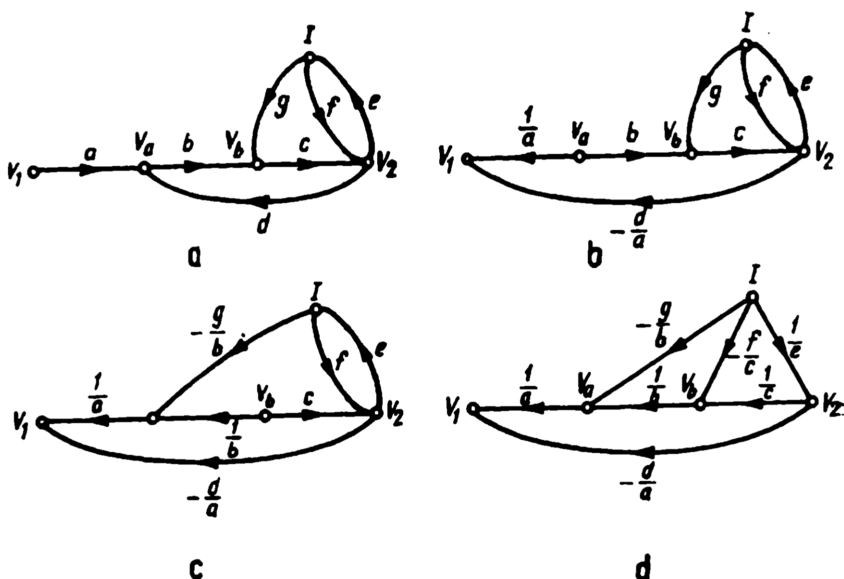


Fig. 9.12. Inversarea unei căi.

În loc să se inverseze o cale deschisă se poate inversa o buclă. În acest caz procesul începe prin despicarea unui nod al buclei; se creează astfel un nod sursă și un nod sarcină. Se inversează apoi calea deschisă dintre aceste noduri, după care nodul despicat este recombinat. Detaliile se lasă pe seama cititorului.

Reducerea unui graf

Un graf de fluență a semnalelor este o reprezentare a unui sistem de ecuații. Așa cum sistemul de ecuații poate fi soluționat în raport cu orice variabile în funcție de excitații, tot așa și graful poate fi „soluționat". O metodă de soluționare a ecuațiilor constă în eliminarea succesivă a variabilelor. Procesul analog pentru graf constă în eliminarea succesivă a nodurilor grafului pînă cînd rămîn doar nodurile sursă și nodurile sarcină. Acest proces va fi examinat în cele ce urmează.

Se consideră graful din fig. 9.10 *a* și se presupune că trebuie eliminat nodul x_3. Relațiile dintre variabilele care rămîn se vor menține dacă se vor introduce noi laturi în graf între perechi de noduri. Transmitanțele acestor laturi trebuie să fie astfel încît să se mențină transmitanțele căilor între toate perechile de noduri pentru toate căile ce trec prin nodul de eliminat. Pentru a ilustra aceasta, se examinează graful din fig. 9.10 care este reprodus în fig. 9.13 *a*.

In graf apare o cale de la y_0 la x_1 trecînd prin x_3, cu transmitanța gd. În graful redus, din care nodul x_3 este eliminat, se va introduce o latură între y_0 și x_1 de transmitanță gd. În fig. 9.13 *b* nodul x_3 împreună cu laturile inci-

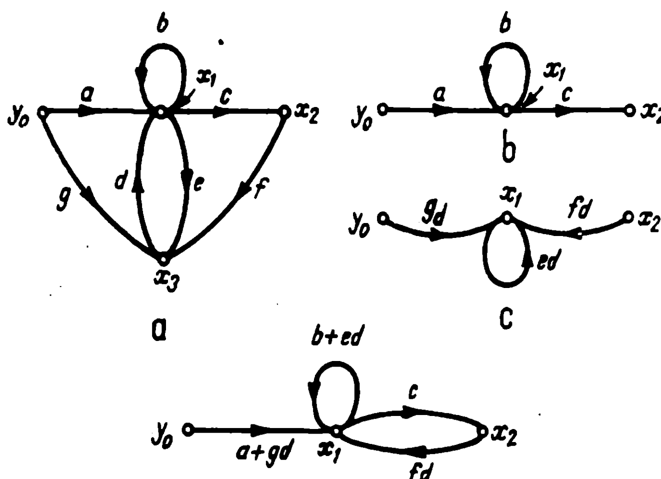


Fig. 9.13. Eliminarea unui nod.

dente care intră şi ies a fost eliminat, păstrîndu-se căile care leagă între ele direct celelalte noduri fără a trece prin nodul intermediar x_3. În fig. 9.13 *c* se prezintă aceleaşi noduri împreună cu laturile care trebuie adăugate pentru a realiza transmitanţele corespunzătoare căilor ce treceau prin nodul intermediar x_3. Graful redus care se obţine în final prin combinarea celor două părţi este dat în fig. 9.13 *d*. Acest graf se numeşte *echivalent* cu graful original deoarece semnalele din orice nod sînt aceleaşi cu semnalele nodurilor respective din graful original. (Se propune cititorului să verifice aceasta.) Se observă că nodul eliminat în acest exemplu nu avea o buclă proprie. Evident, acest proces nu mai poate fi aplicat dacă există o buclă proprie. Ceea ce s-a ilustrat printr-un exemplu va fi prezentat acum în termeni generali. Se consideră ecuaţiile care definesc un graf de trecere a semnalelor date de relaţiile (6). Fie x_n un nod fără buclă proprie. S-a ales acest nod în mod arbitrar. Eliminarea nodului x_n din graf este echivalentă cu elimiuarea variabilei x_n din ecuaţii.
Ecuaţia pentru x_n este

$$x_n = c_{n0} y_0 + \sum_{k=1}^{n-1} c_{nk} x_k. \tag{8}$$

Pentru a elimina x_n se substituie această expresie în celelalte ecuaţii; apoi relaţia (8) nu mai este luată în consideraţie. Dacă ecuaţia originală pentru x_p este

$$x_p = c_{p0} y_0 + \sum_{k=1}^{n-1} c_{pk} x_k + c_{pn} x_n, \tag{9}$$

ecuaţia modificată, după substituirea lui x_n din (8), devine

$$\begin{aligned} x_p &= c_{p0} y_0 + \sum_{k=1}^{n-1} c_{pk} x_k + c_{pn} c_{n0} y_0 + \sum_{k=1}^{n-1} c_{pn} c_{nk} x_k = \\ &= (c_{p0} + c_{pn} c_{n0}) y_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (c_{pk} + c_{pn} c_{nk}) x_k. \end{aligned} \tag{10}$$

Pentru a interpreta această expresie în raport cu graful, se observă că $c_{pn} c_{n0}$ este transmitanţa de la nodul sursă y_0 la nodul x_p trecînd prin nodul intermediar x_n. În primul termen din dreapta această transmitanţă se adună cu transmitanţa directă c_{p0} de la y_0 la x_p. Similar, $c_{pn} c_{nk}$ este transmitanţa de la nodul x_k la nodul x_p trecînd prin nodul x_n. Ecuaţia arată că acest termen se adună cu transmitanţa directă de la x_k la x_p. Dacă fiecare transmitanţă este modificată în acest mod, x_n poate fi eliminat din graf şi transmitanţele între toate celelalte noduri rămîn neschimbate.

Acum să considerăm cazul cînd există o buclă proprie la nodul x_n, ceea ce înseamnă că $c_{nn} \neq 0$. În acest caz ecuația x_n este

$$x_n = c_{n0}\, y_0 + \sum_{k=1}^{n-1} c_{nk}\, x_k + c_{nn}\, x_n . \tag{11}$$

Ultimul termen poate fi trecut în stînga și apoi se poate explicita x_n

$$x_n = \frac{c_{n0}}{1 - c_{nn}}\, y_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_{nk}}{1 - c_{nn}}\, x_k . \tag{12}$$

Aceasta este ecuația pentru un nod fără o buclă proprie. În raport cu graful, ecuația arată că dacă transmitanța fiecărei laturi ce intră în nodul x_n se împarte prin $1-c_{nn}$, bucla proprie poate fi eliminată. După această transformare nodul x_n poate fi eliminat așa cum s-a arătat mai înainte.

Împărțirea prin $1-c_{nn}$ se poate face numai dacă $c_{nn} \neq 1$. Sîntem evident în dificultate cînd $c_{nn}=1$. Referindu-ne din nou la fig. 9.9, se vede că în acest caz apare în graf o buclă proprie cu transmitanța 1. Totuși ecuațiile reprezentate prin graf sînt liniar independente și deci pot fi soluționate. În aceste cazuri se pot rearanja întotdeauna ecuațiile astfel încît să nu apară un element egal cu unitatea pe diagonala principală a matricei respective. Un astfel de element nedorit poate să apară numai dacă ecuațiile nu sînt independente — în care caz nu ne putem aștepta la o soluție unică.

Operațiile precedente pot fi de asemeni interpretate în raport cu matricea de conexiune. Această matrice are forma următoare, dacă nodul x_n nu are o buclă proprie.

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{ccccc:c} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1,n-1} & c_{1n} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2,n-1} & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \dots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ \hdashline c_{n0} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{n,n-1} & 0 \end{array}\right] \tag{13}$$

Partiția arată că ultima linie și ultima coloană vor fi eliminate. Se observă că $c_{nn} = 0$ deoarece x_n nu are o buclă proprie.

Să considerăm acum ecuația tipică (10) din sistem, după modificările introduse prin eliminarea lui x_n. Matricea de conexiune corespunzătoare va fi de forma

$$\mathbf{C}_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{10} + c_{1n}c_{n0} & c_{11} + c_{1n}c_{n1} & \cdots & c_{1,n-1} + c_{1n}c_{n,n-1} & c_{1n} \\ c_{20} + c_{2n}c_{n0} & c_{21} + c_{2n}c_{n1} & \cdots & c_{2,n-1} + c_{2n}c_{n,n-1} & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n-1,0} + c_{n-1,n}c_{n0} & c_{n-1,1} + c_{n-1,n}c_{n1} & \cdots & c_{n-1,n-1} + c_{n-1,n}c_{n,n-1} & c_{n-1,n} \\ c_{n0} & c_{n1} & \cdots & c_{n,n-1} & 0 \end{array}\right] \quad (14)$$

unde linia și coloana exterioară s-au adăugat pentru comparație cu ecuațiile precedente.

Acum se observă modul în care s-a obținut matricea de conexiune modificată plecînd de la matricea inițială (13). Un element din ultima coloană a matricei $\mathbf{C}$, fie acesta c_{1n}, se multiplică cu fiecare element de pe ultima linie. Aceste produse se adună la elementele corespunzătoare din matricea de conexiune. Astfel c_{1n} multiplicat cu c_{n3} se adună cu c_{13}, care este elementul din linia a doua și coloana a patra a matricei de conexiune. (Se observă că indicii pentru linii și coloane încep de la zero.) Acest proces se repetă pentru fiecare element din ultima coloană. Acest proces de reducere succesivă a unei matrice de conexiune se numește *algoritmul de eliminare a nodurilor*.

Dacă nodul x_n are o buclă proprie elementul c_{nn} din matricea de conexiune e diferit de zero. Împărțirea tuturor transmitanțelor laturilor care intră în nodul x_n din graf prin $1-c_{nn}$ corespunde împărțirii tuturor elementelor de pe ultima linie a matricei de conexiune prin $1-c_{nn}$ și înlocuirii elementelor de pe diagonala principală prin zero. După aceasta poate fi aplicat algoritmul de eliminare a nodurilor.

Repetînd aceste operații, graful de trecere a semnalelor poate fi redus la nodurile sursă și nodurile sarcină. Dacă există numai un singur nod sursă și un singur nod sarcină, graful se reduce la o singură latură, de la sursă la sarcină. Transmitanța acestei laturi se numește *amplificarea grafului*.

Pentru a ilustra procedeul, considerăm sistemul de ecuații

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} y_0.$$

Modificînd sistemul ca în relația (6) obținem

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Graful corespunzător de fluență a semnalelor este desenat în fig. 9.14.

Să presupunem că dorim soluția pentru nodul x_1. Atunci vom parcurge următoarele operații plecînd de la matricea de conexiune din relația (15). Reducerile corespunzătoare ale grafului de fluență sînt ilustrate în fig. 9.15, fazele corespunzătoare fiind notate cu aceeași literă.

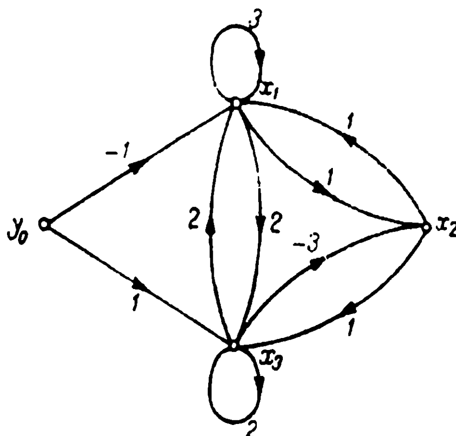


Fig. 9.14. Graf de trecere a semnalului.

a) Eliminăm bucla proprie nodului x_3 împărțind transmitanțele tuturor laturilor care intră în nod prin $(1-c_{44})=1-2=-1$.
Matricea de conexiune rezultată este

$$\mathbf{C}_1 = \begin{matrix} y_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \\ x_3 \end{matrix}\overset{\begin{matrix} y_0 & x_1 & x_2 & & x_3 \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ -1 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ -1 & -2 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}}$$

b) Eliminăm nodul x_3 prin algoritmul de eliminare a nodurilor. Matricea de conexiune rezultată este

$$\mathbf{C}_2 = \begin{matrix} y_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{matrix}\overset{\begin{matrix} y_0 & x_1 & x_2 \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix}}.$$

Prin acest proces a apărut o buclă proprie nodului x_2 de transmitanţă egală cu 3 şi este interesant de observat în ce mod au fost modificate celelalte transmitanţe.

c) Eliminăm bucla proprie nodului x_2 împărţind transmitanţele laturilor care intră în nod prin $1-3=-2$.
Atunci

$$C_3 = \begin{array}{c} \\ y_0 \\ x_1 \\ \\ x^2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_0 & x_1 & x_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

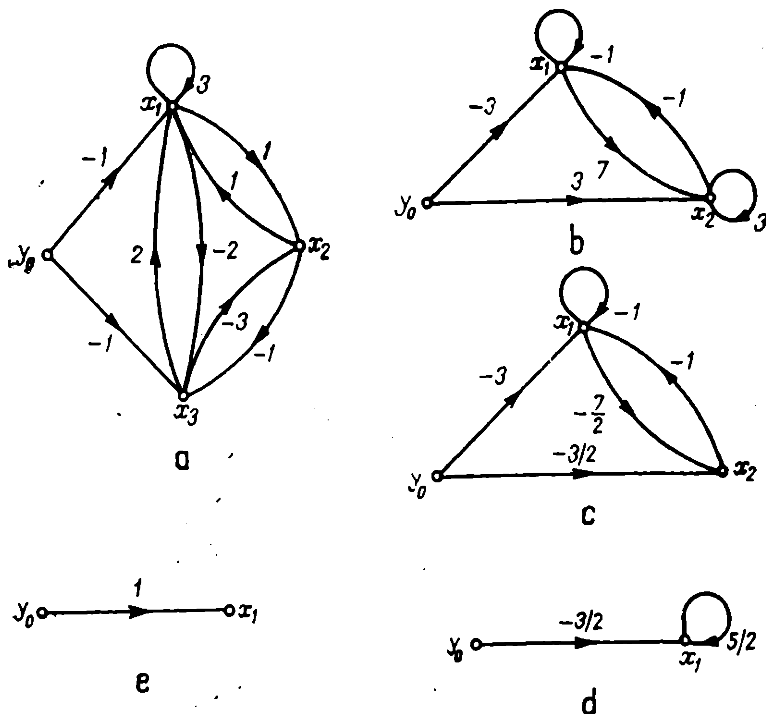


Fig. 9.15. Reducerea unui graf de trecere a semnalului.

d) Eliminăm nodul x_2 pentru a obţine

$$\mathbf{C}_4 = \begin{array}{c} \\ y_0 \\ x_1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_0 & x_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right] \end{array}.$$

e) Eliminăm bucla proprie nodului x_1 împărțind transmitanțele laturilor care intră în nod prin $1-5/2 = -3/2$. În această fază matricea de conexiune este

$$C_5 = \begin{array}{c} \\ y_0 \\ x_1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_0 & x_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Astfel găsim că $x_1 = y_0$. E evident că soluția poate fi obținută operînd transformări numai asupra matricei, sau numai asupra grafului.

Reducerea grafului de fluență a semnalelor în scopul determinării amplificării grafului poate fi realizată de asemeni prin procedeul inversării căii. Acest procedeu este ilustrat prin graful din fig. 9.16 *a*. Dacă se inversează calea de la y_0 la x_3, graful devine cel din fig. 9.16 *b*. În această formă el poate fi redus cu ușurință. Mai întîi, laturile $1/a$ și $1/b$ sînt în cascadă. Rezultanta acestora este în paralel cu latura $-c/a$. În sfîrșit, rezultanta celor trei este în cascadă cu latura $1/d$. Graful redus este arătat în fig. 9.16 *c*. Amplificarea grafului pentru graful inițial este

$$\frac{x_3}{y_0} = \frac{abd}{1-bc}.$$

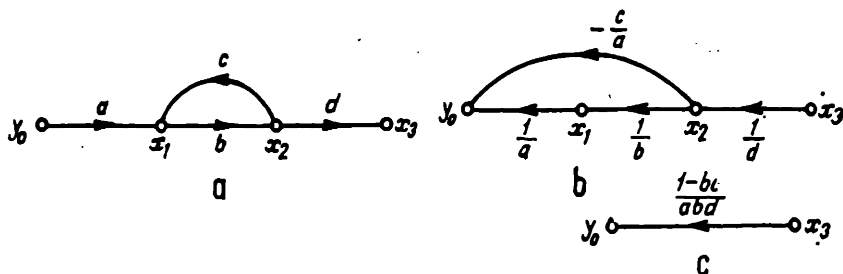


Fig. 9.16. Inversarea și reducerea unui graf.

Reducerea la un graf esențial

Procesul de reducere a grafului descris anterior constă din eliminarea nodurilor cîte unul pe rînd ; totuși aceasta nu reprezintă o cerință absolută. Mai multe noduri pot fi eliminate simultan. Singura cerință este aceea de a introduce laturi între perechi de noduri din graful redus, pentru a ține seama de transmitanțele tuturor căilor, dintre aceleași perechi de noduri din graful original.

Un alt punct de vedere este acela de a ne fixa atenţia nu asupra nodurilor ce vor fi eliminate ci asupra nodurilor care vor rămîne în graful redus. Un graf redus deosebit de util se obţine dacă se reţin numai o mulţime de noduri esenţiale, împreună cu nodul sursă şi nodul sarcină; un astfel de graf se numeşte *graf esenţial*. Indiferent de structura grafului original, pentru un index dat, graful esenţial va avea o structură fixă. Astfel, pentru indexul 2 şi un singur nod sursă, un graf esenţial va avea structura din fig. 9.17. Aici în cazul general, vor apare transmitanţe de la nodul

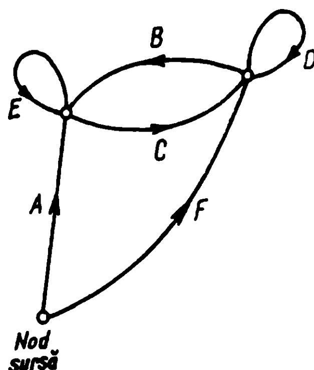


Fig. 9.17. Graf esenţial cu indexul 2.

sursă la fiecare din nodurile esenţiale şi de la fiecare nod esenţial la toate celelalte noduri esenţiale. Vor apare de asemeni bucle proprii la toate nodurile esenţiale. Este necesar să se determine doar valorile transmitanţelor. În cazuri particulare, desigur, unele laturi din graful esenţial pot să lipsească.

Pentru ilustrare, se consideră graful din fig. 9.20 din subparagraful următor. Acesta are indexul 2, deşi are şase bucle de reacţie; nodurile esenţiale sînt V_1 şi I_3, iar nodul sursă este V_g. Rămîne să se calculeze transmitanţele; de exemplu, în graful original sînt trei căi de la V_1 la I_3 cu următoarele transmitanţe: $-G_3$, $-\alpha Y_1 R_4 G_3$ şi $Y_2 \mu Z_2 G_3 = \mu G_3$. Deci în graful esenţial latura de la V_1 la I_3 va avea transmitanţa $G_3(\mu - 1 - \alpha Y_1 R_4 \mathrm{T})$. Celelalte transmitanţe se evaluează similar, obţinîndu-se rezultatul final din fig. 9.18

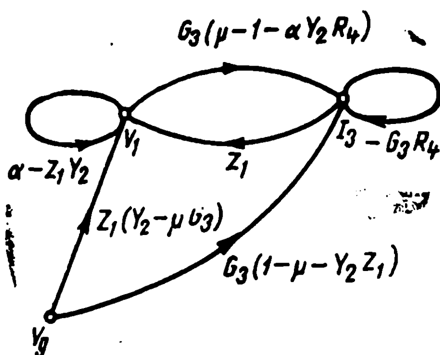


Fig. 9.18. Graf esenţial.

Expresia amplificării grafului

Deşi simplu şi direct, procesul de reducere a grafului aşa cum a fost descris este totuşi obositor. Ar fi preferabil să dispunem de o formulă unică pentru amplificarea grafului, care să poată fi scrisă plecînd direct de la graf, fără alte transformări. O astfel de formulă există de fapt [1]. Demonstraţia ei nu implică cunoştinţe deosebite sau o pregătire matematică specială, dar este destul de lungă. Vom da aici rezultatele omiţînd demonstraţia.

Fie un graf de fluenţă a semnalelor cu un singur nod sursă şi un singur nod sarcină. Fie G amplificarea grafului iar G_k transmitanţa căii directe k (fără bucle) de la sursă la sarcină. Unele dintre buclele grafului pot avea noduri sau laturi comune cu alte bucle. Vom spune că o mulţime de bucle sînt *neadiacente* dacă ele nu se ating, adică nu există nici un nod şi nici o latură comună pentru nici-o pereche de bucle din mulţime. Amplificarea grafului este dată de relaţia

$$G = \frac{1}{\Delta} \sum_{\substack{\text{toate} \\ \text{căile} \\ \text{directe}}} G_k \Delta_k \tag{16}$$

unde *determinantul grafului* Δ este dat de relaţia

$$\Delta = 1 - \sum_j P_{j1} + \sum_j P_{j2} - \sum_j P_{j3} + \ldots, \tag{17}$$

în care

P_{j1} este *amplificarea buclei* de reacţie j (produsul tuturor transmitanţelor laturilor ce formează bucla);
P_{j2} — *produsul* amplificărilor *perechii* de bucle neadiacente j;
P_{j3} — *produsul* amplificărilor *tripletului* de bucle neadicente j etc.

Al doilea indice la P_{ji} se referă la numărul de bucle neadiacente. Determinantul Δ_k este determinantul subgrafului neadiacent cu calea directă k dintre sursă şi sarcină.

Să exemplificăm acum utilizarea acestei expresii. Ca o primă ilustrare, se consideră graful original din fig. 9.12. Un nod sarcină se poate crea în mod simplu introducînd un nod marcat prin I şi legat printr-o latură de transmitanţă unitate de vechiul nod I. În acest graf apar trei bucle cu amplificările bcd, gce şi ef. Deoarece toate au cel puţin cîte un nod comun, ele sînt adiacente. Deci

$$\Delta = 1 - ef - gce - bcd.$$

---

[1] S. J. Mason, "*Feedback Theory—Further Properties of Signal-Flow Graphs,*" Proc. IRE, vol. 44, July 1956, p. 920—926.

Aici apare o singură cale directă între nodul sursă V_1 și nodul sarcină I; amplificarea acestei căi este $G_1 = abce$. Toate cele trei bucle sînt adiacente cu această cale; deci $\Delta_1 = 1$. Amplificarea grafului este prin urmare

$$G = \frac{V_1}{I} = \frac{abce}{1-ef-gce-bcd}.$$

Să examinăm acum graful inversat din fig. 9.12 *d*. Acesta este un graf în cascadă, fără bucle de reacție. Deci $\Delta=1$ și $\Delta_k=1$ pentru orice k. Amplificarea grafului de la I la V_1 este în acest caz suma transmitanțelor căilor directe. Apar în total patru căi de la I la V_1. Deci

$$\frac{I}{V_1} = -\frac{d}{ae} + \frac{1}{abce} - \frac{f}{abc} - \frac{g}{ab} = \frac{1-ef-gce-bcd}{abce}.$$

Acest rezultat este în concordanță cu cel obținut anterior.

Ca un al doilea exemplu, considerăm graful din fig. 9.20 din subparagraful următor. Fie V_4 semnalul pe care dorim să-l evaluăm. Graful are în total șase bucle. Dintre acestea două perechi de bucle sînt neadiacente și anume: bucla $V_4 I_3 V_4$ cu bucla $V_1 I_2 V_1$ și cu bucla $V_1 I_5 V_1$. Nu există triplete de bucle neadiacente. Se fac în continuare următoarele calcule:

Bucle	Amplificările buclelor P_{j1}	P_{j2}
1. $V_1I_2V_1$	$-Z_1Y_2$	$G_3R_4Z_1Y_2$ (1, 2)
2. $V_4I_3Y_4$	$-G_3R_4$	$-\alpha G_3R_4$ (2, 3)
3. $V_1I_5V_1$	$\alpha Y_1Z_1 = \alpha$	
4. $V_1I_3V_1$	$-Z_1G_3$	
5. $V_1I_2V_6I_3V_1$	$Y_2\mu Z_2G_3Z_1 = \mu Z_1G_3$	
6. $V_1I_5V_4I_3V_1$	$-\alpha Y_1R_4G_3Z_1 = -\alpha G_3R_4$	

Rezultă

$$\Sigma P_{j1} = \alpha - G_3R_4 - \alpha G_3R_4 - Z_1Y_2 - (1-\mu)Z_1G_3$$

$$\Sigma P_{j2} = -\alpha G_3R_4 + G_3R_4Z_1Y_2$$

$$\Delta = 1 - \Sigma P_{j1} + \Sigma P_{j2} = 1 - \alpha + G_3R_4 + \alpha G_3R_4 + Z_1Y_2 + (1-\mu)Z_1G_3 - \alpha G_3R_4 + Z_1Y_2G_3R_4$$
$$= 1 - \alpha + G_3R_4 + Z_1Y_2(1 + G_3R_4) + (1-\mu)Z_1G_3.$$

Se observă că în calculul lui Δ termenul G_3R_4 ce provine din P_{j1} se reduce cu termenul similar ce provine din P_{j2}. Aceasta arată că formula amplificării nu este o formulă de efort minim, așa cum sînt formulele topologice din capitolul 3.

În continuare se determină numărătorul din formula amplificării grafului. Se fac următoarele calcule :

Căi directe	Amplificările căilor G_k	Δ_k
1. $V_gI_3V_4$	G_3R_4	$\Delta_1=1-\alpha+Z_1Y_2$
2. $V_gI_2V_1I_5V_4$	αY_2R_4	$\Delta_2=1$
3. $V_gI_2V_6I_3V_4$	$-\mu G_3R_4$	$\Delta_3=1-\alpha$
4. $V_gI_2V_1I_3V_4$	$-Z_1Y_2G_3R_4$	$\Delta_4=1$
5. $V_gI_3V_1I_5V_4$	αG_3R_4	$\Delta_5=1$

Rezultă

$$\Sigma G_k\Delta_k = G_3R_4 - \alpha G_3R_4 + G_3R_4Z_1Y_2 + \alpha Y_2R_4$$
$$- (1-\alpha)\mu G_3R_4 + \alpha G_3R_4 - G_3R_4Z_1Y_2$$
$$= G_3R_4[1-\mu(1-\alpha)] + \alpha Y_2R_4.$$

Se fac din nou reduceri de termeni. În sfîrșit, amplificarea grafului este

$$G = \frac{V_4}{V_g} = \frac{G_3R_4[1-\mu(1-\alpha)] + \alpha Y_2R_4}{(1+G_3R_4)(1+Z_1Y_2)-\alpha+(1-\mu)Z_1G_3}.$$

Se observă că formula amplificării grafului se aplică foarte simplu. Pot interveni erori doar dacă se omit bucle de reacție sau căi directe între intrare și ieșire. O examinare sistematică elimină totuși posibilitatea apariției acestor erori.

Expresia amplificării grafului din relația (16) este o funcție a rețelei care reprezintă raportul dintre transformata răspunsului și transformata excitației. Evident, se obține aceeași funcție indiferent dacă se folosește graful de trecere al semnalelor sau dacă se pleacă de la ecuațiile rețelei scrise sub forma $\mathbf{AX} = \mathbf{Y}$, ca în relația (3). Deoarece în ultimul caz funcția rețelei se exprimă prin determinantul sistemului, adică det $\mathbf{A}$, înseamnă că determinantul grafului trebuie să fie det $\mathbf{A}$.

Trasarea grafului de trecere a semnalelor pentru o rețea

În cele precedente s-a presupus că sistemul de ecuații liniare este dat sub forma standard (3). O problemă mai uzuală este aceea în care se dă rețeaua ce urmează a fi analizată și se urmărește să se obțină o expresie

pentru o funcție a rețelei. Dîndu-se rețeaua, se dorește să se traseze direct graful de trecere a semnalelor, examinînd doar schema rețelei. O altă posibilitate ar fi să se scrie direct matricea de conexiune.

În toate cazurile, prima problemă care apare este alegerea unor variabile. Diverse alegeri ale variabilelor vor conduce la diferite grafuri de trecere a semnalelor pentru aceeași rețea. Alegerea variabilelor este dictată de diverse considerente, dar în orice caz trebuie să includă variabila sursei independente și variabilele de răspuns. Indiferent ce variabile se aleg și ce ecuații se scriu, două condiții trebuie satisfăcute :

1. Sistemul de ecuații obținut trebuie să reprezinte o descriere adecvată a rețelei ;

2. Ecuațiile obținute trebuie să fie liniar independente.

Anumite alegeri ale variabilelor și ecuațiilor nu sînt prea utile dacă se recurge apoi la metoda grafurilor de trecere a semnalelor. De exemplu, am putea alege simplu curenții buclelor sau tensiunile nodurile drept variabile și să reprezentăm prin grafuri de trecere a semnalelor ecuațiile pe bucle sau pe noduri. Acest procedeu este desigur corect și nu implică alte comentarii.

O tratare mai convenabilă însă constă din alegerea unor variabile mixte, așa cum s-a făcut în § 2.7. Deoarece tensiunile ramurilor și curenții joncțiunilor unui arbore sînt topologic independenți, aceste mărimi se aleg drept variabile. Mai departe apar doar diferențe minore față de tratarea din Capitolul 2. Aici sursele independente nu vor fi considerate drept laturi separate ci vor fi luate întotdeauna împreună cu laturile care le însoțesc. Așa cum am făcut în capitolul 4, totuși, vom considera aceste surse ca laturi separate. Sursele independente de tensiune trebuie să fie ramuri iar sursele independente de curent—joncțiuni.

Din teoremele lui Kirchhoff și printr-o partiție adecvată se obțin următoarele ecuații :

$$\mathbf{I}_{ta} = -\mathbf{Q}_l \mathbf{I}_{la} \tag{18 a}$$

$$\mathbf{V}_{ta} = -\mathbf{B}_t \mathbf{V}_{ta} \tag{18 b}$$

unde indicele a se pune pentru a semnifica „toate". Joncțiunile vor include toate sursele independente de curent și ramurile vor include toate sursele independente de tensiune. Se fac partiții ale matricelor curenților și tensiunilor pentru a pune în evidență sursele. Dacă se fac partiții convenabile ale matricelor $\mathbf{Q}_l$ și $\mathbf{B}_t$ se obțin ecuațiile

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I}_t\\ \mathbf{I}_{tg}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_{g1}\\ \mathbf{Q}_2 & \mathbf{Q}_{g2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_l\\ \mathbf{I}_g\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_1\mathbf{I}_l + \mathbf{Q}_{g1}\mathbf{I}_g\\ \mathbf{Q}_2\mathbf{I}_l + \mathbf{Q}_{g2}\mathbf{I}_g\end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}_l\\ \mathbf{V}_{lg}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{g1}\\ \mathbf{B}_2\mathbf{B}_{g2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_t\\ \mathbf{V}_g\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\mathbf{V}_t + \mathbf{B}_{g1}\mathbf{V}_g\\ \mathbf{B}_2\mathbf{V}_t + \mathbf{B}_{g2}\mathbf{V}_g\end{bmatrix}. \tag{20}$$

În aceste expresii $\mathbf{I}_{tg}$ reprezintă curenţii surselor de tensiune (care sînt ramuri) iar $\mathbf{V}_{lg}$ reprezintă tensiunile surselor de curent (care sînt joncţiuni).

În continuare se consideră relaţiile tensiune—curent. Deoarece curenţii joncţiunilor şi tensiunile ramurilor vor fi variabile în graful de trecere a semnalelor, relaţiile tensiune-curent vor trebui să exprime explicit $\mathbf{I}_l$ şi $\mathbf{V}_t$ în funcţie de $\mathbf{V}_l$ şi $\mathbf{V}_t$. Aceasta înseamnă că ecuaţiile vor avea forma hibridă

$$\mathbf{I}_l = \mathbf{Y}_l\mathbf{V}_l + \mathbf{G}_{12}\mathbf{I}_t \tag{21 a}$$

$$\mathbf{V}_t = \mathbf{G}_{21}\mathbf{V}_l + \mathbf{Z}_t\mathbf{I}_t. \tag{21 b}$$

Se observă că tensiunile şi curenţii surselor independente nu sînt incluşi în aceste ecuaţii.

Prima linie din relaţiile (19) şi (20) se introduce în (21) şi se obţine

$$\mathbf{I}_l = -(\mathbf{Y}_l\mathbf{B}_1\mathbf{V}_t + \mathbf{Y}_l\mathbf{B}_{g1}\mathbf{V}_g + \mathbf{G}_{12}\mathbf{Q}_1\mathbf{I}_l + \mathbf{G}_{12}\mathbf{Q}_{g1}\mathbf{I}_g) \tag{22 a}$$

$$\mathbf{V}_t = -(\mathbf{G}_{21}\mathbf{B}_1\mathbf{V}_t + \mathbf{G}_{21}\mathbf{B}_{g1}\mathbf{V}_g + \mathbf{Z}_t\mathbf{Q}_1\mathbf{I}_l + \mathbf{Z}_t\mathbf{Q}_{g1}\mathbf{I}_g). \tag{22 b}$$

Aceste ecuaţii au forma din relaţia (4) pentru care se poate trasa graful de trecere a semnalelor.

Variabilele pentru care s-au scris ecuaţiile sînt curenţii tuturor joncţiunilor cu excepţia surselor independente de curent şi tensiunile tuturor ramurilor cu excepţia surselor independente de tensiune. Menţionăm că aceste variabile nu depind de curenţii prin sursele de tensiune ($\mathbf{I}_{tg}$) şi de tensiunile la bornele surselor de curent ($\mathbf{V}_{lg}$). Totuşi, se poate intîmpla ca aceste variabile să reprezinte variabile de răspuns a căror expresie se caută. În graful de trecere a semnalelor fiecare variabilă dintre acestea este reprezentată printr-un nod sarcină; ecuaţiile corespunzătoare sînt date de linia a doua din relaţiile (19) şi (20) care se repetă aici.

$$\mathbf{I}_{tg} = -(\mathbf{Q}_2\mathbf{I}_l + \mathbf{Q}_{g2}\mathbf{I}_g) \tag{23 a}$$

$$\mathbf{V}_{lg} = -(\mathbf{B}_2\mathbf{V}_t + \mathbf{B}_{g2}\mathbf{V}_g). \tag{23 b}$$

Din relaţiile (22) şi (23) se poate trasa un graf de trecere a semnalelor. Sîntem siguri că aceste ecuaţii sînt independente şi deci se poate găsi soluţia lor. Ştim de asemeni că aceste ecuaţii reprezintă o descriere adecvată deoarece, orice altă variabilă se poate obţine îndată ce sînt cunoscute variabilele care intervin aici. Totuşi, dacă ar fi necesar să se scrie mai întîi matricele $\mathbf{Q}_l$ şi $\mathbf{B}_l$; apoi să se facă o partiţie a lor; apoi să se scrie relaţiile tensiune-curent şi să se determine toate matricele din relaţia (21);

și in fine să se scrie relațiile (22) și (23), utilitatea folosirii grafului de trecere a semnalelor ar putea fi pusă la îndoială. Dezvoltările anterioare reprezintă, de fapt, o „ teoremă de existență". Pentru o rețea dată nu vom parcurge aceste etape pentru a trasa graful de trecere a semnalelor. Se va folosi un proces mult mai simplu, ilustrat prin exemplele ce urmează.

Încă o chestiune trebuie lămurită. Cînd s-au examinat ecuațiile în variabilele mixte din § 2.7, relațiile tensiune-curent și anume relațiile (110) din Capitolul 2 au fost inverse în raport cu cele din relația (21). Pentru alegerea făcută acolo selectarea laturilor surselor controlate în calitate de ramuri sau joncțiuni s-a făcut în conformitate cu tabelul 22. Cu alegerea făcută aici pentru relațiile tensiune-curent, selectarea trebuie să fie inversată. Astfel, de exemplu, latura comandată a unei surse de curent controlate trebuie să fie acum o joncțiune, iar latura comandată a unei surse de tensiune — o ramură.

Exemplul 1.

Se consideră rețeaua din fig. 9.19 *a*. Aici apar două surse controlate. Graful rețelei este dat în fig. 9.19 *b*, cu arborele reprezentat prin linii îngroșate.

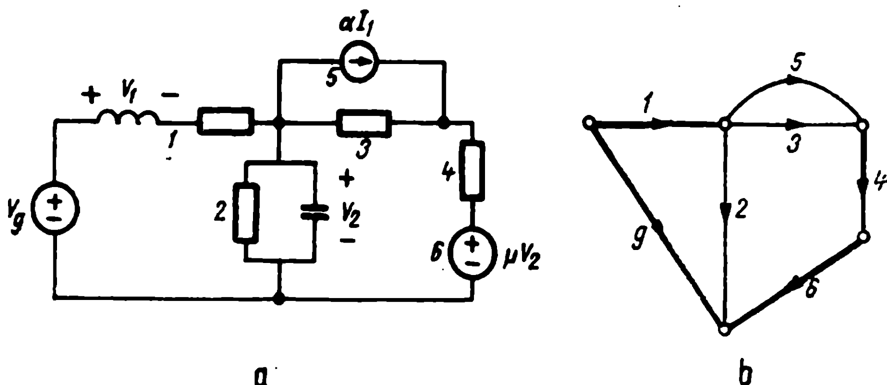


Fig. 9.19. Exemplu de rețea (*a*) și graful respectiv (*b*).

Trebuie scrise acum ecuațiile pentru curenții joncțiunilor și tensiunile ramurilor. Curentul oricărei joncțiuni care nu reprezintă o sursă controlată, poate fi exprimat în funcție de tensiunea respectivă, care poate fi exprimată la rîndul său, în funcție de tensiunile ramurilor. Astfel, pentru joncțiunile 2 și 3 se obțin ecuațiile

$$I_2 = Y_2 V_2 = Y_2 V_g - Y_2 V_1,$$

$$I_3 = G_3 V_3 = - G_3 V_1 + G_3 V_g - G_3 V_6 - G_3 V_4 .$$

O singură joncțiune este formată dintr-o sursă de curent controlată, $I_5 = \alpha I_1$. Curentul I_1 este curentul prin ramura 1 și se poate exprima în funcție de tensiunea respectivă. Asrtfel

$$I_5 = \alpha Y_1 V_1 .$$

Pentru ramurile care nu sînt formate din surse de tensiune controlate, tensiunile ramurilor pot fi exprimate în funcție de curenții joncțiunilor. Astfel, ecuațiile pentru ramurile 1 și 4 sînt

$$V_1 = Z_1 I_1 = Z_1 I_2 + Z_1 I_3 + Z_1 I_5$$

$$V_4 = R_4 I_4 = R_4 I_3 + R_4 I_5 .$$

Pentru ramura 6 care este formată dintr-o sursă controlată, ecuația este

$$V_6 = \mu V_2 = \mu Z_2 I_2 .$$

Se poate trasa acum graful de fluență a semnalelor care este dat in fig. 9.20.

Fig. 9.20. Graful de trecere a semnalelor pentru rețeaua din fig. 19.

Aceasta are un număr mare de bucle de reacție (șase) dar indexul său este numai doi, deoarece prin despicarea nodurilor V_1 și I_3 se întrerup toate buclele. Se poate aplica acum procedeul de reducere a grafului pentru a obține orice variabilă.

Dacă se dorește să se calculeze impedanța de intrare a rețelei, la bornele corespunzătoare sursei independente de tensiune, trebuie calculat curentul prin sursa de tensiune. Această variabilă nu apare în graf, dar se poate crea ușor un nod sarcină pentru I_g, deoarece $I_g = - I_2 - I_3 - I_5$. Amplificarea grafului între nodurile V_g și I_g reprezintă impedanța de intrare cu semn schimbat.

Exemplul 2.

Ca un al doilea exemplu se consideră rețeaua din fig. 9.21. Ecuațiile pentru curenții joncțiunilor sînt

$$I_4 = G_4 V_4 = G_4 V_2 + G_4 V_3$$

$$I_5 = g V_3 .$$

Similar, ecuațiile pentru tensiunile ramurilor sînt

$$V_1 = \frac{1}{sC_1} I_1 = \frac{1}{sC_1} I_g + \frac{1}{sC_1} I_5$$

$$V_2 = \frac{1}{sC_2} I_2 = \frac{1}{sC_2} I_g - \frac{1}{sC_2} I_4 + \frac{1}{sC_2} I_5$$

$$V_3 = R_3 I_3 = R_3 I_g - R_3 I_4 .$$

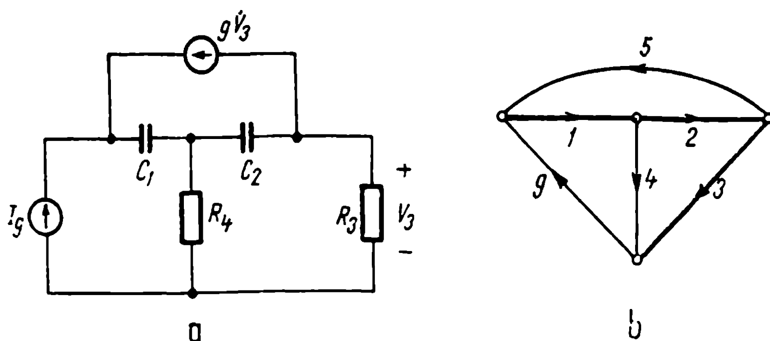


Fig. 9.21. Exemplu de reţea (*a*) şi graful respectiv (*b*).

Graful de fluenţă a semnalelor trasat pe baza acestor ecuaţii este dat în fig. 9.22. Acesta este un graf mai simplu decît cel din exemplul precedent. El are trei bucle de reacţie şi toate pot fi întrerupte prin despicarea nodului I_4. Aşadar indexul său este 1.

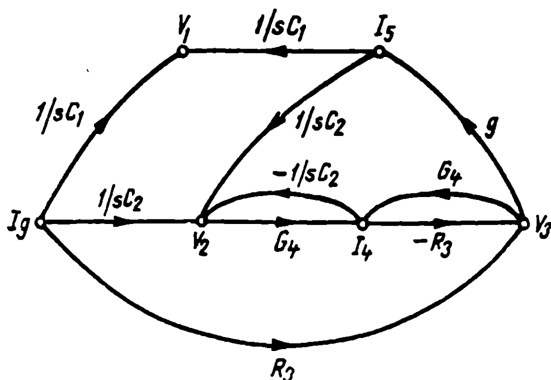


Fig. 9.22. Graful de trecere al semnalului pentru exemplu.

9.3. REACŢIA

O imagine intuitivă asupra conceptului de reacţie în procesele fizice a existat de mult timp, dar abia în 1930 acest concept a devenit mai precis şi a căpătat o semnificaţie matematică prin lucrările lui Bode. În mod calitativ spunem că o reţea este o reţea cu reacţie dacă unele variabile, fie de ieşire fie interne, sînt utilizate ca intrări pentru unele părţi ale reţelei astfel încît ele pot să afecteze propriile lor valori. Se spune, tot calitativ, că ieşirea, sau o parte din ea, se reintroduce la intrare.

Ca o ilustrație, să examinăm schema amplificatorului din fig. 9.6. Aici o parte din tensiunea de intrare V_a a blocului figurat cu linii întrerupte este o funcție de tensiunea de ieșire V_2. Astfel întotdeauna tensiunea de ieșire este influențată de propria ei valoare. Acest efect de reacție are o mare influență asupra comportării rețelei. În cele ce urmează se va discuta conceptul de reacție pe o cale cantitativă.

Raportul de întoarcere și diferența de întoarcere

Se consideră la început graful de trecere a semnalului din fig. 9.23 *a*. Ne concentrăm atenția asupra laturii cu transmitanța k. Această mărime se consideră un parametru specific al rețelei, așa cum sînt μ sau α pentru sursele controlate[1]. Această presupunere implică faptul că graful rețelei poate fi astfel trasat încît parametrul dorit să apară distinct ca transmitanță pentru o singură latură. Se pot modifica întotdeauna ecuațiile rețelei (prin introducerea unor variabile auxiliare sau prin combinații liniare convenabile) astfel încît să se obțină acest rezultat, cu excepția cazurilor cînd același parametru apare de mai multe ori chiar în schema rețelei. Acesta este cazul, de exemplu, cu raportul de transformare la un transformator și cu raportul de girație la un girator.

Vom introduce acum un nod auxiliar x_0 în latura k, cu o transmitanță egală cu unitatea de la x_1 la x_0, așa cum se arată în fig. 9.23 *b*. Prin aceasta se introduce o ecuație auxiliară $x_0 = x_1$, fără să se modifice celelalte ecuații. Pasul următor constă din despicarea nodului x_0, așa cum se arată în fig. 9.23 *c*, făcînd să apară astfel un nod sursă și un nod sarcină. În același timp se elimină toate celelalte noduri sursă din graf. (Aceasta înseamnă scurtcircuitarea surselor independente de tensiune și întreruperea tuturor surselor independente de curent din rețea). O măsură a reacției referitoare la parametrul k se obține determinînd semnalul ce revine în seminodul sarcină la aplicarea unui semnal egal cu unitatea în seminodul sursă al nodului despicat. Definim *raportul de întoarcere* a lui k, notat T_k, ca fiind raportul dintre $-x_0'$ și x_0 cînd nodul x_0 este introdus în latura k și apoi despicat așa cum s-a arătat. În fig. 9.23 raportul de întoarcere a lui k este $T_k = -kb$. (În această definiție s-a introdus semnul minus pentru a fi în conformitate cu notațiile consacrate din teoria reglării automate.)

---

[1] Presupunerea că k este un parametru specific al rețelei nu este esențială pentru a defini raportul de întoarcere. Totuși, presupunerea se face cu scopul de a stabili o relație simplă între raportul de întoarcere și senzitivitatea amplificării în raport cu variația unui parametru a rețelei, care se va defini ulterior.

O altă măsură a reacţiei se obţine luînd diferenţa dintre semnalul unitate aplicat în seminodul sursă şi semnalul care revine în seminodul sarcină a nodului despicat. Această mărime se numeşte *diferenţa de întoarcere*

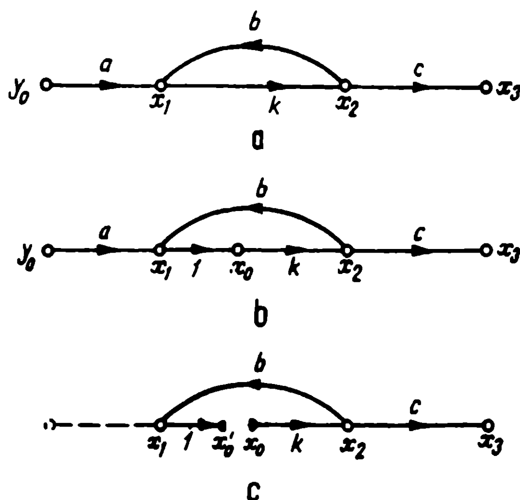


Fig. 9.23. Determinarea raportului de întoarcere.

şi se notează prin F_k. Cele două măsuri ale reacţiei sînt legate prin relaţia

$$F_k = 1 + T_k. \tag{24}$$

Să explicităm calculul raportului de întoarcere şi al diferenţei de întoarcere pentru un graf ceva mai complicat. Să reluăm graful din fig. 9.7 corespunzător amplificatorului din fig. 9.6. Fie transconductanţa g parametrul care ne interesează. Acest parametru poate să apară o singură dată în graf, dar el nu este singurul parametru ce intervine. Graful poate fi modificat aşa cum se arată în fig. 9.24 *a* pentru a fi adus la forma dorită. Se elimină nodul sursă V_g şi se introduce un nod auxiliar în latura g, nod care se despică. Rezultatul este dat în fig. 9.24 *b*.

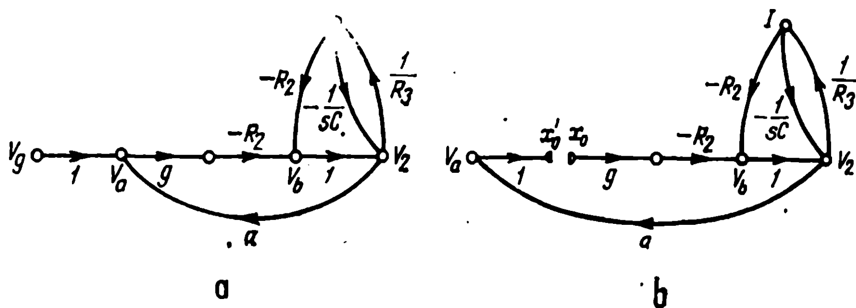


Fig. 9.24. Calculul diferenţei de întoarcere.

Amplificarea grafului cu semn schimbat între x_0 şi x'_0 reprezintă raportul de întoarcere. El se determină aplicînd formula (16) din care rezultă

$$T_g = \frac{-x'_0}{x_0} = \frac{gR_2a}{1-(-1/R_3Cs)-(-R_2/R_3)} = \frac{gaR_2R_3Cs}{(R_2+R_3)Cs+1}.$$

Diferenţa de întoarcere se determină din relaţia (24) şi este

$$F_g = 1 + T_g = \frac{(R_2 + R_3 + gaR_2R_3)Cs + 1}{(R_2 + R_3)Cs + 1}. \tag{25}$$

Calculînd determinantul grafului pentru graful original din fig. 9.24 *a* se poate face o observaţie interesantă. Acest determinant este

$$\Delta = 1 + \frac{R_2}{R_3} + gaR_2 + \frac{1}{R_3Cs} = \frac{(R_2 + R_3 + gaR_2R_3)Cs + 1}{R_3Cs}. \tag{26}$$

Comparînd această expresie cu expresia obţinută anterior pentru F_g se observă că numărătorul lui F_g şi numărătorul lui Δ sînt aceiaşi. Acest rezultat nu este întîmplător ci are un caracter general aşa cum se va arăta în continuare.

Se consideră diagrama din fig. 9.25, care reprezintă o porţiune dintr-un graf de trecere a semnalelor, ce conţine latura k între nodurile x_a şi x_b. S-a introdus un nod x_0 care a fost despicat. Înainte de a face această operaţie ecuaţiile corespunzătoare grafului sînt date de relaţia (6) şi se repetă aici

$$\mathbf{X} = -\mathbf{K}y_0 + (\mathbf{A} + \mathbf{U})\mathbf{X}. \tag{27}$$

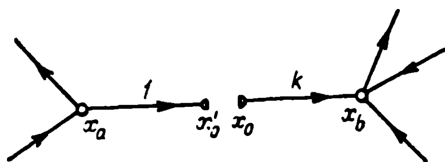


Fig. 9.25. Determinarea diferenţei de întoarcere.

Pentru nodul x_b are loc relaţia

$$x_b = kx_a + a_{b0}y_0 + \sum_{j \neq a} a_{bj}x_j, \tag{28}$$

şi se presupune că parametrul k nu mai apare în nici un alt coeficient a_{obj} şi că nu există alte căi directe între x_a şi x_b.

Presupunem acum că ecuaţiile corespunzătoare nodului x_b şi tuturor celorlalte noduri se rescriu sub forma

$$\mathbf{AX} = \mathbf{Y}. \tag{29}$$

Ecuaţia (28) pentru x_b devine

$$-kx_a + x_b - \sum_{j \neq a} a_{bj} x_j = a_{b0} y_0. \tag{30}$$

Matricea coeficienţilor sistemului de ecuaţii este **A**. Pentru a găsi o expresie a determinantului matricei **A**, presupunem că acesta se dezvoltă după linia b şi se grupează termenii care nu conţin pe k. Suma acestor termeni reprezintă valoarea lui det **A** cînd $k = 0$. Această valoare se notează prin Δ^0. Atunci

$$\det \mathbf{A} = \Delta = \Delta^0 - k\Delta_{ba}, \tag{31}$$

unde Δ_{ba} este un cofactor al lui **A**.

Revenim acum la calculul diferenţei de întoarcere. Mai întîi se elimină toate nodurile sursă. Aceasta înseamnă că se egalează cu zero partea dreaptă a relaţiei (29). Apoi se introduce un nod care este despicat aşa cum se arată în fig. 9.25. Prin această operaţie se introduce un nou nod sursă x_0, care intervine numai în ecuaţia pentru x_b, ceea ce este echivalent cu a aduna kx_0 în linia b din membrul drept al relaţiei (29). Mai mult, aşa cum se vede din fig. 9.25, termenul kx_a care apărea în ecuaţia pentru x_b acum nu mai apare. Deci kx_a este eliminat din linia b din membrul stîng al relaţiei (29). Toate buclele de reacţie din graful original, cu excepţia buclei ce conţine latura k, sînt incluse în graful modificat. Deci determinantul acestui graf se obţine din determinantul vechiului graf punînd $k = 0$. Dar acesta s-a notat anterior prin Δ^0. Deci amplificarea noului graf, care este tocmai raportul de întoarcere cu semn schimbat, este

$$-T_k = \frac{x_0'}{x_0} = \frac{k\Delta_{ba}}{\Delta^0}. \tag{32}$$

Diferenţa de întoarcere se poate calcula acum după cum urmează:

$$F_k = 1 + T_k = 1 - \frac{k\Delta_{ba}}{\Delta^0} = \frac{\Delta^0 - k\Delta_{ba}}{\Delta^0},$$

sau, utilizînd relaţia (31),

$$F_k = \frac{\Delta}{\Delta^0}. \tag{33}$$

Acesta este un rezultat foarte important. Se obţine o măsură a reacţiei, cu referinţă la un parametru specific k, luînd raportul dintre determinantul grafului pentru valoarea respectivă a parametrului şi determinantul grafului calculat pentru valoarea zero a parametrului.

Se propune cititorului să demonstreze valabilitatea acestei expresii pentru graful din fig. 9.24, pentru care s-a găsit anterior expresia diferenţei de întoarcere dată de relaţia (25), utilizînd expresia determinantului grafului dată de relaţia (26).

Senzitivitatea

În general vorbind, fiecare parametru dintr-o reţea are o influenţă asupra răspunsului. Cînd acest parametru variază (ca urmare a variaţiilor de temperatură, a înlocuirii pieselor, etc.) răspunsul se va schimba şi el. Este interesant să se cunoască în ce măsură se schimbă răspunsul atunci cînd un parametru dat se schimbă într-o anumită măsură. Această informaţie este furnizată de ceea ce se numeşte *senzitivitate*. Definim senzitivitatea unei mărimi, să spunem amplificarea grafului G, în raport cu un parametru k, prin

$$S_k^G = \frac{\partial G/G}{\partial k/k}; \tag{34}$$

În această definiţie variaţiile se presupun a fi infinit mici.

Se poate stabili o relaţie între senzitivitate şi diferenţa de întoarcere. Presupunem că parametrul k apare într-o latură care face parte dintr-o cale directă între sursă şi sarcină. Atunci amplificarea grafului dată de relaţia (16) se poate scrie după cum urmează:

$$G = \frac{k\,\Delta_{ba} + R}{\Delta^0 - k\Delta_{ba}}, \tag{35}$$

unde R este ceea ce mai rămîne din numărător după ce termenii care conţin pe k sînt eliminaţi. Utilizînd relaţia de definiţie (34) şi relaţia (33), după o serie de transformări simple, se obţine:

$$S_k^G = \frac{1}{F_k}\left(1 - \frac{G^0}{G}\right), \tag{36}$$

unde $G^\circ = R/\Delta^\circ$ este amplificarea grafului, cînd se face k egal cu zero; adică amplificarea grafului datorată căilor care nu conţin latura k.

În cazul cînd nu există căi care să nu conţină latura k, ceea ce înseamnă că toate căile directe de la sursă la sarcină trec prin latura k, senzitivitatea devine inversul diferenţei de întoarcere. Acesta este de exemplu cazul grafului din fig. 9.24. Deci, în acest exemplu, senzitivitatea amplificării în raport cu transconductanţa g este inversul diferenţei de întoarcere dată de relaţia (25).

9.4. STABILITATEA

În paragrafele precedente s-a prezentat o analiză care permite determinarea funcţiilor reţelei şi deci a răspunsului la excitaţii date. Metoda grafurilor de trecere a semnalelor se poate aplica atît pentru reţelele pasive, reciproce, cît şi pentru reţelele active, nereciproce. Ea este de mare importanţă mai ales în ultimul caz. În studiul reţelelor active este deosebit de important să se ştie cînd răspunsul rămîne mărginit sau creşte nedefinit după o excitaţie. Această problemă nu apare în cazul reţelelor pasive cu pierderi deoarece polii funcţiilor reţelei pentru astfel de reţele se află cu necesitate în semiplanul stîng. În acest paragraf vom investiga această problemă. Vom opera cu semnale reprezentate atît în domeniul timp cît şi în domeniul frecvenţă şi vom presupune că *toate reţelele au condiţii iniţiale nule.* Se vor considera numai reţelele cu o singură intrare şi o singură ieşire. Această condiţie nu este restrictivă deoarece reţelele cu mai multe intrări şi mai multe ieşiri pot fi manipulate aplicînd principiul superpoziţiei.

Fie $w(t)$ răspunsul reţelei la o excitaţie $e(t)$. Vom spune că reţeaua este ***stabilă*** dacă, dîndu-se o constantă $0 \leqslant E < \infty$, există o altă constantă $0 \leqslant W < \infty$ astfel încît $|w(t)| \leqslant W$ cînd $|e(t)| \leqslant E$ pentru $0 \leqslant t < \infty$. În termeni mai puţin precişi, vom spune că o reţea este stabilă dacă *la orice excitaţie mărginită corespunde un răspuns mărginit.* Pentru a distinge ceastă definiţie de altele ce vor fi introduse ulterior, ne referim la această definiţie a stabilităţii în sensul *mărginit la intrare — mărginit la ieşire* (MIME). Pentru a găsi criteriul funcţional ca o reţea să fie MIME stabilă, răspunsul $w(t)$ trebuie exprimat în funcţie de excitaţia $e(t)$. Plecăm de la integrala de convoluţie

$$w(t) = \int_0^t h(t - \tau)\, e(\tau)\, d\tau, \tag{37}$$

unde $h(t)$ este funcţia pondere. Atunci are loc următoarea:
Teoremă 1. *O reţea este MIME stabilă dacă şi numai dacă*

$$\int_0^\infty |h(\tau)| d\tau < \infty. \tag{38}$$

Aceasta înseamnă că, dacă funcția pondere este absolut integrabilă atunci răspunsul la orice excitație mărginită va fi mărginit. Pentru partea *dacă* a demonstrației se începe prin a lua modul în relația (37). După ce se folosesc inegalitățile uzuale rezultatul devine

$$|w(t)| \leqslant \int_0^t |h(t-\tau)|\,|e(\tau)|\,d\tau.$$

Dacă $|e(\tau)|$ se înlocuiește prin marginea sa superioară E, inegalitatea va fi deasemeni satisfăcută și rezultă

$$|w(t)| \leqslant E\int_0^t |h(t-\tau)|\,d\tau = E\int_0^t |h(\tau)|\,d\tau.$$

În partea dreaptă s-a operat schimbarea de variabilă $t-\tau \to \tau$. Acum, dacă se extinde la infinit limita superioară valoarea integralei crește, deci inegalitatea va fi cu atît mai mult satisfăcută. Deci

$$|w(t) \leqslant E\int_0^\infty |h(\tau)|\,d\tau = W.$$

Din condițiile teoremei date de relația (38) rezultă că $W<\infty$ și deci $|w(t)|$ este mărginit pentru $0 \leqslant t < \infty$. Pentru partea *numai dacă* a demonstrației se pleacă de la următoarea observație. Dacă

$$\int_0^\infty |h(\tau)\,d\tau \nless \infty, \tag{39}$$

atunci, dîndu-se un număr $0 \leqslant H < \infty$, există un moment $0 \leqslant t' < \infty$ astfel încît

$$\int_0^{t'} |h(\tau)\,d\tau > H. \tag{40}$$

În continuare demonstrația se face prin reducere la absurd; astfel, vom presupune că relația (38) nu este adevărată și vom arăta că dîndu-se $0 \leqslant E < \infty$ și *orice* $0 \leqslant W < \infty$ atunci există $0 \leqslant t' < \infty$ astfel incît $|w(t')| > W$ pentru un $|e(t)| \leqslant E$. Acum, se alege o excitație

$$e(t) = E \operatorname{sgn}\,[h(t'-t)],$$

unde sgn x este +1 pentru $x>0$ şi −1 pentru $x<0$. Atunci $e(t)$ este o funcţie care comută între $+E$ şi $-E$ cînd semnul lui $h(t'-t)$ se schimbă. Cu acest semnal de excitaţie, integrala de convoluţie din relaţia (37) devine

$$w(t') = \int_0^{t'} h(t'-\tau)\{E \operatorname{sgn}[h(t'-\tau)]\}\,d\tau$$

$$= E\int_0^{t'} |h(t'-\tau)|\,d\tau.$$

Rezultatul final este o consecinţă a faptului că x sgn $x = |x|$. Se alege acum $H = W/E$ în relaţia (40) şi se ţine seama de ultima relaţie din care rezultă $w(t')>W$ şi, deci, $|w(t')|>W$. Aceasta complectează demonstraţia.

Această teoremă specifică condiţiile care trebuie îndeplinite pentru ca o reţea să fie MIME stabilă în domeniul timp. Cînd $H(s)=\mathscr{L}\{h(t)\}$ este o fracţie raţională proprie, se poate găsi o condiţie echivalentă în domeniul frecvenţă. Astfel are loc următoarea:

Teorema 2. *Dacă $H(s)$ este o fracţie raţională proprie în s, atunci reţeaua va fi MIME stabilă, ceea ce înseamnă că*

$$\int_0^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau<\infty \tag{41}$$

dacă şi numai dacă toţi polii lui $H(s)$ au partea reală negativă.

Pentru partea *dacă* a demonstraţiei se pleacă de la dezvoltarea în elemente simple

$$H(s) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{\nu_i}\frac{k_{ij}}{(s+s_i)^j},$$

unde $-s_i$ este un pol de ordinul ν_i al funcţiei $H(s)$. Transformarea inversă a acestei expresii dă funcţia de pondere

$$h(t) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{\nu_i}\frac{k_{ij}}{(j-1)!}\,t^{j-1}\,\varepsilon^{-s_i t},$$

din care se obţine uşor

$$|h(t)| \leqslant \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{\nu_i}\frac{|k_{ij}|}{(j-1)!}\,t^{j-1}\,|\varepsilon^{-s_i t}|.$$

Deoarece $|\varepsilon^{-s_i t}| = \varepsilon^{-(\mathrm{Re}\, s_i)t}$, se obţine

$$|h(t)| \leqslant \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{|k_{ij}|}{(j-1)!} t^{j-1} \varepsilon^{-(\mathrm{Re}\, s_i)t}. \tag{42}$$

Dacă toţi polii funcţiei $H(s)$ au partea reală negativă, adică Re $s_i > 0$ pentru $i = 1, 2, \ldots, l$, atunci fiecare din termenii $t^{j-1}\varepsilon^{-(\mathrm{Re}\, s_i)t}$ este integrabil de la 0 la ∞. O combinaţie liniară finită de termeni integrabili cum este cea din relaţia (42) este de asemeni integrabilă. Deci relaţia (41) este satisfăcută.

Pentru partea *numai dacă* a demonstraţiei se pleacă de la transformata Laplace a funcţiei pondere care este

$$H(s) = \int_0^\infty h(t)\varepsilon^{-st}\, dt.$$

Dacă se utilizează inegalităţi uzuale se obţine

$$|H(s)| \leqslant \int_0^\infty |h(t)|\ |\varepsilon^{-st}| dt.$$

Pentru Re $s \geqslant 0$, $|\varepsilon^{-st}| \leqslant 1$, deci

$$|H(s)| \leqslant \int_0^\infty |h(t)|\, dt \text{ pentru Re } s \geqslant 0.$$

Astfel, dacă relaţia (41) are loc, atunci $|H(s)|$ este mărginit pentru orice s pentru care Re $s \geqslant 0$. Aceasta înseamnă că $H(s)$ nu poate să aibă poli cu partea reală nenegativă şi cu aceasta demonstraţia este completă.

Dacă se dă o fracţie raţională proprie

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{43}$$

şi se doreşte să se ştie dacă această funcţie este transformata funcţiei de pondere a unei reţele MIME stabile, este necesar să se găsească zerourile lui $D(s)$ şi să se vadă dacă ele au partea reală negativă. Din fericire, pentru a rezolva problema stabilităţii nu este necesar să se cunoască exact poziţiile polilor ci numai dacă ei se găsesc în semiplanul stîng. Ne vom îndrepta atenţia asupra unor criterii care furnizează tocmai această indicaţie, fără a fi necesar să se factorizeze $D(s)$.

Criteriul lui Routh

Dacă polii lui $H(s)$ se află cu toţii în semiplanul stîng, atunci $D(s)$ trebuie să fie un polinom *strict Hurwitz*, aşa cum a fost definit în paragraful 6.2. S-a arătat că o condiţie necesară ca un polinom să fie strict Hurwitz este ca *toţi* coeficienţii să fie prezenţi şi să aibă acelaşi semn. Aceasta este o indicaţie preţioasă care permite eliminarea polinoamelor care nu sînt strict Hurwitz. Totuşi, ne trebuie o bază — o condiţie suficientă — pentru a selecta dintr-o listă de polinoame, polinoamele strict Hurwitz. Teorema următoare, care dă condiţia necesară şi suficientă pentru ca un polinom să fie strict Hurwitz, este o extindere a teoremei 16 din capitolul 7 referitoare la polinoamele Hurwitz.

Presupunem că $D(s)$ este un polinom de gradul n. Presupunem, fără a pierde din generalitate, că primul coeficient este pozitiv. Atunci,

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \qquad (a_0 > 0). \tag{44}$$

Fie $\alpha(s)$ şi $\beta(s)$ polinoamele formate luînd termenii din $D(s)$ din doi în doi, începînd cu $a_0 s^n$ şi $a_1 s^{n-1}$ respectiv. Atunci,

$$\alpha(s) = a_0 s^n + a_2 s^{n-2} + a_4 s^{n-4} + \dots \tag{45a}$$

$$\beta(s) = a_1 s^{n-1} + a_3 s^{n-3} + a_5 s^{n-5} + \dots . \tag{45b}$$

Se calculează apoi raportul $\alpha(s)/\beta(s)$ care se dezvoltă în fracţie continuă, după cum urmează:

$$\frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \gamma_1 s + \cfrac{1}{\gamma_2 s + \cfrac{1}{\gamma_3 s + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\gamma_n s}}}} \tag{46}$$

Relaţiile necesare sînt date de următoarea [1]:

Teorema 3. *Polinomul $D(s)$ este strict Hurwitz dacă şi numai dacă $\gamma_i > 0$ pentru $i = 1, 2, \dots, n$.* Se observă că *toate* numerele γ_i trebuie să fie pozitive; nici unul nu poate să fie zero la $i = n$. Dacă toate numerele γ_i sînt zero de la $i = k < n$ aceasta este o indicaţie că un polinom par

---

[1]) O demonstraţie foarte clară se dă în R.J. Schwarz şi B. Friedland: *Linear Systems*, McGraw-Hill, New York, 1965.

divide atît pe $\alpha(s)$ cît și pe $\beta(s)$ și deci pe $D(s)$. Acest polinom par poate să aibă o pereche de zerouri pe axa imaginară, sau patru zerouri complexe, dintre care două în semiplanul drept. În ambele cazuri $D(s)$ nu poate să fie strict Hurwitz.

Criteriul lui Hurwitz

Criteriul lui Routh reprezintă un criteriu ideal pentru a determina stabilitatea unei rețele atunci cînd se cunosc valorile numerice ale tuturor coeficienților lui $D(s)$. Dacă unul sau mai mulți coeficienți depind de niște parametri, aplicarea criteriului lui Routh conduce la dificultăți. În acest caz se va folosi o variantă a criteriului lui Routh.

Fie Δ_n determinantul format cu coeficienții lui $D(s)$ după cum urmează: pe prima linie se plasează a_1 în coloana 1, a_3 în coloana 2 ș.a.m.d. pînă la a_{1+2i}. Coloanele următoare, pînă la n, se completează cu zerouri. Pe linia a doua se plasează a_0 în coloana 1, a_2 în coloana 2 ș.a.m.d. pînă la a_{2i}. Coloanele următoare, pînă la n, se completează cu zerouri. Următoarea pereche de linii începe prin zerouri după care se repetă coeficienții de pe primele două linii, pînă la completarea a n coloane. A treia pereche de linii începe prin două zerouri după care se repetă coeficienții primei perechi de linii, pînă la completarea a n coloane. Se continuă acest proces pînă la completarea a n linii și n coloane. Determinantul dat mai jos va avea întotdeauna pe a_n în ultima linie și ultima coloană și zerouri pe toate celelalte linii din ultima coloană. (De ce?)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & . & . & . & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix} \qquad (47)$$

Fie Δ_{n-1} determinantul obținut din Δ_n prin eliminarea ultimei linii și a ultimei coloane. Se continuă în acest mod obținînd Δ_{n-k} care reprezintă determinantul rezultat prin eliminarea ultimei linii și ultimei coloane

din Δ_{n-k+1}. Se obţin astfel n determinanţi Δ_i cunoscuţi sub numele de *determinanţi Hurwitz*, care formează baza pentru următoarea:

Teorema 4. *Polinomul $D(s)$ este strict Hurwitz dacă şi numai dacă $\Delta_i > 0$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Această teoremă, cunoscută sub numele de *criteriul lui Hurwitz*, se aplică uşor polinoamelor la care cieficienţii depind de anumiţi parametri.

Criteriul Liénard — Chipart

Cînd se aplică criteriul lui Hurwitz trebuie calculaţi un număr mare de determinanţi. Orice procedeu care permite reducerea numărului de determinanţi este bine venit. Acest lucru se va face prin următoarea teoremă, cunoscută sub numele *criteriul Liénard — Chipart*:

Teorema 5. *Polinomul $D(s)$ este strict Hurwitz dacă şi numai dacă toate elementele sînt pozitive într-unul din şirurile următoare*[1]:

1. $a_n, a_{n-2}, a_{n-4}, \ldots$ şi $\Delta_n, \Delta_{n-2}, \Delta_{n-4}, \ldots$
2. $a_n, a_{n-2}, a_{n-4}, \ldots$ şi $\Delta_{n-1}, \Delta_{n-3}, \Delta_{n-5}, \ldots$
3. $a_n, a_{n-1}, a_{n-3}, \ldots$ şi $\Delta_n, \Delta_{n-2}, \Delta_{n-4}, \ldots$
4. $a_n, a_{n-1}, a_{n-3}, \ldots$ şi $\Delta_{n-1}, \Delta_{n-3}, \Delta_{n-5}, \ldots$

Se observă că pentru aplicarea acestui criteriu trebuie evaluaţi numai determinanţi Hurwitz. Deoarece efortul necesar pentru a evalua un determinant creşte odată cu dimensiunile acestuia este avantajos să se selecteze fie condiţiile (2), fie condiţiile (4) ale teoremei, deoarece ele nu conţin determinantul de ordinul cel mai mare, Δ_n.

Vom arăta cum se aplică criteriul Liénard-Chipard. Se consideră polinomul

$$D(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + (6 + k)s + ak$$

şi se cere să se determine valorile parametrilor a şi k pentru care $D(s)$ este strict Hurwitz. Vom soluţiona problema utilizînd condiţia (2) din criteriul Liénard-Chipard. Se observă că

$$a_n = a_4 = ak \tag{48a}$$

$$a_{n-2} = a_2 = 11. \tag{48b}$$

---

[1]) O demonstraţie pentru această teoremă şi pentru cea precedentă se poate găsi în F.R. Gantmaher: *Teoria matrif*. Gostehizdat. Moscova. 1955.

Determinanţii Hurwitz necesari sînt:

$$\Delta_{n-1} = \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 6+k & 0 \\ 1 & 11 & ak \\ 0 & 6 & 6+k \end{vmatrix} = 360 + 54k - k^2 - 36ak \qquad (49a)$$

$$\Delta_{n-3} = \Delta_1 = |6| = 6. \qquad (49b)$$

Dacă trebuie satisfăcute condiţiile (2) din teoremă, din relaţiile (48) şi (49) se obţin următoarele două inegalităţi pentru a şi k:

$$ak > 0 \qquad (50a)$$

$$360 + 54k - k^2 - 36ak > 0. \qquad (50b)$$

Curbele $ak = 0$ şi $360 + 54k - k^2 - 36ak = 0$ reprezintă frontierele regiunilor deschise în care relaţiile (50a) şi (50b) sînt satisfăcute. Regiunea în care relaţia (50a) este satisfăcută este reprezentată în fig. 9.26 a; simi-

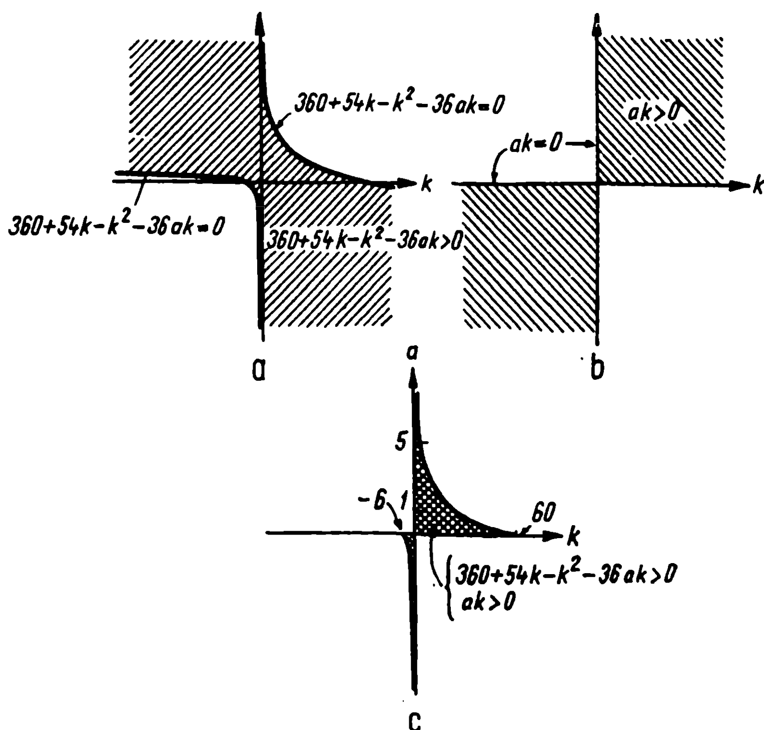


Fig. 9.26. Exemplu.

iar, relaţia (50 *b*) este satisfăcută în regiunea reprezentată în fig. 9.26 *b*. Ambele relaţii (50) sînt satisfăcute simultan pe intersecţia acestor regiuni, ilustrată în fig. 9.26 *c*. Astfel, de exemplu, dacă se alege $k = 30$, atunci nu poate fi mai mare decît 1.

9.5. CRITERIUL LUI NYQUIST

Criteriul lui Routh şi criteriul lui Liénard—Chipard sînt criterii relativ simple. Totuşi, pentru a fi aplicate, trebuie să se cunoască numitorul $D(s)$ al funcţiei $H(s)$, ca funcţie de s. Acest lucru nu este totdeauna posibil. Ar fi util să dispunem de o metodă de a verifica stabilitatea, care să plece de la valori experimentale sau de la trasarea aproximativă a modulului şi fazei lui $H(j\omega)$. Un asemenea procedeu este dat de *criteriul lui Nyquist*, care este prezentat în cele ce urmează.

Trebuie să se stabilească dacă $H(s)$ are sau nu poli în semiplanul stîng. În acest scop, în criteriul lui Nyquist, se foloseşte principiul variaţiei argumentului din teoria funcţiilor de variabilă complexă. Ne concentrăm atenţia asupra determinării numărului de poli ai lui $H(s)$ din afara semiplanului stîng: alegem deci un contur care închide semiplanul drept şi conţine axa imaginară. Acest contur orientat, cunoscut sub numele de *conturul lui Nyquist*, este dat în fig. 9.27.

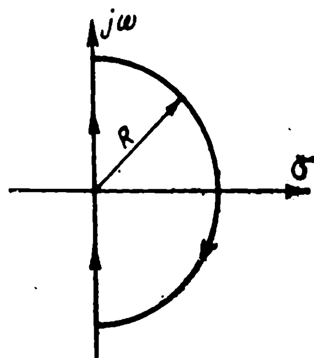


Fig. 9.27. Conturul Nyquist.

Pentru ca principiul variaţiei argumentului să fie aplicabil, $H(s)$ nu trebuie să aibă poli sau zerouri pe contur. Deci, presupunem mai întîi că $H(s)$ nu are poli pe axa imaginară. Tot aşa, deoarece dorim să-l facem pe R să tindă la ∞ trebuie să presupunem că $H(s)$ este o funcţie regulată şi diferită de zero la ∞. Vom reveni asupra acestei presupuneri mai tîrziu şi vom arăta că presupunerea referitoare la zerouri poate fi eliminată.

Considerăm acum transformarea conformă a acestui contur, realizată de funcţia $H(s)$; adică, hodograful lui $H(s)$ cînd s descrie conturul din

fig. 9.27. Aceasta poate fi o curbă cum este cea din fig. 9.28 *a*. Deoarece $H(s)$ este o funcție a rețelei, ea este reală pe axa reală și deci hodograful este simetric față de axa reală.

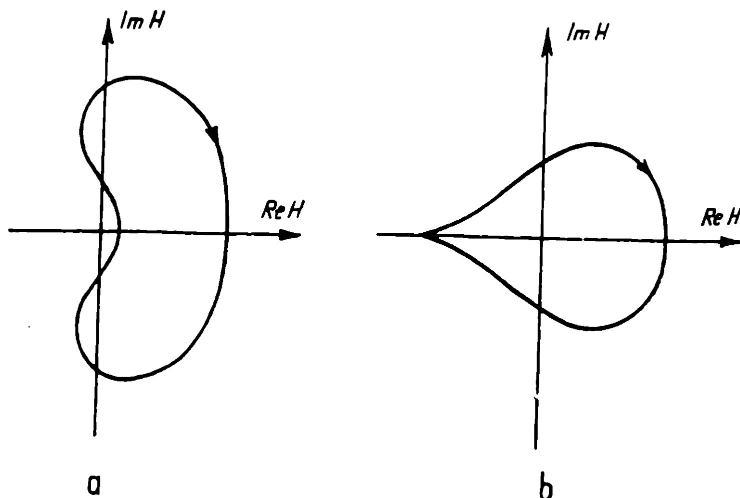


Fig. 9.28. Imaginile conturului din fig. 9.27.

Fie N_0 și N_p numărul de zerouri și respectiv de poli ai funcției $H(s)$ care se află în conturul orientat Nyquist C. În conformitate cu principiul argumentului

$$\Delta \arg H(s)|_C = 2\pi(N_p - N_0);\tag{51}$$

adică, variația argumentului funcției $H(s)$ cînd s parcurge conturul C, care *este orientat în sens negativ*, este un multiplu de 2π egal cu diferența dintre numărul de poli și numărul de zerouri ale lui $H(s)$ din conturul C (ținînd seama de ordinele lor de multiplicitate).

Să vedem cum arată hodograful lui $H(s)$ dacă variația argumentului este diferită de zero. Este evident că hodograful trebuie să ocolească originea din planul $H(s)$ dacă apar variații ale argumentului. Acesta este cazul în fig. 9.28.*b*. Dar în fig. 9.28*a* nu apare nicio variație a argumentului cînd se parcurge hodograful o singură dată. Cu alte cuvinte, hodograful trebuie să *închidă* originea din planul $H(s)$ dacă apare o variație a argumentului lui $H(s)$ cînd se parcurge conturul Nyquist C. Dacă originea este închisă în hodograf, ea este ocolită de un număr întreg de ori. Fie N_{cw} numărul de ocoliri ale originii de către hodograf *în sensul acelor de ceasornic*.

Atunci

$$\Delta \arg N(s)|_C = -2\pi N_{cw}.\tag{52}$$

Substituind această expresie în relaţia (51) se obţine

$$N_{cw} = N_0 - N_p. \tag{53}$$

Aşa dar, dacă hodograful lui $H(s)$ nu include originea, se poate trage concluzia că $H(s)$ *are tot atîţia poli cîte zerouri în semiplanul drept.* Dar noi dorim să ştim cînd există poli în semiplanul drept. Pentru a putea aplica acest test trebuie să aflăm, pe alte căi, cîte zerouri ale funcţiei $H(s)$ se află în semiplanul drept, în particular dacă nu există zerouri în semiplanul

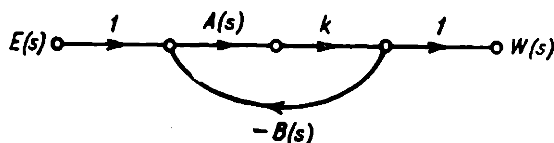


Fig. 9.29. Graful de trecere a semnalului pentru o reţea cu reacţie.

drept ceea ce înseamnă că $H(s)$ este o funcţie de fază minimă. Dar această problemă nu este prea simplă. Totuşi procedeul nu trebuie abandonat deoarece dificultatea poate fi ocolită. Ceea ce trebuie să facem este să găsim o altă funcţie care să conţină pe $D(s)$, polinomul de la numitorul funcţiei $H(s)$, şi un alt factor, la care se cunoaşte dispunerea zerourilor.

Presupunem că graful de trecere a semnalelor pentru reţeaua dată s-a redus la un graf echivalent avînd forma din fig. 9.29. Aplicînd formula (16) care dă amplificarea grafului rezultă funcţia de transfer respectivă

$$H(s) = \frac{kA(s)}{1 + kA(s)B(s)}. \tag{54}$$

Trebuie să stabilim de unde provin polii lui $H(s)$. Se observă mai intîi că raportul de întoarcere T şi diferenţa de întoarcere F pentru parametrul k sînt:

$$T(s) = -kA(s)B(s) \tag{55a}$$

$$F(s) = 1 + kA(s)B(s). \tag{55b}$$

Ambele funcţii au aceiaşi poli. Dar polii funcţiei de transfer $H(s)$ sînt: fie zerourile diferenţei de întoarcere $F(s)$, care nu sînt comune cu zerourile lui $A(s)$, fie polii lui $A(s)$, care sînt comuni cu zerourile lui $B(s)$. În ultimul caz $T(s)$ şi $F(s)$ nu vor avea drept poli polii lui $A(s)$. Deci $H(s)=kA(s)/F(s)$ va avea aceşti poli.

Să presupunem că, chiar dacă $B(s)$ poate avea zerouri comune cu polii lui $A(s)$, acestea nu sînt în semiplanul drept sau pe axa imaginară. Deci orice pol al funcției de transfer $H(s)$ din semiplanul drept, sau de pe axa imaginară, trebuie să fie un zero al diferenței de întoarcere $F(s)$. Altfel spus : *Dacă toate zerourile funcției* $F(s)=1+kA(s)B(s)$ *se găsesc în semiplanul stîng, atunci toți polii funcției de transfer* $H(s)$ *se găsesc în semiplanul stîng, cu condiția ca* $B(s)$ *să nu aibă, în semiplanul drept sau pe axa imaginară, zerouri care să coincidă cu polii lui* $A(s)$. (În acest enunț nu putem spune „*Dacă și numai dacă toate zerourile lui* $F(s)=1+kA(s)B(s)$ *sînt în semiplanul stîng* ...“ De ce?).

Pe baza celor arătate mai înainte, în loc să se caute pozițiile polilor funcției de transfer $H(s)$ se pot căuta pozițiile zerourilor diferenței de întoarcere $F(s)=1+kA(s)B(s)$.

Pentru a aplica funcției $F(s)$ principiul variației argumentului presupunem că $F(s)$ nu are poli sau zerouri pe axa imaginară și este o funcție regulată și diferită de zero la infinit. Să examinăm acum locul descris de $F(s)$ cînd s parcurge conturul Nyquist C. Un aspect tipic este dat în fig.9.30*a*, unde prin linie întreruptă s-a reprezentat porțiunea corespunzătoare la $\omega<0$. Fie N_{cw} numărul de ocoliri ale originii, în sensul acelor de ceasornic, de către locul lui $F(s)$. Atunci, ca și mai înainte,

$$N_{cw}=N_0-N_p, \tag{56}$$

unde N_0 și N_p reprezintă numărul de zerouri și respectiv de poli ai funcției $F(s)$ din semiplanul drept.

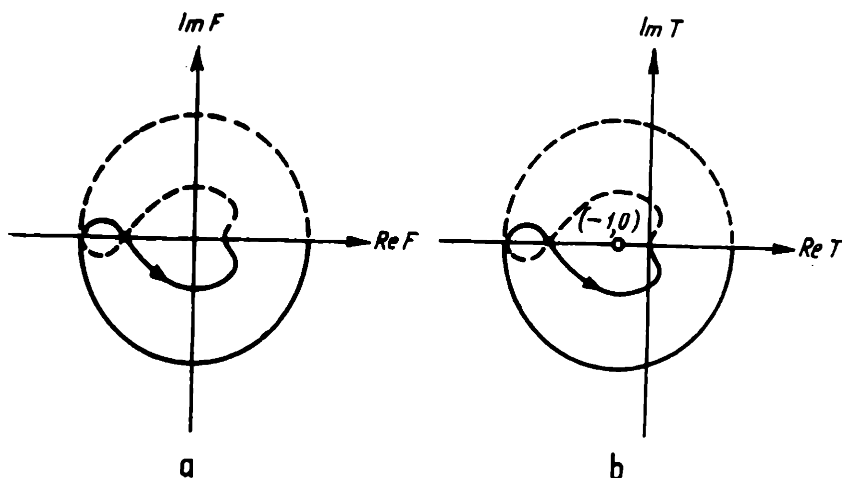


Fig. 9.30. Diagrama Nyquist.

Se observă că originea din planul F corespunde punctului de coordonate $(-1,0)$ din planul T; adică $F(s)=0$ implică $T(s) = -1$. Deci numărul de ocoliri ale originii, de către locul lui $F(s)$ este egal cu numărul de ocoliri ale punctului $(-1,0)$, de către locul lui $T(s)$. Acest fapt este ilustrat în fig. 9.30 *b*. Dar, aşa cum se vede din relaţia (54); diferenţa de întoarcere şi raportul de întoarcere au aceiaşi poli. Deci relaţiei (56) i se poate da o nouă interpretare şi anume : N_{cw} reprezintă numărul de ocoliri ale punctului $(-1,0)$ în sensul acelor de ceasornic, de către locul lui $T(s)$, iar N_p este numărul polilor lui $T(s)$ din semiplanul drept.

Discuţii şi ipoteze

Revenim acum asupra unor ipoteze făcute anterior cu privire la $F(s)$. Una din ele a fost că $F(s)$ nu are zerouri pe axa imaginară şi la infinit. Aceasta nu este o restricţie serioasă, deoarece din alura hodografului se poate spune dacă este sau nu aşa. Dacă locul lui $F(s)$ *trece prin* origine, sau, ceea ce este acelaşi lucru, dacă locul lui $T(s)$ trece prin punctul $(-1,0)$, atunci se va şti că $F(s)$ are un zero plasat pe curba Nyquist, fie pe axa imaginară fie la infinit, depinzînd de valoarea lui s corespunzătoare punctului $(-1,0)$.

Dacă trecerea hodografului prin punctul $(-1,0)$ are loc pentru $s=\infty$, funcţia $F(s)$ va avea un zero la infinit. Dar lucrul acesta nu prezintă importanţă deoarece numai zerourile de la distanţa finită influenţează stabilitatea. Totuşi va apare o problemă cu privire la evaluarea numărului de încercuiri ale punctului $(-1,0)$. Vom examina o uşoară modificare a hodografului pentru a elucida şi această problemă.

O a doua posibilitate este aceea ca hodograful să treacă prin punctul $(-1,0)$ pentru o valoare finită a lui $s=j\omega$. În acest caz $F(s)$ va avea un zero pe axa imaginară $j\omega$. Dar acest fapt ne furnizează informaţia pe care o căutăm; el ne spune că nu toate zerourile lui $F(s)$ se află în semiplanul stîng, cel puţin unul fiind plasat pe axa imaginară $j\omega$.

O altă presupunere anterioară cu privire la $F(s)$ a fost că $F(s)$ nu are poli pe axa imaginară sau la infinit. Aceeaşi presupunere se aplică şi pentru $T(s)$, deoarece $T(s)$ şi $F(s)$ au aceiaşi poli. Valabilitatea acestei presupuneri se poate constata uşor tot din comportarea hodografului. Astfel, dacă locul lui $T(s)$ devine nemărginit, atunci $F(s)$ trebuie să aibă un pol pentru valoarea corespunzătoare a lui s.

Poziţiile acestor poli sînt cunoscute. (Este adevărat acest lucru dacă $T(j\omega)$ se cunoaşte din date experimentale?) Vom presupune apoi că ordinul de multiplicitate al acestor poli este cunoscut. Principiul argumentului cere ca funcţia pentru care se aplică să nu aibă poli sau zerouri pe contur. Dar ce se întîmplă dacă se constată că $F(s)$ are astfel de poli sau zerouri?

Pentru zerouri pe axa imaginară, la distanță infinită, problema a fost rezolvată. Să examinăm cazul polilor de pe axa imaginară la distanță finită. Dacă pe conturul Nyquist apar astfel de poli, conturul poate fi modificat prin introducerea unor mici semicercuri, de rază tinzînd spre zero, plasate în semiplanul drept și cu centrele în poli, așa cum se arată în fig. 9.31 *a*. Modificarea corespunzătoare a hodografului lui $T(s)$ este ilustrată în fig. fig. 9.31 *b*.

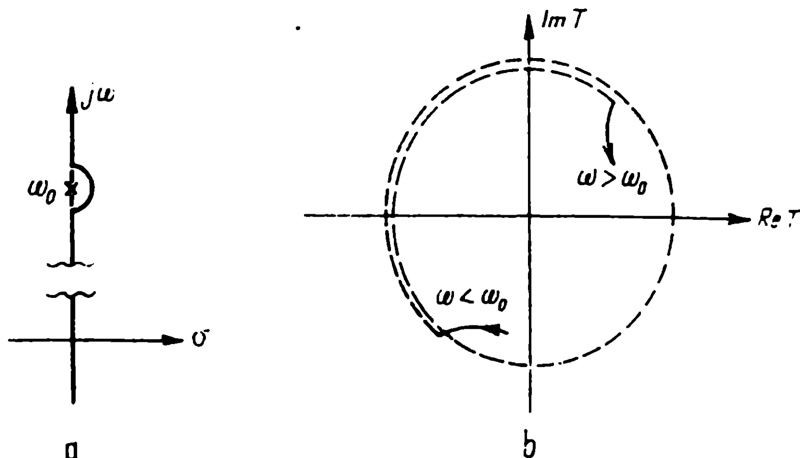


Fig. 9.31. Modificările conturului și diagramei Nyquist

Partea cu linie continuă corespunde valorilor lui $s=j\omega$ pentru ω mai mic sau mai mare decît ω_0, unde $s=j\omega_0$ reprezintă polul. Cînd ω se apropie de ω_0 de jos în sus, hodograful se duce la infinit sub un anumit unghi. În fig. 9.31 *b* acest fenomen apare în cadranul trei. Cînd s ia valori pe semicercul de rază ce tinde spre zero, $T(s)$ parcurge un arc de cerc de $m\pi$ radiani ce tinde la infinit, unde m este ordinul de multiplicitate al polului. Acest arc de cerc este orientat în sensul acelor de ceasornic, așa cum se arată prin linii întrerupte în fig. 9.31 *b*. (Propunem cititorului să verifice aceasta aproximînd $T(s)$ în vecinătatea polului, prin termenul dominant al dezvoltării în serie Laurent.) Arcul de cerc de „rază infinită" din planul T unește capetele hodografului lui $T(s)$ care se obține pentru s parcurgînd axa imaginară, apropiindu-se sau depărtîndu-se de polul de pe axa imaginară. Acum se poate evalua numărul de ocoliri ale punctului $(-1,0)$ chiar dacă $T(s)$ are poli pe axa imaginară. Trebuie notat că aceste pătrunderi în semiplanul drept prin arce de cerc de rază tinzînd spre zero nu afectează numărul de zerouri ale lui $F(s)$ din semiplanul drept evaluat cu relația (56). De ce?

În sfîrșit, se consideră cazul cînd $F(s)$ are un pol sau un zero la infinit. În cazul unui pol, $T(s)$ are tot un pol. În acest caz trebuie să examinăm comportarea lui $T(s)$ pe semicercul de rază tinzînd la infinit, care se folo-

sește pentru a închide conturul Nyquist din fig. 9.27. Ca și in cazul polilor la distanță finită, hodograful lui $T(s)$ se duce la infinit cind s tinde la infinit de-a lungul axei imaginare. Corespunzător semicercului din conturul Nyquist, hodograful lui $T(s)$ — care de data aceasta tinde la infinit — va descrie în sensul acelor de ceasornic un arc de cerc de $n\pi$ radiani, unde n reprezintă ordinul de multiplicitate al polului de la infinit. Acest hodograf este reprezentat in fig. 9.32 *a*.

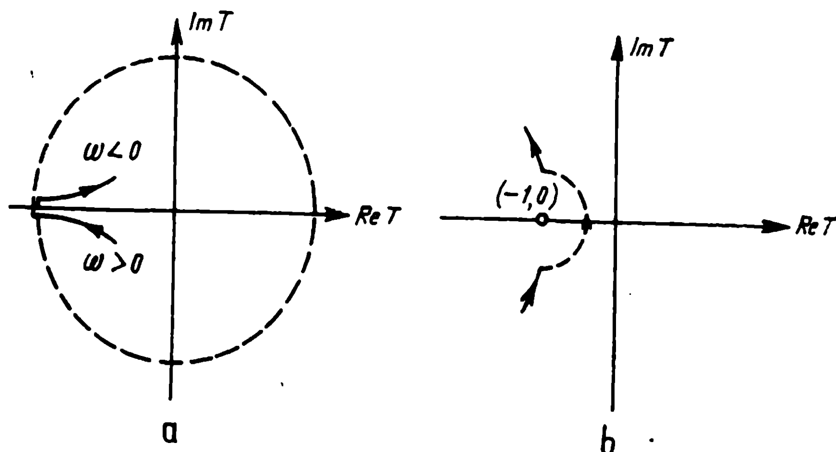


Fig. 9.32. Diagramele corespunzătoare unui pol (*a*) și unui zero (*b*) la infinit.

În cazul cînd $F(s)$ are un zero la infinit, în punctul respectiv $T(s) = -1$ și deci hodograful lui $T(s)$ trece prin punctul $(-1{,}0)$. În acest caz se consideră limita arcului de cerc din conturul Nyquist cind raza sa tinde la infinit. Hodograful lui $T(s)$ va descrie un arc de cerc de rază ce tinde spre zero în jurul punctului $(-1{,}0)$, parcurgînd in sensul acelor de ceasornic $n\pi$ radiani, unde n reprezintă ordinul de multiplicitate a zeroului de la infinit. Acest hodograf este reprezentat în fig. 9.32 *b*.

Teorema lui Nyquist

Hodograful lui $T(s)$ în cazul general va fi o combinație a celor ilustrate în fig. 9.30*b*, 9.31*b* și 9.32. Acest hodograf modificat, in care se manifestă efectele polilor lui $T(s)$ sau $F(s)$ de pe axa imaginară și a polilor sau zerourilor lui $F(s) = 1 + T(s)$ de la infinit, se numește *diagrama Nyquist*. Numărul ocolirilor punctului $(-1{,}0)$ în sensul acelor de ceasornic, care intervine în relația (56), se referă tocmai la diagrama Nyquist.

Cele arătate anterior pot fi formulate pe scurt într-o teoremă numită *criteriul lui Nyquist.*

Teorema 6. *O rețea avînd funcția de transfer*

$$H(s) = \frac{kA(s)}{1 + kA(s)B(s)}$$

este MIME stabilă (a) dacă nici un pol al lui $A(s)$ din semiplanul drept sau de pe axa imaginară nu este și zero al lui $B(s)$ și (b) dacă diagrama Nyquist a lui $T(s) = kA(s)B(s)$ nu trece prin punctul $(-1{,}0)$ și nu-l ocolește de $-N_p$ ori în sensul acelor de ceasornic[1], *unde N_p este numărul polilor lui $T(s)$ din semiplanul drept.*

Menționăm că această teoremă reprezintă numai o condiție suficientă. Ea nu este și necesară deoarece zerourile lui $A(s)$ din semiplanul drept sau pe axa imaginară pot să compenseze zerourile din semiplanul drept sau de pe axa imaginară ale funcției $1 + T(s)$, dacă există astfel de zerouri. Desigur, dacă se știe că $A(s)$ are zerouri numai în semiplanul stîng, această compensare nu poate avea loc și condițiile teoremei devin necesare și suficiente. În orice caz, din punct de vedere practic, vom considera o rețea ca instabilă — și nu ca potențial instabilă — dacă nu sînt satisfăcute condițiile teoremei. De ce?

Dacă se folosește acest criteriu pentru a obține informații cu privire la zerourile funcției $F(s)$ pe baza relației (56), atunci trebuie să știm că $T(s)$ nu are poli în semiplanul drept; sau dacă are, trebuie să știm cîți sînt. Există un caz în care putem ști precis că $T(s)$ nu are poli în semiplanul drept, acesta este cazul cînd $A(s)B(s)$ poate fi scris sub formă de produs de funcții ale unei rețele pasive.

În sfîrșit, dacă diagrama Nyquist pentru $T(s)$ reprezintă elementul cheie pentru a aprecia stabilitatea unei rețele, atunci, trebuie să fim siguri că nici un pol al lui $A(s)$ din semiplanul drept sau de pe axa imaginară nu coincide cu zerourile lui $B(s)$. Există un caz în care putem ști cu certitudine că nu se poate întîmpla acest lucru și anume atunci cînd numărătorul lui $B(s)$ este constant.

Analiza stabilității pe care am prezentat-o anterior se bazează pe modelul cu o singură buclă de reacție din fig. 9.29. Criteriul lui Nyquist poate fi însă extins și la grafurile cu mai multe bucle de reacție. Aceasta implică trasarea a cîteva diagrame Nyquist. Nu vom prezenta aici această extindere.

---

[1] Din relația (56), numărul de zerouri N_0 din semiplanul drept ale funcției $1+T(s)$ este $N_{cw}+N_p$. Condițiile teoremei corespund la $N_0=0$ sau $N_{cw}=-N_p$. O condiție echivalentă ar fi: „... ocolește de N_0 ori în sens opus acelor de ceasornic."

Exemplu. Să ilustrăm criteriul de stabilitate a lui Nyquist printr-un exemplu. Vom parcurge detaliat acest exemplu şi vom arăta ce aproximaţii pot interveni.

Fie amplificatorul cu trei etaje *RC* cu reacţie dependentă de frecvenţă din fig. 9.33.

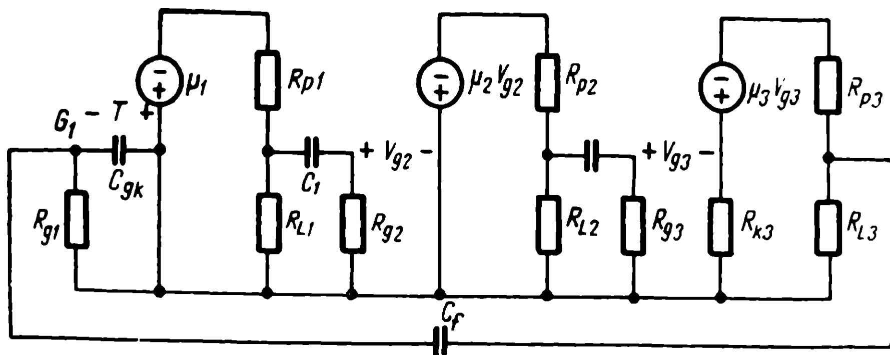


Fig. 9.33. Exemplu pentru trasarea diagramei Nyquist.

În acest exemplu vom încerca să arătăm avantajele criteriului lui Nyquist fără să calculăm raportul de întoarcere $T(s)$. În schimb vom estima pe $T(s)$ recurgînd la o serie de aproximaţii. Această reţea este un model simplificat al unui amplificator cu tuburi cu vid, în care capacităţile dintre electrozi au fost neglijate pentru a simplifica exemplul.

Această reţea poate fi uşor modelată printr-un graf cu o singură buclă de reacţie de tipul celui considerat. Valoarea lui k va fi $\mu_1\mu_2\mu_3$ iar $A(s)B(s)$ se poate scrie ca un produs de funcţii ale unei reţele pasive, ceea ce nu vom face aici. Aşadar putem considera $N_p = 0$ şi putem proceda mai departe ştiind că $N_0 = N_{cw}$. Mai mult, $B(s) \equiv 1$; deci polii lui $A(s)$ nu pot fi comuni cu zerourile lui $B(s)$. Propunem cititorului să se convingă singur de acest lucru.

Interesul se concentrează deci asupra axei imaginare $j\omega$; din acest motiv vom opera cu fazorii de regim permanent în locul transformatelor Laplace. Amintindu-ne definiţia raportului de întoarcere dată pe graf, trebuie să întrerupem bucla de reacţie şi să aplicăm un semnal egal cu unitatea, la nodul din dreapta în perechea de noduri astfel formată. Semnalul care se întoarce la nodul din stînga al acestei perechi de noduri va fi $T\,(j\omega)$. Vom urmări aceste operaţii pe reţea. Presupunem că bucla de reacţie este întreruptă la intrarea primului etaj de amplificare iar tensiunea V_{g1} se ia egală cu unitatea. Se observă că aceasta echivalează cu înlocuirea primei surse controlate de tensiune printr-o sursă independentă de tensiune de valoare μ_1. Aceste condiţii sînt realizate în reţeaua din fig. 9.34 pentru a calcula raportul de întoarcere.

Aici s-a eliminat sursa externă de tensiune, iar prima sursă controlată de tensiune se presupune a fi o sursă independentă avînd fazorul tensiunii μ_1.

Se observă că sensul de referinţă pentru T s-a ales conform definiţiei, adică valoarea cu semn schimbat a semnalului care se întoarce în nodul despicat. Este uşor de văzut cum trebuie interpretat acest lucru cînd se determină $T(j\omega)$ prin măsurări experimentale în reţeaua respectivă.

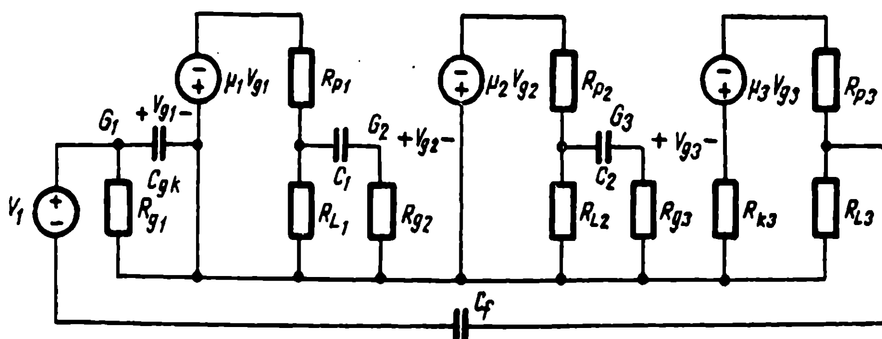


Fig. 9.34. Evaluarea raportului de întoarcere.

Pentru a construi diagrama Nyquist se împarte banda de frecvenţe $0 \leqslant \omega < \infty$ într-un număr de benzi în care se fac aproximaţii convenabile. La frecvenţe foarte joase semnalul care se întoarce va fi foarte mic, datorită capacităţilor de cuplaj C_1, C_2 şi C_f. Influenţa capacităţii C_{gk} poate fi neglijată în această bandă. Apar trei reţele cu cuplaj RC în buclă. Introducem notaţia

$$R_e = \frac{R_L R_g}{R_L + R_g}, \tag{57}$$

cu indici corespunzători pentru fiecare etaj. În acest caz raportul tensiunilor pentru fiecare etaj va fi

$$\frac{-\mu R_e Cs}{(R_e + R_p)C_s + (R_p + R_L)/(R_g + R_L)}, \tag{58}$$

cu indicii corespunzători. Aşadar raportul de întoarcere va fi

$$T(s) = \frac{\mu_1 R_{e1} C_1 s}{(R_{e1} + R_{p1})C_1 s + (R_{p1} + R_{L1})/(R_{g2} + R_{L1})}$$
$$\times \frac{\mu_2 R_{e2} C_2 s}{(R_{e2} + R_{p2})C_2 s + (R_{p2} + R_{L2})/(R_{g3} + R_{L2})}$$
$$\times \frac{\mu_3 R_{e3} C_f s}{R_{e3} + R_{p3})C_f s + (R_{p3} + R_{L3})/(R_{g1} + R_{L3})} \tag{59}$$

(Semnul minus dispare datorită sensului de referință pentru T.) La limită, pentru $\omega \to 0$, faza fiecărui factor din relația (59) va fi $\pi/2$ radiani. Așadar pentru $\omega \to 0$ faza lui $T(j\omega)$ tinde asimtotic la $3\pi/2$ radiani iar modulul tinde la zero. Deci porțiunea corespunzătoare frecvențelor joase a hodografului lui $T(j\omega)$ arată ca în fig. 9.35.

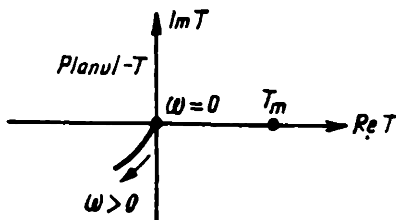


Fig. 9.35. Comportarea hodografului lui $T(j\omega)$ la frecvențe joase.

Să presupunem acum că frecvența limită superioară $1/R_1C_{gk}$ este mult mai mare decît frecvențele limită superioare ale celor trei etaje RC. Va exista deci o bandă de frecvențe medii în care comportarea rețelei din fig. 9.34 poate fi aproximată prin comportarea rețelei din fig. 9.36.

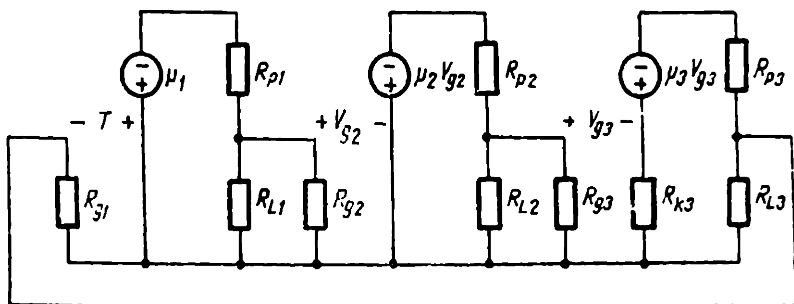


Fig. 9.36. Aproximarea la frecvențe medii.

Pentru această rețea T se calculează foarte ușor. Este suficient pentru aceasta să se neglijeze termenii constanți față de termenii care depind de frecvență la numitorii fracțiilor din relația (59).
Rezultatul va fi

$$T = \mu_1\mu_2\mu_3 \frac{R_{e1}}{R_{p1} + R_{e1}} \frac{R_{e2}}{R_{p2}+R_{e2}} \frac{R_{e3}}{R_{p3}+R_{e3}} = T_m. \tag{60}$$

Acesta este un număr real și pozitiv. Așadar hodograful lui T corespunzător frecvențelor medii se reduce la un punct pe axa reală pozitivă. Acesta este punctul T_m din fig. 9.37.

La frecvențe înalte se mai poate folosi încă fig. 9.36 introducînd însă și efectul capacității C_{gk}. Deoarece C_{gk} este în paralel cu R_{l3}, al treilea factor din relația (60) va trebui modificat înlocuindu-l prin următorul :

$$\frac{R_{e3}}{R_{e3}+R_{p3}+j\omega C_{gk}R_{e3}R_{p3}}. \tag{61}$$

Așadar argumentul lui T va tinde asimtotic la $-\pi/2$. Porțiunea din hodograf corespunzătoare frecvențelor înalte va avea deci aspectul din fig. 9.37.

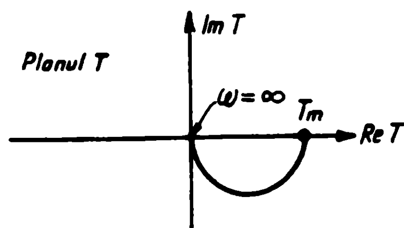


Fig. 9.37. Comportarea lui $T(j\omega)$ la frecvențe înalte.

Putem trasa acum hodograful lui $T(j\omega)$ pentru $0 \leqslant \omega < \infty$ care va avea, în mare, aspectul din fig. 9.38. Pentru o aproximare și mai bună vor trebui calculate cîteva puncte.

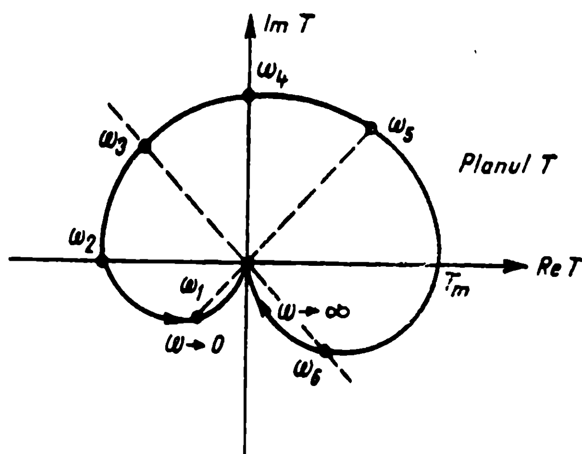


Fig. 9.38. Aproximarea hodografului lui T.

Vom presupune, pentru simplitate, că cele trei frecvențe limită ale celor trei etaje sînt fie identice, fie mult diferite între ele. În primul caz știm că la frecvența limită comună, fiecare circuit introduce un defazaj de $\pi/4$

şi o atenuare de 3 dB. Acest punct, notat cu ω_3 în fig. 9.38, trebuie să fie cu 9 dB sub valoarea 20 logT_m. Similar, se poate găsi frecvenţa la care fiecare circuit introduce un defazaj de $\pi/3$.

La această frecvenţă fiecare numitor din relaţia (59) contribuie cu $\pi/6$ şi se găseşte uşor că $\omega_2=0{,}58\ \omega_3$. La această frecvenţă fiecare factor introduce o atenuare de aproximativ 4 dB. Aşadar $T(j\omega_2)$ va fi cu 12 dB sub valoarea 20 logT_m. Frecvenţa ω_2, notată în fig. 9.38 corespunde intersecţiei hodografului cu axa reală negativă. Celelalte puncte ω_1, ω_4, ω_5, ω_6 se calculează similar. Fiecare caz în parte se propune cititorului drept problemă. (v. Problema **P.25**).

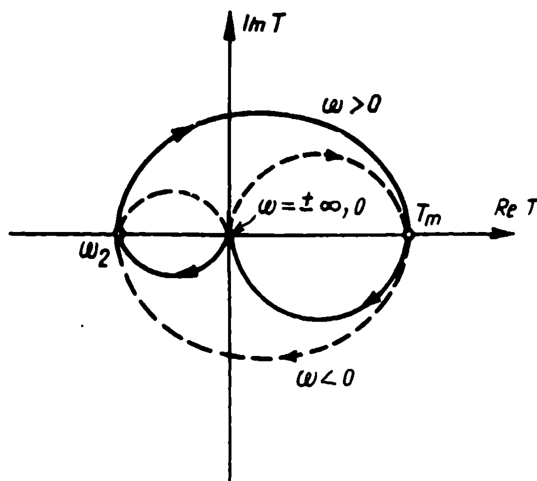


Fig. 9.39. Hodograful complet a lui T.

Odată cunoscut hodograful pentru valori pozitive ale lui ω, diagrama poate fi completată prin simetrie în raport cu axa reală. Diagrama completă pentru acest exemplu se dă în fig. 9.39.

Este evident că stabilitatea sistemului este determinată de valoarea lui $T(j\omega_2)$. Dacă modulul respectiv este mai mare sau egal cu 1, sistemul este instabil. În astfel de cazuri sistemul poate fi făcut stabil prin modificarea valorilor unor elemente. Chiar dacă punctul $(-1{,}0)$ nu este inclus în hodograful lui T şi hodograful nu trece prin acest punct, apropierea curbei de acest punct dă o măsură a „stabilităţii relative". Se obţine astfel o indicaţie cu privire la apropierea unui pol de axa $j\omega$.

Această idee poate fi exprimată într-o manieră cantitativă definind marginile de stabilitate, *marginea pentru amplificare* şi *marginea pentru fază*. De fapt diagrama Nyquist conduce la multe alte concepte deosebit de utile în proiectare, aşa cum este cel de *stabilitate condiţionată*. Totuşi, vom considera terminată prezentarea în acest punct, lăsînd astfel de extinderi pe seama lucrărilor de teoria reglajului automat, care tratează detailat sistemele cu reacţie.

PROBLEME

P. 1. Să se determine indexul pentru fiecare graf de fluență a semnalelor din fig. 9. P. 1. Numerele atașate laturilor reprezintă valorile numerice ale transmitanțelor respective.

P. 2. Reducînd fiecare din grafurile de fluență a semnalelor din fig. 9. P. 1. să se determine amplificarea grafului.

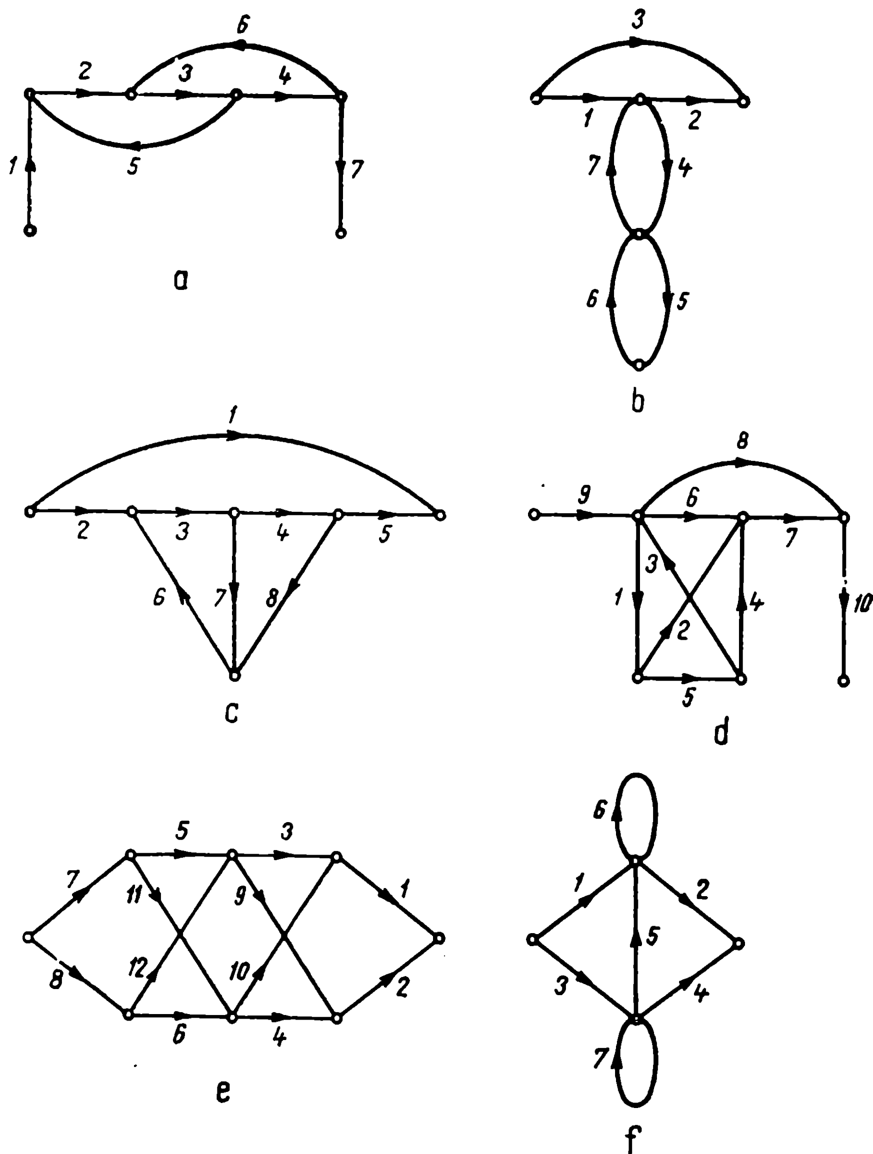


Fig. 9.P.1

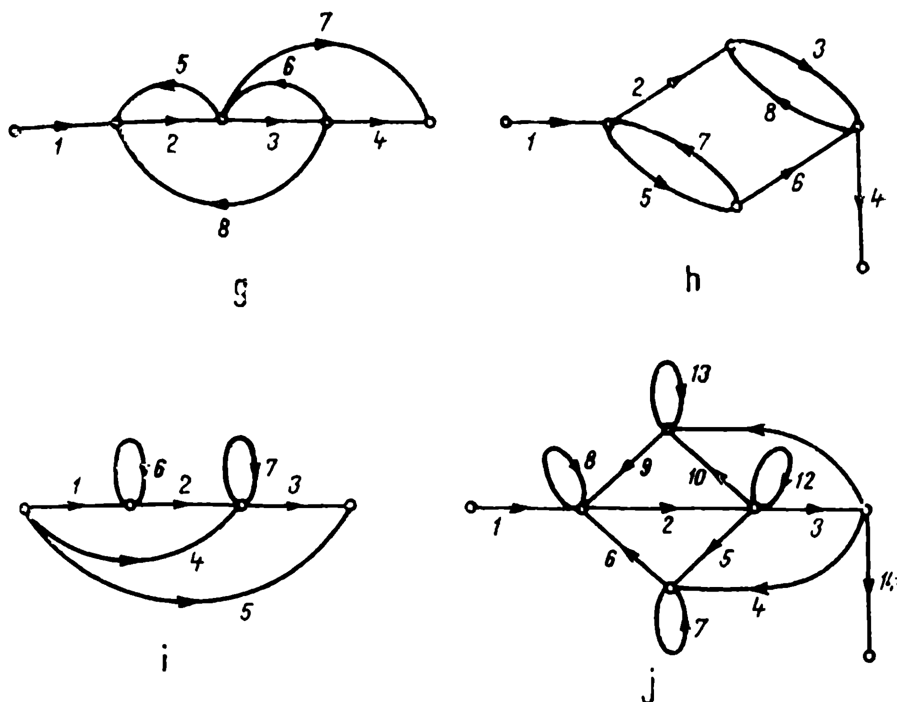


Fig. 9.P.1

P. 3. Să se determine amplificarea pentru fiecare graf de fluență a semnalului din fig. 9. P. 1. aplicînd formula.

P. 4. Fiecare graf de fluență a semnalului din fig. 9. P. 1 are un nod sursă și un nod sarcină.

a) Să se inverseze calea de la sursă la sarcină în fiecare graf.

b) Să se determine amplificarea pentru graful inversat și de aici amplificarea grafului original.

P. 5. Să se reducă fiecare graf de fluență a semnalului din fig. 9. P. 1 la un graf esențial. Apoi să se evalueze amplificarea folosind formula. Să se compare cu valorile obținute la problema 2 și 3.

P. 6. În graful din fig. 9.12*a* să se inverseze bucla $V_a V_b V_2 V_a$. Să se găsească amplificarea grafului I/V_1 și să se verifice că este aceeași cu cea găsită în text.

P. 7. Să se deseneze un graf de fluență a semnalului pentru rețelele din fig. 9. P. 7. Să se reducă graful de trecere a semnalului pentru a găsi funcția de transfer V_2/V_1.

P. 8. Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații pentru x_1 folosind grafurile de fluență a semnalului. De asemenea, să se găsească x_1 prin regula lui Cramer (atît ca o verificare cît și pentru a compara volumul de muncă necesar.)

$$(a)\quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(b)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(c)\quad \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

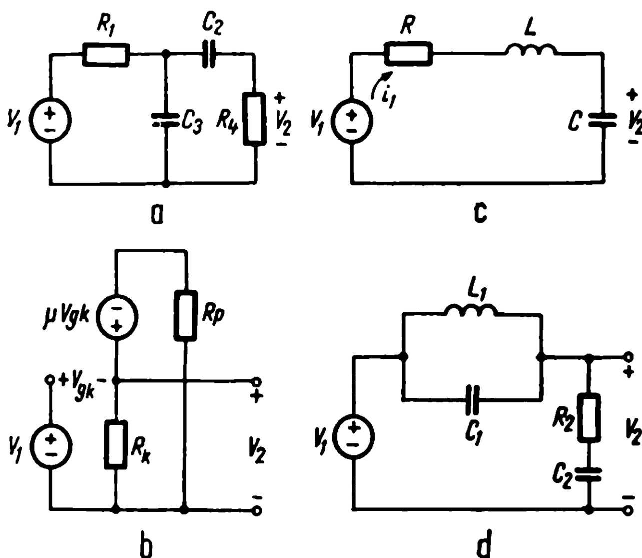


Fig. 9.P.7

P. 9. Să se găsească funcţia de transfer V_4/V_g pentru reţeaua din fig. 9.19 a cărui graf de fluenţă a semnalelor este dat în fig. 9.20 prin: (a) reducerea grafului de fluenţă a semnalului, (b) operare asupra matricii de conexiuni, (c) aplicarea formulei amplificării şi (d) prin folosirea ecuaţiilor cu variabile mixte.

P. 10. Să se găsească imepdanţa de transfer V_3/I_g pentru reţeaua din fig. 9.21 cu graful de fluenţă a semnalului din fig. 9.22 prin: (a) reducerea grafului de semnal; (b) operare asupra matricii de conexiuni; (c) aplicarea formulei amplificării şi (d) prin folosirea ecuaţiilor pe noduri.

P. 11. Să se determine graful de fluență a semnalului pentru fiecare din rețelele din fig. fig. 9. P. 11*a* la *d*. Să se folosească circuitul echivalent al triodei prezentat în fig. 9. 11*e*. Apoi să se evalueze amplificările grafurilor.

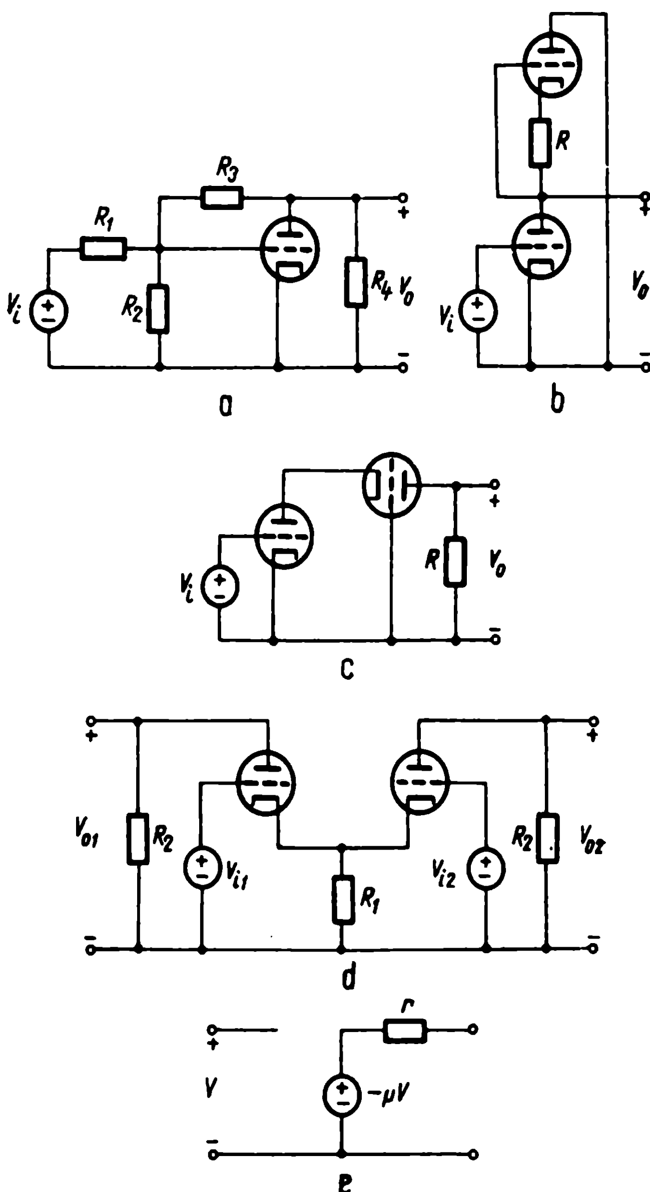


Fig. 9.P.11

P. 12. Să se traseze graful de fluență a semnalului pentru rețeaua din fig. 9. P. 12 pentru a găsi funcția de transfer $Y_{21}(s) = I_2/V_1$. Să se găsească această funcție reducînd graful de fluență a semnalului. De asemenea, să se aplice formula amplificării pentru graful original și să se compare rezultatele obținute.

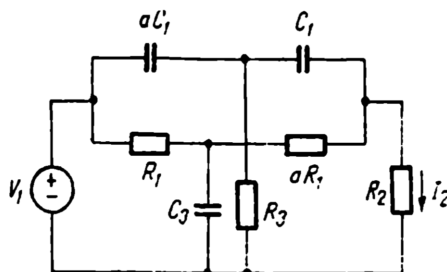


Fig. 9.P.12

P. 13. Să se găsească raportul de tensiuni V_2/V_1 pentru rețeaua în scară din fig. 9. P. 13 prin trasarea grafului de fluență a semnalului. Să se arate că zerourile funcției de transfer corespund polilor impedanțelor serie sau zerourilor impedanțelor derivație.

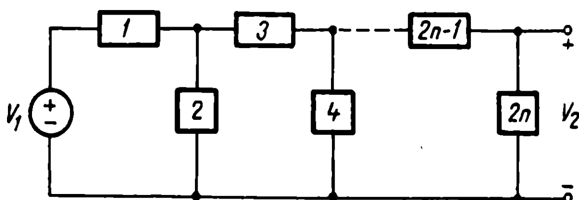


Fig. 9.P.13

P. 14. Să se determine un graf de fluență a semnalului pentru fiecare din rețelele din fig. 9. P. 14*a* la *c*. Să se folosească circuitul echivalent pentru tranzistor din fig. 9.P.14*d*. Apoi să se evalueze amplificarea.

P. 15. Să se găsească amplificarea V_2/V_1 pentru amplificatorul „pseudo-acordat" din fig. 9. P. 15 folosind grafurile de fluență a semnalelor.

P. 16. Pentru fiecare din rețelele din fig. 9. P. 16*a* la *d* să se folosească relația (40) pentru a determina senzitivitatea funcției de transfer V_0/V_i în raport cu : (a)*c*, (b)*r* și (c)*g*. Să se folosească circuitul echivalent al tranzistorului din fig. 9. P. 16*c*. Valorile nominale sînt $c = 100\mu F$, $r = 10^3\Omega$ și $g = 0{,}5℧$.

P. 17. Raportul de întoarcere și diferența de întoarcere a unei laturi sînt definite în text. Aceleași mărimi pot fi definite pentru un nod. *Raportul de întoarcere al nodului j*, notat prin T_j este amplificarea cu semn schimbat a grafului obținut prin despicarea nodului și eliminarea tuturor celorlalte noduri sursă și sarcină.

a

b

c

d

Fig. 9.P.14

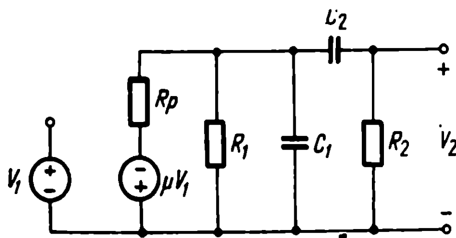


Fig. 9.P.15

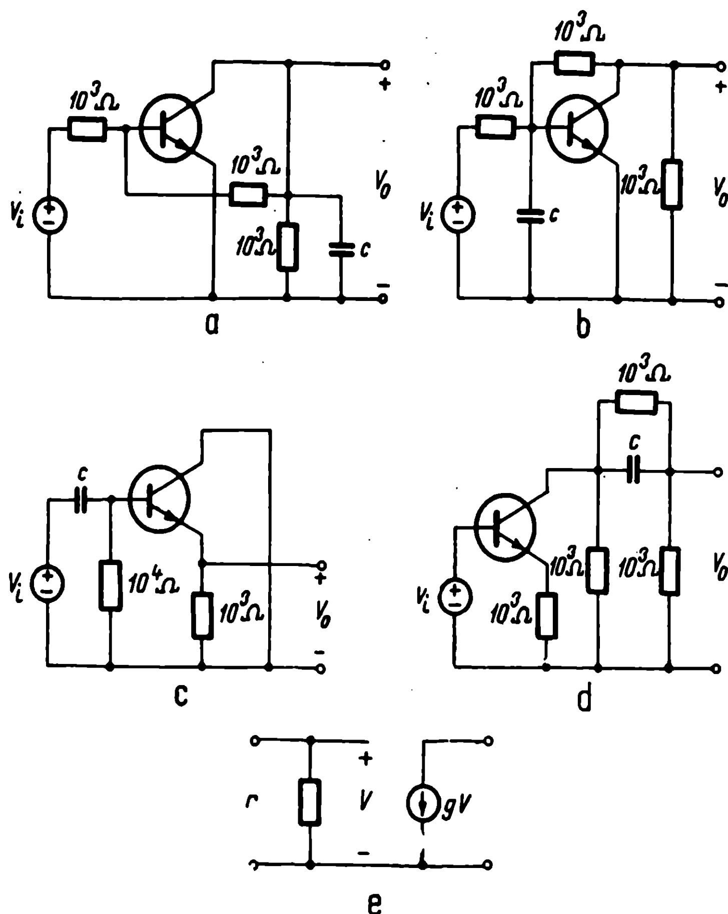


Fig. 9.P.16

Diferența de întoarcere a nodului j se definește ca $F_j = 1 + T_j$. *Raportul de întoarcere parțială a nodului j*, T'_j, este definit ca raport de întoarcere a nodului *j*, cînd toate nodurile de ordin *superior* au fost îndepărtate din graf. Acesta depinde evident de ordonarea nodurilor. Se definește de asemenea și *diferența de întoarcere parțială a nodului j*; ea este $F'_j = 1 + T'_j$.

a) Să presupunem că nodurile unui graf sînt numerotate într-o ordine particulară. Se elimină toate nodurile de ordin superior lui *k*. Se desenează graful redus sub forma sa generală, reținînd doar nodurile *k* și *k*−1. Să se determine diferențele parțiale de întoarcere și să se găsească produsul $F'_k F'_{k-1}$. Să se inverseze apoi numerotarea nodurilor *k* și *k*−1 și să se găsească produsul $F'_k F'_{k-1}$. Să se arate că acest produs este independent de numerotarea nodurilor.

b) Să se arate că produsul diferențelor parțiale de întoarcere ale tuturor nodurilor dintr-un graf este o proprietate intrinsecă a grafului, independentă de numerotarea nodurilor.

P. 18. Care din următoarele funcţii pondere corespunde unor reţele stabile MIME:

(*a*) $t\varepsilon^{-2t}\sin t\, u(t)$ (*b*) $\frac{2}{(t-3)^2}u(t)$

(*c*) $\frac{\sin^2 2t}{t^2}u(t)$ (*d*) $\frac{\varepsilon^{-2t}-\varepsilon^{-t/2}}{t}u(t)$

(*e*) $[\cos t + t^2\varepsilon^{-t}]u(t)$ (*f*) $\frac{5}{t}u(t-3)$

P. 19. Să se folosească (1) criteriul Routh şi (2) criteriul Liénard-Chipart pentru a determina care din următoarele polinoame în s au zerouri doar în semiplanul stîng.

(*a*) $s^3 + s^2 + s + 6$ (*b*) $s^4 + 5s^3 + 9s^2 + 7s + 2$

(*c*) $s^4 + 3s^3 + 7s^2 + 6s + 4$ (*d*) $s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 8s^2 + 7s + 6$

(*e*) $2s^5 + 9s^4 + 19s^3 + 25s^2 + 19s + 6$ (*f*) $4s^3 + 7s^2 + 7s + 2$

(*g*) $s^3 + 3s^2 + 4s + 2$ (*h*) $3s^3 + 5s^2 + 4s + 6$

(*i*) $s^6 + 7s^5 + 7s^4 + 5s^3 + 4s^2 + s + 1$ (*j*) $2s^5 + 4s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 4s + 2$

(*k*) $2s^3 + s^2 + 5s + 2$ (*l*) $s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s + 1$

(*m*) $2s^4 + 4s^3 + 7s^2 + 7s + 3$

P. 20. Să presupunem că $H(s)$ este o fracţie raţională şi regulată la infinit; atunci $H(s)$ este egală cu o constantă (care poate fi zero) plus o fracţie raţională proprie. Să se arate că o reţea avînd $H(s)$ drept funcţie de transfer este MIME stabilă dacă şi numai dacă toţi polii funcţiei $H(s)$ au partea reală negativă.

P. 21. Să se folosească criteriul Liénard-Chipart pentru a determina valorile lui μ pentru care reţelele din fig. 9. P. 21 sînt MIME stabile

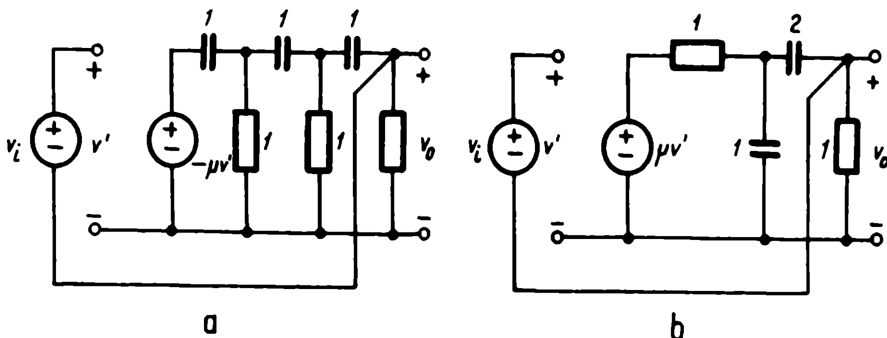
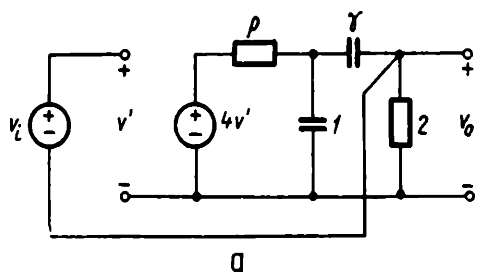


Fig. 9. P. 21.

P. 22. Să se folosească criteriul Liénard-Chipart pentru a determina valorile lui ρ şi γ pentru care reţelele din fig. 9. P. 22 sînt MIME stabile. În planul parametrilor $\rho-\gamma$ să se haşureze zonele de stabilitate.



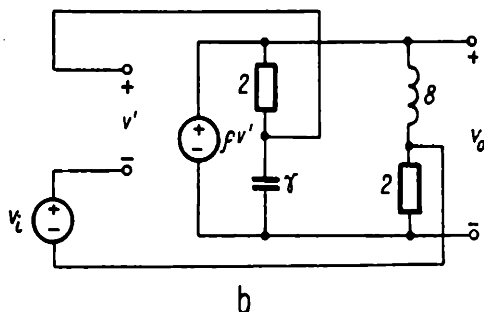
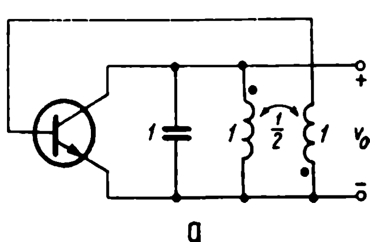
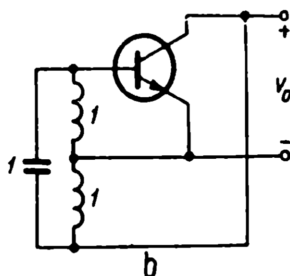
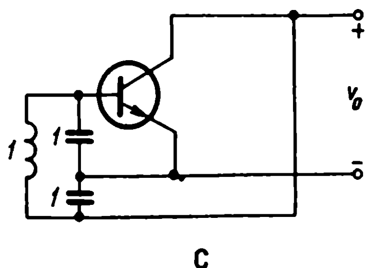


Fig. 9. P22

P. 23. Să se folosească criteriul Liénard-Chipart pentru a determina valorile lui r și g pentru care oscilatoarele din fig. 9. P. 23 *a* la *c* nu sînt MIME stabile. Se presupune că o sursă de tensiune de intrare este conectată în serie cu baza tranzistorului. Să se folosească circuitul echivalent al tranzistorului din fig. 9. P. 23*d*. În planul parametrilor $r-g$ să se hașureze zonele de instabilitate.







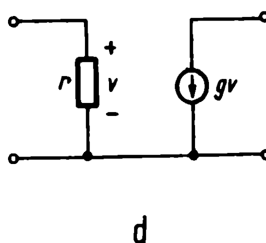


Fig. 9. P23

P. 24. Să se traseze diagrama Nyquist pentru fiecare din rapoartele de întoarcere :

(*a*) $T(s) = k \dfrac{4}{s(s+1)(s+2)}$ (*b*) $T(s) = k \dfrac{s+1}{s^2+3s+3}$

(*c*) $T(s) = k \dfrac{s+3}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$ (*d*) $T(s) = k \dfrac{(s+1)(s+3)}{s^2+4s+4}$

(*e*) $T(s) = k \dfrac{(s+1)(s+3)}{s(s^2+4s+4)}$ (*f*) $T(s) = k \dfrac{3}{s(s+2)(s^2+2s+10)}$

(*g*) $T(s) = k \dfrac{s+2}{(s+4)(s-1)}$ (*h*) $T(s) = k \dfrac{s-1}{s(s+1)}$

(*i*) $T(s) = k \dfrac{(s+1)}{s^2(s+2)}$ (*j*) $T(s) = k \dfrac{s+4}{s^2(s+2)}$

(*k*) $T(s) = k \dfrac{(s+1)^2}{s^3(s+8)}$ (*l*) $T(s) = k \dfrac{s}{(s+1)(s+2)^2}$

(*m*) $T(s) = k \dfrac{s^2-s+1}{s(s+1)}$ (*n*) $T(s) = k \dfrac{(s+1)(s+2)}{s(s^2+4)}$

(*o*) $T(s) = k \dfrac{2}{s(s^2+4)}$ (*p*) $T(s) = k \dfrac{(s+1)}{s(s^2-s+1)}$

Pentru ce valori ale lui k rețeaua corespunzătoare cu reacție este stabilă pe baza criteriului lui Nyquist? Se presupune că $A(s)$ are zerouri numai în semiplanul stîng.

P.25. În rețeaua din fig. 9. 33 din text, valorile componentelor sînt astfel, încît frecvențele de tăiere ale celor trei etaje sînt

$$\omega_a = 100, \quad \omega_b = 1000, \quad \omega_c = 100.000$$

Să se traseze cu atenție diagrama Nyquist în acest caz. Să se găsească valoarea maximă pe care o poate avea T_m pentru ca rețeaua să fie stabilă.

P. 26. Să se traseze diagrama Nyquist pentru rețeaua din fig. 9.P.26. Să se găsească valorile R_f L_f pentru care rețeaua este stabilă. Care este valoarea maximă a lui α în aceste condiții, dacă rețeaua rămîne stabilă pentru mici variații ale valorilor parametrilor (în particular: R_e, G_e, R_f și L_f) față de valorile proiectate?

P. 27. Să se traseze diagrama Nyquist pentru rețeaua din fig. 9. P. 27 și să se găsească condiția de stabilitate.

P. 28. Să se traseze un graf de semnal pentru rețeaua dată în fig. 9. P. 28. Reducînd graful, să se calculeze funcția de transfer.

P. 29. Să se verifice teorema următoare, cunoscută drept *criteriul invers al lui Nyquist*: *O rețea avînd drept funcție de transfer* :

$$H(s) = \frac{kA(s)}{1-kA(s)B(s)}$$

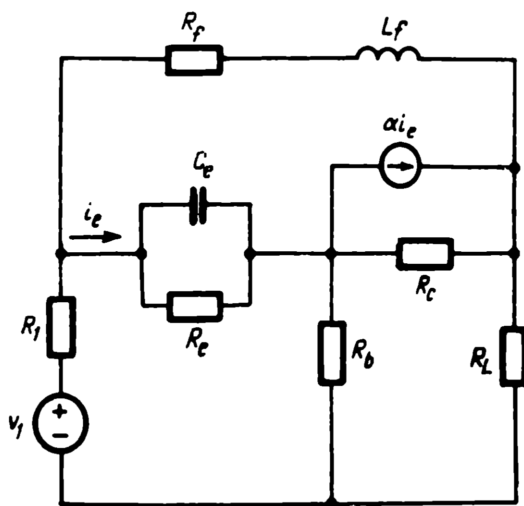


Fig. 9.P.26.

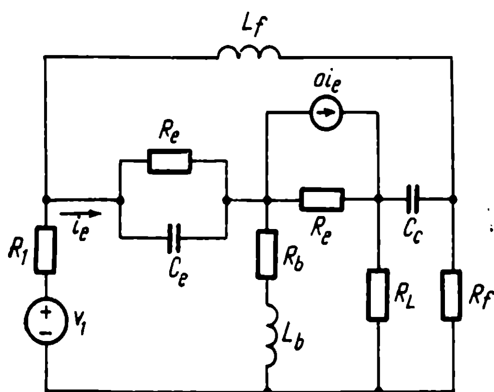


Fig. 9.P.27.

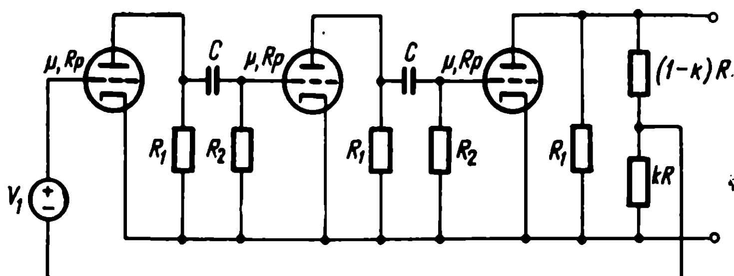


Fig. 9. P.28.

este MIME stabilă, (a) *dacă nici un pol din semiplanul drept sau axa imaginară al lui* $A(s)$ *nu este de asemenea un zero pentru* $B(s)$ *și* (b) *dacă diagrama Nyquist pentru* $1/T(s)=1/kA(s)\,B(s)$ *nu trece prin punctul* $(-1{,}0)$ *și nu ocolește acest punct de* $-N_p$ *ori în sensul acelor de ceasornic, unde* N_p *este numărul polilor din semiplanul drept a lui* $1/T(s)$. Diagrama Nyquist pentru $1/T(s)$ este cunoscută drept *diagrama Nyquist inversă a lui* $T(s)$.

P. 30. Pe baza problemei **P.29**, să se traseze diagrama Nyquist inversă pentru fiecare din rapoartele de întoarcere enumerate în problema **P.24**. Apoi să se indice valorile lui k pentru care rețeaua cu reacție corespunzătoare este stabilă pe baza criteriului invers al lui Nyquist. Se presupune că $A(s)$ are zerouri doar în semiplanul stîng.

P. 31. Să se considere toate combinațiile posibile de $A(s)$ și $B(s)$, care se pot obține din lista următoare. Să se aplice (1) criteriul lui Nyquist și (2) criteriul invers al lui Nyquist (problema **P.29**) pentru a determina valorile lui k pentru care fiecare rețea este stabilă

$$A(s)=\frac{1}{(s+1)\,(s+2)} \qquad B(s)=1$$

$$A(s)=\frac{1}{s(s+1)} \qquad B(s)=\frac{1}{s+4}$$

$$A(s)=\frac{(s+1)}{s^2(s+2)} \qquad B(s)=\frac{s}{s+4}$$

P. 32. Se consideră o rețea activă ce poate fi excitată fie cu o sursă de tensiune, fie cu o sursă de curent, după cum se arată în fig. 9. P. 32 *a* și *b*. Funcțiile de transfer respective vor fi:

$$(a)\ \frac{V_2}{V_1}=R\,\frac{\Delta_{12}}{\Delta}\Big|_z, \quad (b)\ \frac{V_2}{I_1}=\frac{\Delta_{12}}{\Delta}\Big|_y.$$

În primul caz, determinantul este cel al matricei de impedanțe a buclelor și este format prin scurt-circuitarea terminalelor de intrare. În al doilea caz determinantul este cel al matricei de admianțe a nodurilor și se obține lăsînd terminalele de intrare în gol. Zerorurile acestor determinanți — care reprezintă polii funcțiilor respective de transfer — vor fi diferite. Prin urmare, proprietățile de stabilitate nu trebuie să fie aceleași pentru cele două feluri de excitație. Dacă o rețea este stabilă cînd terminalele sale sînt scurt circuitate se spune că este *stabilă în scurt circuit*. Similar, dacă o rețea este stabilă cînd terminalele sale sînt în gol, ea se numește *stabilă în gol*. Este posibil ca o rețea să fie atît stabilă în scurt circuit cît și stabilă în gol.

Este de asemenea posibil să fie stabilă pentru o condiție a terminalelor dar nu pentru cealaltă.

a) Rețeaua din fig. 9. P. 32c include doi tranzistori, reprezentați prin modelele lor liniare și un diport reciproc pasiv. Examinînd polii impedanței de intrare, să se arate că această rețea este stabilă în gol.

b) O altă rețea este prezentată în fig. 9. P. 32 *d*. Să se arate că este stabilă în scurtcircuit.

Să considerăm un diport cu rezistențe la ambele capete, ca în fig. 9. P.32 *e*. Oricare din porți poate fi scurt-circuitată sau lăsată în gol dîndu-se valori corespunzătoare lui R_s și R_L. Întreaga rețea poate fi stabilă în scurt circuit și / sau în gol la oricare din extremități.

c) Ca un exemplu specific să se considere rețeaua din fig. P.32 *f*. Aceasta este un convertor de impedanță negativă cu un condensator care reprezintă capacitățile inevitabile din dispozitivele active. Să se determine cînd rețeaua este stabilă în scurtcircuit și / sau în gol la ambele extremități.

Fig. 9. P32

P. 33. În exemplul din fig. 9. 21, se dorește să se afle impedanța de intrare. Se plasează un nod (și laturile corespunzătoare) în fig. 9. 22 ce reprezintă tensiunea la bornele sursei independente de curent. Să se găsească impedanța de intrare reducînd graful. Să se găsească de asemenea impedanța de transfer V_3/I_g.

P. 34. În fig. 9. 20, nodurile V_1 și V_4 sînt noduri esențiale. Să se reducă graful la un graf esențial cu nodurile V_1 și V_4 ca noduri esențiale și să se compare cu fig. 9.18.

P. 35. Grafurile de fluență a semnalelor pentru două amplificatoare cu reacție sînt date în fig. 9. P. 35 parametrul β_2 trebuie ales astfel încît amplificările celor două grafe să fie egale. Să se determine senzitivitatea S_α^G, a amplificării fiecărui amplificator în raport cu parametrul α. Să se compare și să se arate care din cele două amplificatoare este mai puțin senzitiv la variațiile lui α.

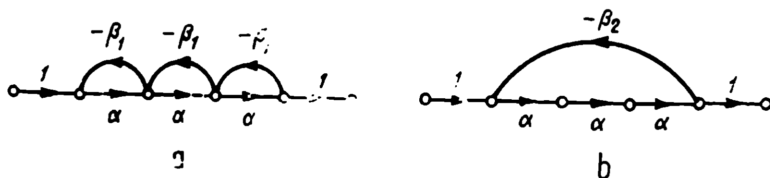


Fig. 9.P.35.

10 Circuite (rețele) liniare variabile în timp și circuite (rețele) neliniare

În capitolele precedente s-au considerat numai circuite liniare și invariabile în timp. În realitate, circuitele întîlnite în practică prezintă caracteristici, care nu pot fi descrise complet și corespunzător, prin modele liniare, invariabile în timp.

O piesă componentă simplă, ca de exemplu o rezistență, are o rezistență electrică încet variabilă în timp, sub influența variației de temperatură a mediului ambiant; acest efect nu este totdeauna neglijabil. La fel, saturația inducției magnetice în miezul feromagnetic al une bobine, funcționarea cu semnal mare a unui dispozitiv activ, cum este tranzistorul, disipația excesivă de energie într-o rezistență etc., conduc la neliniaritate. Rețelele reale sînt deci, în multe situații, neliniare.

Pe lîngă situațiile nedorite de abateri de la invarianța în timp și (sau) de la liniaritate, pe care dorim să le reducem, există alte situații în care „abaterile" sînt introduse intenționat, pentru obținerea unor rețele cu anumite performanțe; astfel, de exemplu, amplificatorul parametric este realizat ca o rețea liniară, variabilă în timp. Oscilatoarele, modulatoarele și demodulatoarele sînt numai cîteva din numeroasele rețele realizate cu elemente neliniare.

În prezentul capitol se va trata formularea matematică și soluționarea analitică a rețelelor liniare, variabile în timp și neliniare.

Deoarece soluția analitică a unei rețele neliniare nu poate fi determinată, în general, se va include un paragraf cu procedee de soluții numerice. De asemenea, mai este un paragraf cu teoria stabilității după Liapunov, care constituie unul din instrumentele fundamentale disponibile pentru studiul rețelelor neliniare. Deși se vor prezenta aici numai o parte din aceste teme — domeniul actual al cunoștințelor fiind destul de întins pentru a putea fi cuprins în mai multe volume — tratarea va fi îngrijită și nu vagă. Pentru dezvoltarea cunoștințelor sînt indicate referințe la bibliografie.

10.1. FORMULAREA ECUAŢIILOR DE STARE PENTRU CIRCUITE VARIABILE ÎN TIMP

În paragraful 4.5 s-a prezentat o metodă pentru formularea ecuaţiilor de stare a unei reţele invariante în timp. În legătură cu aceasta se observă că noţiunea de dependenţă sau independenţă de timp nu a fost introdusă decît după ecuaţiile (129). De aceea vom începe tratarea circuitelor variabile în timp cu aceste ecuaţii, pe care le repetăm aici pentru uşurinţă:

$$\frac{d}{dt}[\mathscr{C}\mathbf{v}_{Ct}] = [-\mathscr{Y} \ \ \mathscr{H}]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{Ct}\\ \mathbf{i}_{Ll}\end{bmatrix} + [-\hat{\mathscr{Y}} \ \ \hat{\mathscr{H}}]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_E\\ \mathbf{i}_J\end{bmatrix} + \frac{d}{dt}[\hat{\mathscr{C}}\mathbf{v}_E] \tag{1a}$$

$$\frac{d}{dt}[\mathscr{L}\mathbf{i}_{Ll}] = [\mathscr{G} \ -\mathscr{Z}]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{Ct}\\ \mathbf{i}_{Ll}\end{bmatrix} + [\hat{\mathscr{G}} \ -\hat{\mathscr{Z}}]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_E\\ \mathbf{i}_J\end{bmatrix} + \frac{d}{dt}[\hat{\mathscr{L}}\mathbf{i}_J] \tag{1b}$$

sau, după concentrare într-o singură ecuaţie,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\mathscr{C} & 0\\ 0 & \mathscr{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{Ct}\\ \mathbf{i}_{Ll}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\mathscr{Y} & \mathscr{H}\\ \mathscr{G} & -\mathscr{Z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{Ct}\\ \mathbf{i}_{Ll}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\hat{\mathscr{Y}} & \hat{\mathscr{H}}\\ \hat{\mathscr{G}} & -\hat{\mathscr{Z}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_E\\ \mathbf{i}_J\end{bmatrix} + \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\hat{\mathscr{C}} & 0\\ 0 & \hat{\mathscr{L}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_E\\ \mathbf{i}_J\end{bmatrix}; \tag{2}$$

Reducerea la forma normală

Această ecuaţie poate fi redusă la forma normală

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathscr{A}\mathbf{x} + \mathscr{B}\mathbf{e}, \tag{3}$$

cu condiţia ca matricea

$$\begin{bmatrix}\mathscr{C} & 0\\ 0 & \mathscr{L}\end{bmatrix} \tag{4}$$

să fie mărginită şi nesingulară. Deoarece ne interesează o soluţie pentru $t \geqslant t_0$, vom presupune că (4) este mărginită şi nesingulară pentru $t \geqslant t_0$; aceasta înseamnă că fiecare element din (4) este mărginit şi

$$\det\begin{bmatrix}\mathscr{C} & 0\\ 0 & \mathscr{L}\end{bmatrix} \neq 0$$

pentru $t \geqslant t_0$.

Acum se poate proceda, în două moduri, pentru punerea ecuaţiei (2) în forma normală. După primul mod se pune:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathscr{C} & 0 \\ 0 & \mathscr{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Lt} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\mathscr{C}} & 0 \\ 0 & \hat{\mathscr{L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{i}_J \end{bmatrix}; \tag{5}$$

apoi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathscr{C} & 0 \\ 0 & \mathscr{L} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \hat{\mathscr{C}} & 0 \\ 0 & \hat{\mathscr{L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{i}_J \end{bmatrix} \right\}. \tag{6}$$

Prin înlocuirea acestei expresii în (2) şi rearanjarea termenilor, se obţine forma dorită din (3), cu

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} -\mathscr{Y} & \mathscr{H} \\ \mathscr{G} & -\mathscr{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathscr{C} & 0 \\ 0 & \mathscr{L} \end{bmatrix}^{-1} \tag{7}$$

$$\mathscr{B} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathscr{Y}} & \hat{\mathscr{H}} \\ \hat{\mathscr{G}} & -\hat{\mathscr{Z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathscr{Y} & \mathscr{H} \\ \mathscr{G} & -\mathscr{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathscr{C} & 0 \\ 0 & \mathscr{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathscr{C}} & 0 \\ 0 & \hat{\mathscr{L}} \end{bmatrix} \tag{8}$$

şi

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{i}_J \end{bmatrix}. \tag{9}$$

După al doilea mod se pune,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Lt} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathscr{C} & 0 \\ 0 & \mathscr{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathscr{C}} & 0 \\ 0 & \hat{\mathscr{L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{i}_J \end{bmatrix}. \tag{10}$$

În acest caz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ct} \\ \mathbf{i}_{Lt} \end{bmatrix} = \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathscr{C} & 0 \\ 0 & \mathscr{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathscr{C}} & 0 \\ 0 & \hat{\mathscr{L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{i}_J \end{bmatrix}. \tag{11}$$

După înlocuirea acestei expresii în (2) şi rearanjarea termenilor din ecuaţia rezultată, se obţine ecuaţia în forma normală (3), cu

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} \mathscr{C} & 0 \\ 0 & \mathscr{L} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} -\mathscr{Y} & \mathscr{H} \\ \mathscr{G} & -\mathscr{Z} \end{bmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathscr{C} & 0 \\ 0 & \mathscr{L} \end{bmatrix} \right\} \tag{12}$$

şi

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{C} & 0 \\ 0 & \mathcal{L} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} -\hat{\mathcal{Y}} & \hat{\mathcal{H}} \\ \hat{\mathcal{G}} & -\hat{\mathcal{Z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathcal{Y} & \mathcal{H} \\ \mathcal{G} & -\mathcal{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C} & 0 \\ 0 & \mathcal{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{C}} & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{L}} \end{bmatrix} \right\}. \tag{13}$$

Vectorul **e** este exprimat iar prin (9).

Modul al doilea de alegere a vectorului de stare duce la o matrice $\mathcal{A}$, arătată în (12), care necesită derivarea matricei de parametri (4). Deoarece se caută o soluţie a ecuaţiei de stare pentru $t \geqslant t_0$, se va presupune că această matrice de parametri este diferenţiabilă pentru $t \geqslant t_0$. Această presupunere nu este necesară dacă vectorul de stare se alege după primul mod.

Pe lîngă aceasta, modul al doilea de alegere a vectorului de stare duce la nişte matrice $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$, care sînt, în general, mai complicate din punct de vedere funcţional decît cele obţinute cînd vectorul de stare se alege după primul mod.

Aceasta este mai evident cînd avem

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathcal{C}} & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{L}} \end{bmatrix} = 0.$$

În acest caz primul mod dă matricele,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -\mathcal{Y} & \mathcal{H} \\ \mathcal{G} & -\mathcal{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C} & 0 \\ 0 & \mathcal{L} \end{bmatrix}^{-1} \quad \text{şi} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathcal{Y}} & \hat{\mathcal{H}} \\ \hat{\mathcal{G}} & -\hat{\mathcal{Z}} \end{bmatrix},$$

care, evident, sînt mai simple funcţional decît matricele

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{C} & 0 \\ 0 & \mathcal{L} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} -\mathcal{Y} & \mathcal{H} \\ \mathcal{G} & -\mathcal{Z} \end{bmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathcal{C} & 0 \\ 0 & \mathcal{L} \end{bmatrix} \right\}$$

şi

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{C} & 0 \\ 0 & \mathcal{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\hat{\mathcal{Y}} & \hat{\mathcal{H}} \\ \hat{\mathcal{G}} & -\hat{\mathcal{Z}} \end{bmatrix}$$

stabilite în al doilea mod. Din aceste observaţii se poate trage concluzia că primul mod de alegere a lui **x** este preferabil.

Componentele vectorului de stare

Să ne concentrăm atenţia deci asupra caracterizării elementelor lui **x**, date în (5). După efectuarae înmulţirilor de matrice indicate în (5) se obţine :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathscr{C}\mathbf{v}_{Ct} - \hat{\mathscr{C}}\mathbf{v}_E \\ \mathscr{L}\mathbf{i}_{Ll} - \hat{\mathscr{L}}\mathbf{i}_J \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Din relaţiile (117) şi (118) din Cap. 4 se observă că :

$$\mathscr{C} = \mathbf{C}_t + \mathbf{Q}_{CC}\,\mathbf{C}_l\,\mathbf{Q}'_{CC}$$

$$\hat{\mathscr{C}} = -\,\mathbf{Q}_{CC}\,\mathbf{C}_l\,\mathbf{Q}'_{EC}$$

În consecinţă se găseşte că :

$$\begin{aligned}\mathscr{C}\mathbf{v}_{Ct} - \hat{\mathscr{C}}\mathbf{v}_E &= \mathbf{C}_t\,\mathbf{v}_{Ct} + \mathbf{Q}_{CC}\,\mathbf{C}_l\,(\mathbf{Q}'_{CC}\,\mathbf{v}_{Ct} + \mathbf{Q}'_{EC}\,\mathbf{v}_E) \\ &= \mathbf{C}_t\,\mathbf{v}_{Ct} + \mathbf{Q}_{CC}\,\mathbf{C}_l\,\mathbf{v}_{Cl}.\end{aligned} \tag{15}$$

Această ultimă formă rezultă din relaţia (113 e), de la cap. 4, pe care o repetăm aici

$$\mathbf{Q}'_{CC}\,\mathbf{v}_{Ct} + \mathbf{Q}'_{EC}\,\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_{Cl}.$$

Dar, elementele $\mathbf{C}_t\,\mathbf{v}_{Ct}$ şi $\mathbf{C}_l\,\mathbf{v}_{Cl}$ sînt simple sarcini ale capacităţilor din reţea. Astfel, elementele lui **x** exprimate prin $\mathscr{C}\mathbf{v}_{Ct}-\hat{\mathscr{C}}\mathbf{v}_E$, după cum se vede în (15), sînt combinaţii liniare ale sarcinilor din capacităţi.

Trecînd la cel de-al doilea rînd din matricea unicoloană (14), cu ajutorul relaţiilor (122) şi (123) din Cap. 4, se determină

$$\mathscr{L} = \mathbf{L}_{ll} - \mathbf{L}_{lt}\,\mathbf{Q}_{LL} - \mathbf{Q}'_{LL}\,\mathbf{L}_{tl} + \mathbf{Q}'_{LL}\,\mathbf{L}_{tt}\,\mathbf{Q}_{LL}$$

$$\hat{\mathscr{L}} = -\,\mathbf{Q}'_{LL}\,\mathbf{L}_{tt}\,\mathbf{Q}_{LJ} + \mathbf{L}_{lt}\,\mathbf{Q}_{LJ}.$$

Astfel :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\mathbf{i}_{Ll} - \hat{\mathscr{L}}\mathbf{i}_J &= \mathbf{L}_{ll}\,\mathbf{i}_{Ll} - \mathbf{Q}'_{LL}\,\mathbf{L}_{tl}\,\mathbf{i}_{Ll} + \mathbf{L}_{lt}\,(-\,\mathbf{Q}_{LL}\,\mathbf{i}_{Ll} - \mathbf{Q}_{LJ}\,\mathbf{i}_J) \\ &\quad - \mathbf{Q}'_{LL}\,\mathbf{L}_{tt}\,(-\,\mathbf{Q}_{LL}\,\mathbf{i}_{Ll} - \mathbf{Q}_{LJ}\,\mathbf{i}_J) \\ &= \mathbf{L}_{ll}\,\mathbf{i}_{Ll} - \mathbf{Q}'_{LL}\,\mathbf{L}_{tl}\,\mathbf{i}_{Ll} + \mathbf{L}_{lt}\,\mathbf{i}_{Lt} - \mathbf{Q}'_{LL}\,\mathbf{L}_{tt}\,\mathbf{i}_{Lt}.\end{aligned} \tag{16}$$

Ultima relaţie de mai sus rezultă din (113 d), Cap. 4, pe care o repetăm aici:

$$-\mathbf{Q}_{LL}\,\mathbf{i}_{Ll} - \mathbf{Q}_{LJ}\,\mathbf{i}_{J} = \mathbf{i}_{Lt}.$$

Dar, elementele $\mathbf{L}_{ll}\mathbf{i}_{Ll}$, $\mathbf{L}_{lt}\mathbf{i}_{Lt}$, $\mathbf{L}_{tl}$, $\mathbf{i}_{Lt}$ şi $\mathbf{L}_{tt}\mathbf{i}_{Lt}$ sînt fluxurile magnetice prin bobinele de inductanţă. În particular, elementele $\mathbf{L}_{tl}\mathbf{i}_{Ll}$ şi $\mathbf{L}_{lt}\mathbf{i}_{Lt}$ sînt fluxuri magnetice de cuplaj mutual. Deci elementele lui $\mathbf{x}$ stabilite prin $\mathscr{L}\mathbf{i}_{Ll} - \hat{\mathscr{L}}\,\mathbf{i}_{J}$ sînt combinaţii liniare ale fluxurilor magnetice din bobine.

În privinţa ecuaţiei de ieşire a circuitului, după cum s-a văzut în cap. 4, se poate arăta că oricare din variabilele de curent şi de tensiune ale circuitului poate fi exprimată prin termenii $\mathbf{v}_{Ct}$, $\mathbf{i}_{Ll}$, $\mathbf{v}_{E}$, $\mathbf{i}_{J}$, $d\mathbf{v}_{E}/dt$ şi $d\mathbf{i}_{J}/dt$. Dacă se notează cu $\mathbf{w}$ vectorul de ieşire, — elementele lui $\mathbf{w}$ sînt variabilele de tensiune şi (sau) de curent ce trebuie să rezulte la ieşirea circuitului, — atunci se poate arăta, că, pentru ambele moduri de mai sus de definire a vectorului $\mathbf{x}$, vectorul $\mathbf{w}$ poate fi exprimat convenabil prin

$$\mathbf{w} = \mathscr{C}\mathbf{x} + \mathscr{D}\mathbf{e} + \frac{d}{dt}\hat{\mathscr{D}}\mathbf{e} \tag{17}$$

Aceasta se poate verifica uşor.

Exemplu. Pentru a ilustra reducerea ecuaţiilor de circuit din forma (2), în forma normală (3), se consideră circuitul din fig. 1, care conţine o capacitate variabilă periodic. Fie v_1 tensiunea pe condensator şi i_3 curentul prin inductanţă. Este uşor de verificat că vectorul $[v_1\ i_3]'$ satisface ecuaţia diferenţială

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{1+\sigma\sin 2t} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ i_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/10 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ i_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}[j(t)].$$

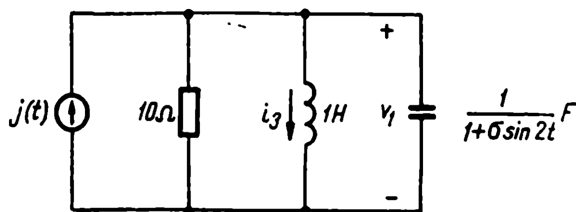


Fig. 10.1. Circuit variabil în timp periodic.

(Se recomandă să se verifice aceasta). Aceasta este de fapt rezultatul ce s-ar obţine utilizînd metodele din par. 4.5., cu relaţiile (129*a*) şi (129 *b*).

După cum se vede în fig. 1, valoarea $|\sigma|$ este subunitară.

Rezultă că matricea

$$\begin{bmatrix}\dfrac{1}{1+\sigma\sin 2t} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

este mărginită pentru toate valorile lui t şi comportă o matrice inversă, anume :

$$\begin{bmatrix} 1+\sigma\sin 2t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

În acord cu (5), vectorul de stare se consideră

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+\sigma\sin 2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_3 \end{bmatrix}.$$

Se observă că elementele lui $\mathbf{x}$ sînt sarcini pe condensator şi fluxuri în bobină. Din (7) şi (8) se găseşte :

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} -1/10 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\sigma\sin 2t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1+\sigma\sin 2t}{10} & -1 \\ 1+\sigma\sin 2t & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se poate alege vectorul de stare al circuitului după modul indicat în (10).

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_1 \\ i_3 \end{bmatrix}.$$

Atunci, cu ajutorul relaţiilor (12) şi (13), se obţine,

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1+\sigma\sin 2t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{-2\sigma\cos 2t}{(1+\sigma\sin 2t)^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{-(1+\sigma\sin 2t)^2 + 20\sigma\cos 2t}{10+10\sigma\sin 2t} & -1-\sigma\sin 2t \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{B} = \begin{bmatrix} 1+\sigma\sin 2t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\sigma\sin 2t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se observă că aici matricele $\mathscr{A}$ şi $\mathscr{B}$ sînt funcţional, mai complicate ca în cazul anterior. Astfel prin acest exemplu, ca şi prin discuţia generală de mai sus, se vede că este preferabilă alegerea lui $\mathbf{x}$ ca în (5), adică luînd elementele vectorului de stare ca o combinare liniară de sarcini electrice şi fluxuri magentice.

La aceeaşi concluzie se va ajunge şi cînd ne vom ocupa de circuite neliniare.

10.2. SOLUŢIILE ECUAŢIILOR DE STARE PENTRU CIRCUITE VARIABILE ÎN TIMP

După cum s-a indicat în ultimul paragraf, variabilele de intrare şi de ieşire ale unui circuit variabil în timp sînt legate prin ecuaţiile de stare:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathscr{A}\mathbf{x} + \mathscr{B}\mathbf{e} \tag{18a}$$

$$\mathbf{w} = \mathscr{C}\mathbf{x} + \mathscr{D}\mathbf{e} + \frac{d}{dt}\hat{\mathscr{D}}\mathbf{e}. \tag{18b}$$

În rezolvarea acestor ecuaţii trebuie să se considere, în mod anticipat, că unele sau toate matricele $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ şi $\hat{\mathscr{D}}$ pot fi funcţii de timp.

Se va rezolva ecuaţia de stare (18*a*) pentru vectorul de stare $\mathbf{x}$, folosind metoda variaţiei de parametru. Este recomandabil să se compare rezultatele parţiale la fiecare etapă de calcul, cu cele obţinute la etapele respective, în cazul circuitelor invariabile în timp, tratat în cap. 4. Se admite că $\mathbf{x}$ este un vector cu n componente şi, în consecinţă, $\mathscr{A}$ este o matrice păstrată de ordinul n.

Să considerăm:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Y}(t)\,\hat{\mathbf{x}}(t), \tag{19}$$

unde $\mathbf{Y}(t)$ este o matrice pătrată de ordin n.

După introducerea acestei expresii în (18*a*) şi după rearanjarea normală a termenilor, se obţine

$$\left(\frac{d}{dt}\mathbf{Y} - \mathscr{A}\mathbf{Y}\right)\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Y}\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} + \mathscr{B}\mathbf{e} \tag{20}$$

Este evident că, dacă expresia din paranteză este zero, soluţia va fi mai simplă. Se va presupune acest caz, adică se va admite că ecuaţia diferenţială omogenă

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Y} = \mathscr{A}\mathbf{Y}, \tag{21}$$

cu $\mathbf{Y}(t)$ egal cu $\mathbf{Y}(t_0)$ la momentul t_0, posedă o soluţie nesingulară pentru orice timp finit, $t \geqslant t_0$. Combinînd (20) cu (21) se obţine

$$\mathbf{Y}\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} = \mathscr{B}\,\mathbf{e}.$$

Apoi, deoarece s-a presupus că **Y** este nesingulară pentru $t \geqslant t_0$, rezultă că inversa ei $\mathbf{Y}^{-1}$ există, şi

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Y}^{-1}\mathscr{B}\,\mathbf{e}. \tag{22}$$

O soluţie pentru $\hat{\mathbf{x}}$ se obţine prin integrare.
Rezultă în acest caz

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}(\tau)^{-1}\mathscr{B}(\tau)\,\mathbf{e}(\tau)\,d\tau. \tag{23}$$

Din (19) şi cu presupunerea că $\mathbf{Y}(t_0)$ este nesingulară, vectorul iniţial $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$ va fi dat de ecuaţia:

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{Y}(t_0)^{-1}\mathbf{x}(t_0). \tag{24}$$

Pentru a obţine pe $\mathbf{x}(t)$, se premultiplică (23) cu $\mathbf{Y}(t)$.
Dacă se introduce totodată expresia lui $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$ dată în (24), se obţine:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{Y}(t)_0^{-1} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{Y}(\tau)^{-1}\mathscr{B}(\tau)\mathbf{e}(\tau)d\tau. \tag{25}$$

Introducerea lui $\mathbf{Y}(t)$ în integrala este permisă, deoarece variabila de integrare nu este t, ci τ.

Cînd circuitul nu este sub acţiunea unei excitaţii din exterior, — $-\mathbf{e}(t)\equiv 0$ pentru $t \geqslant t_0$, — este evident din (25) că matricea $\mathbf{Y}(t)\,\mathbf{Y}(t_0)^{-1}$ caracterizează tranziţia de la starea $\mathbf{x}(t_0)$ din momentul t_0, la $\mathbf{x}(t)$, în momentul t. De aceea, matricea $\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(\tau)^{-1}$ este denumită *matricea de tranziţie a stării* şi se notează $\mathbf{\Phi}(t,\tau)$, adică:

$$\mathbf{\Phi}(t,\tau) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(\tau)^{-1}. \tag{26}$$

La cap. 4 s-a arătat că matricea de tranziţie a stării este o funcţie de $(t-\tau)$ pentru circuite invariante în timp; *aceasta nu este adevărat pentru cazul mai general al circuitelor variabile în timp*. Soluţia pentru $\mathbf{x}$ poate fi exprimată în termenii matricei de tranziţie de stare, înlocuind (26) în (25) şi se obţine:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0)\,\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t,\tau)\,\mathscr{B}(\tau)\,\mathbf{e}(\tau)\,d\tau. \tag{27}$$

Un caz special al soluţiei ecuaţiei omogene

Înainte de a determina vectorul de stare $\mathbf{x}(t)$ din (27) este necesar să se găsească matricea de tranziţie de stare $\mathbf{\Phi}(t,\tau)$, sau, în mod echivalent, $\mathbf{Y}(t)$. În acest scop se consideră soluţia ecuaţiei matriceale omogene (21), în particular pentru $\mathbf{Y}(t_0)=\mathbf{U}$. Aceasta nu constituie de fapt o restricţie, deoarece (24) impune doar că $\mathbf{Y}(t_0)$ trebuie să comporte o matrice inversă.

În primul rînd, considerăm ecuaţia scalară corespunzătoare

$$\frac{d}{dt} y = ay,$$

cu $y(t_0) = 1$. Soluţia acestei ecuaţii este:

$$y(t) = \exp\left[\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau\right].$$

Este de presupus deci că soluţia ecuaţiei matriceale (21) va fi de forma:

$$\mathbf{Y}(t) = \exp\left[\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau)\, d\tau\right]. \tag{28}$$

Se va arăta acum că aceasta este soluţia, numai pentru cazul foarte special cînd produsul dintre $\mathscr{A}(t)$ şi $\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau) d\tau$ este comutativ.

Se ştie, din definiţia unei exponenţiale matriceale, că

$$\exp\left[\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)\, d\tau\right]^k. \tag{29}$$

Diferenţiind ambii membri obţinem

$$\frac{dt}{d} \exp\left[\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau) d\tau\right] = \sum_{k=1} \frac{1}{k!} \frac{d}{dt}\left[\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau)\, d\tau\right]^k. \tag{30}$$

S-a presupus, în mod tacit, că fiecare din seriile infinite de mai sus sînt convergente. Să examinăm un termen tipic din membrul al doilea al acestei ultime ecuaţii. Se poate arăta că

$$\frac{1}{k!} \frac{d}{dt}\left[\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau) d\tau\right]^k = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{k} \left[\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau)\, d\tau\right]^{i-1} \times \mathscr{A}(t) \left[\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau)\, d\tau\right]^{k-i} \tag{31}$$

Aceasta rezultă ca o generalizare din

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}^2 = \frac{d}{dt}\mathbf{A}\mathbf{A} = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{A}\right)\mathbf{A} + \mathbf{A}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{A}\right),$$

unde **A** este orice matrice diferenţiabilă.

În general $\mathscr{A}(t)$ nu se poate comuta cu $\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau)\,d\tau$;

aceasta se poate demonstra relativ simplu cu ajutorul matricei

$$\mathscr{A}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, numai dacă avem

$$\mathscr{A}(t)\left[\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau)\,d\tau\right] = \left[\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau)\,d\tau\right]\cdot\mathscr{A}(t),$$

vom obţine,

$$\frac{1}{k!}\frac{d}{dt}\left[\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau)\,d\tau\right]^{k} = \frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k} \mathscr{A}(t)\left[\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau)\,d\tau\right]^{k-i} =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}\,\mathscr{A}(t)\left[\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau)\,d\tau\right]^{k-1}. \qquad (32)$$

Ultimul rezultat provine din faptul că termenii din sumă nu depind de indexul de sumare i. Combinînd acest rezultat cu (30), se găseşte, *în acest caz special*, că:

$$\frac{d}{dt}\exp\left[\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau)\,d\tau\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{A}(t)\,\frac{1}{(k-1)!}\left[\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau)\,d\tau\right]^{k-1}$$

$$= \mathscr{A}(t)\exp\left[\int_{t_0} \mathscr{A}(\tau)d\tau\right]. \qquad (33)$$

Prin urmare, (28) este soluţia ecuaţiei omogene.

Cînd soluţia ecuaţiei omogene este dată de (28), se găseşte că matricea de tranziţie a stării, $\Phi(t,\tau)$ are o formă particulară simplă. Se ştie că $\Phi(t,\tau) = \Phi(t,t_0)\,|_{t_0=\tau}$ şi că $\Phi(t,t_0) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{Y}(t_0)^{-1} = \mathbf{Y}(t)$, deoarece $\mathbf{Y}(t_0)=\mathbf{U}$. Astfel, înlocuind pe t_0 prin τ, în integrala ce apare în (28), — relaţia pentru $\Phi(t,t_0) = \mathbf{Y}(t)$, — se obţine

$$\Phi(t,\tau) = \exp.\left[\int_\tau^t \mathscr{A}(\nu)\,d\nu\right]. \tag{34}$$

Exemplu. Înainte de a ne îndrepta atenţia asupra soluţiei lui (21), cu mai puţine condiţii restrictive, — vom considera ca exemplu un circuit la care condiţia precedentă de comutativitate este satisfăcută. Circuitul arată în fig. 10.2, avînd două rezistenţe variabile în timp, se poate arăta uşor că satisface următoarea ecuaţie diferenţială pentru vectorul de stare $[q_2\ \lambda_5]'$:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_2 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t & -1 \\ 1 & -2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_2 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}[e(t)].$$

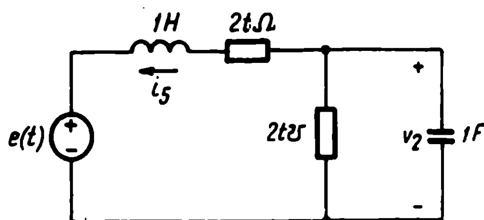


Fig. 10.2. Circuit variabil în timp.

Se poate demonstra uşor că produsul lui

$$\mathscr{A}(t) = \begin{bmatrix} -2t & -1 \\ 1 & -2t \end{bmatrix}$$

cu

$$\int_{t_0}^t \mathscr{A}(\tau)\,d\tau = \begin{bmatrix} -(t+t_0) & -1 \\ 1 & -(t+t_0) \end{bmatrix}(t-t_0),$$

este comutativ. Prin urmare, din (28) se obţine

$$\mathbf{Y}(t) = \exp\left\{\begin{bmatrix} -(t+t_0) & -1 \\ 1 & -(t+t_0) \end{bmatrix}(t-t_0)\right\},$$

şi, din (31) rezultă matricea de tranziţie de stare

$$\Phi(t,\tau) = \exp\left\{\begin{bmatrix} -(t+\tau) & -1 \\ 1 & -(t+\tau) \end{bmatrix}(t-\tau)\right\}.$$

Din teoria funcţiilor de matrice, stabilită în Cap. 4, rezultă că exponenţiala matriceală pentru $\Phi(t,\tau)$ poate fi înlocuită printr-o formă concentrată echivalentă. Funcţia corespunzătoare de s este $f(s)=e^{(st-\tau)}$.

După procedeele arătate în Cap. 4, forma echivalentă pentru $\Phi(t,\tau)$, se găseşte a fi

$$\Phi(t,\tau) = \begin{bmatrix} \cos(t-\tau) & -\sin(t-\tau) \\ \sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{bmatrix} \varepsilon^{-(t^2-\tau^2)}.$$

Aceasta se poate verifica aplicînd procedeele menţionate.

În sfîrşit, prin substituirea acestei relaţii a lui $\Phi(t, \tau)$, în (27), se găseşte pentru vectorul de stare

$$\begin{bmatrix} q_2(t) \\ \lambda^2(t) \end{bmatrix} = \varepsilon^{-(t^2-t_0^2)} \begin{bmatrix} \cos(t-t_0) & -\sin(t-t_0) \\ \sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2(t_0) \\ \lambda_5(t_0) \end{bmatrix}$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \varepsilon^{-(t^2-\tau^2)} \begin{bmatrix} \sin(t-\tau) \\ -\cos(t-\tau) \end{bmatrix} [e(\tau)] d\tau.$$

Existenţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiei omogene

S-a analizat mai sus soluţia ecuaţiei omogene (21), pentru cazul special cînd produsul lui $\mathscr{A}(t)$ cu $\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau)d\tau$ este comutativ. Se va renunţa acum la această restricţie. În acest caz nu există nici o metodă generală pentru determinarea soluţiei. De fapt, de obicei trebuie să ne mulţumim, nu cu găsirea soluţiei, ci cu o seamă de rezultate ca : există una sau mai multe soluţii ; există o soluţie unică şi (sau) soluţia are anumite proprietăţi ce se pot defini, cum ar fi periodicitatea. Soluţia propriu-zisă este deseori aproximată prin trunchierea unei serii de perturbaţii, prin iteraţie, sau prin integrare numerică. Primele procedee nu constituie obiectul prezentului volum [1].

Integrarea numerică va fi folosită în par. 10.5, unde se va trata despre metode numerice aplicabile la circuite variabile în timp, neliniare.

Aici, vom căuta să stabilim condiţiile în care (21) posedă o soluţie unică. Pentru a nu fi nici o ambiguitate, admitem că $\mathbf{Y}$ este o soluţie, *în sensul obişnuit*, dacă satisface ecuaţia omogenă (21) pentru orice timp finit $t \geqslant t_0$, cu $d\mathbf{Y}/dt$ la $t=t_0$ considerat ca derivata din dreapta [2]. Teorema următoare, bine cunoscută, ne furnizează condiţia suficientă [3].

Teorema 1. *Fiind dată orice* $\mathbf{Y}(t_0)$, *ecuaţia diferenţială omogenă* (*21*) *are o soluţie unică în sensul obişnuit, egală cu* $\mathbf{Y}(t_0)$, *la momentul* t_0, *dacă* $\mathscr{A}$ *este o funcţie continuă de t, pentru* $t_0 \leqslant t \leqslant \infty$.

---

[1] Pentru detalii, a se vedea Nicholas Minorsky, *Nonlinear Oscillations*, D. Von Nostrand Co., Princeton, N. J., 1962.

[2] Dacă limita există, atunci

$$\lim_{\Delta \to 0} \left[\frac{\mathbf{Y}(t_0+\Delta) - \mathbf{Y}(t_0)}{\Delta} \right] \text{cu } \Delta > 0$$

este derivată lui $\mathbf{Y}$ din dreapta la $t-t_0$.

[3] Pentru detalii privitoare la existenţa şi unicitatea soluţiilor la ecuaţiile diferenţiale obişnuite, vezi ,,Earl A. Coddington şi Norman Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw–Hill, New-York, 1955.

Este foarte posibil ca $\mathscr{A}$ să nu fie continuă şi totuşi se poate să se găsească Y care să satisfacă ecuaţia diferenţială pentru aproape toate valorile $t \geqslant t_0$. Pentru a ţine seama de această situaţie, să integrăm ambii membri ai ecuaţiei (21), de la t_0 la t, ca să obţinem ecuaţia integrală asociată :

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau)\mathbf{Y}(\tau)\,d\tau. \tag{35}$$

Introducem acum o nouă noţiune : vom zice că Y este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (21) *în sens larg*, dacă satisface ecuaţia integrală (35) pentru orice timp finit $t \geqslant t_0$. Teorema următoare ne dă condiţia suficientă[1]

Teorema 2. *Dată fiind* $\mathbf{Y}(t_0)$, *ecuaţia diferenţială omogenă (21) are o soluţie continuă unică, în înţeles larg, egală cu* $\mathbf{Y}(t_0)$, *la momentul* t_0, *dacă* $\mathscr{A}$ *este o funcţie locală integrabilă*[2] *pentru* $t \geqslant t_0$.

Condiţia de suficienţă a acestei a doua teoremă este considerată mult mai slabă decît aceea din prima teoremă ; de aceea se poate întîmpla ca soluţia să nu satisfacă pe (21) în sens obişnuit.

Ca o ilustrare a acestor noţiuni, să considerăm circuitul din fig. 10.3, cu o conductanţă variabilă discontinuu în timp. Ecuaţia de stare pentru acest circuit este :

$$\frac{d}{dt} q^2 = - [2u(t) - u(t-1)]q_2 + j(t).$$

Ecuaţia diferenţială omogenă corespunzătoare la (21) este :

$$\frac{d}{dt} y = - [2u(t) - u(t-1)]y,$$

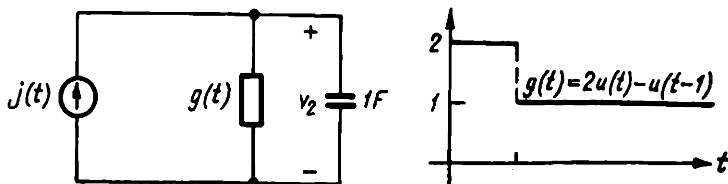


Fig. 10.3. Circuit variabil în timp, cu conductanţă variabilă în timp, în mod discontinuu.

---

[1] Vezi nota din subsol 3) din pagina precedentă.

[2] O funcţie de vectori sau de matrice se zice că este *local integrabilă* dacă (*a*) fiecare din elementele ei este o funcţie continuă, cu excepţia unui număr finit de puncte pe intervale finite şi (*b*) posedă o integrală Riemann proprie sau improprie şi absolut convergentă, pe orice interval finit în care funcţia este continuă.

şi ecuaţia integrală corespunzătoare la (35), cu $t_0=0$, este

$$y(t) = y(0) - \int_0^t [2u(\tau) - u(\tau-1)]y(\tau)\, d\tau.$$

Acum se poate verifica uşor că

$$y(t) = \begin{cases} \varepsilon^{-2t} & (0 \leqslant t \leqslant 1) \\ \varepsilon^{-1}\, \varepsilon^{-t} & (1 \leqslant t) \end{cases}$$

este o soluţie a ecuaţiei integrale şi deci a ecuaţiei diferenţiale omogene, *în sens larg*. Se observă că nu este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale omogene, *în sensul obişnuit*, pentru $t=1$. Vom anticipa că o soluţie în sens obişnuit poate să nu existe, deoarece $2u(t)-u(t-1)$ nu este continuă; mai mult, se ştia că o soluţie în sens larg există deoarece $\int_0^t [2u(\tau)-u(\tau-1)]d\tau$ există pentru orice t finit. În plus, teorema ne spune că soluţia găsită este unica soluţie continuă şi deci nu e nevoie să mai căutăm alta.

Să considerăm acum o presupunere privitoare la soluţia ecuaţiei de stare, omogenă. Anume, presupunerea că $\mathbf{Y}(t)^{-1}$ există pentru orice $t \geqslant t_0$ finit. Cu referire la cap. 1, se poate verifica uşor că :

$$\frac{d}{dt}\,|\mathbf{Y}| = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{dy_{lk}}{dt}\,\Delta_{lk}, \tag{36}$$

unde prin y_{lk} s-a notat elementul (l, k) din $\mathbf{Y}$ şi prin Δ_{lk}, cofactorul (l, k) din $\mathbf{Y}$. Din (21) se ştie că :

$$\frac{dy_{lk}}{dt} = \sum_{m=1}^{n} a_{lm}\, y_{mk}, \tag{37}$$

unde a_{lm} este elementul (l,m) din $\mathscr{A}$; de aceea

$$\frac{d}{dt}\,|\mathbf{Y}| = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_{lm}\, y_{mk}\,\Delta_{lk}. \tag{38}$$

Deoarece $\sum_{k=1}^{n} y_{mk}\,\Delta_{lk} = \delta_{ml}\,|\mathbf{Y}|$, se obţine :

$$\frac{d}{dt}\,|\mathbf{Y}| = \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_{lm}\,\delta_{ml}\,|\mathbf{Y}| = \left(\sum_{l=1}^{n} a_{ll}\right)|\mathbf{Y}|. \tag{39}$$

Reamintînd definiţia pentru urma (tr) unei matrice, se vede că $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \text{tr}\,\mathscr{A}$. Astfel,

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{Y}| = (\text{tr}\,\mathscr{A})|\mathbf{Y}|. \tag{40}$$

Aceasta este o ecuaţie diferenţială scalară de ordinul 1, pentru determinantul lui $\mathbf{Y}$. Soluţia este, evident

$$|\mathbf{Y}(t)| = \exp\left\{\int_0^t [\text{tr}\,\mathscr{A}(\tau)]\,d\tau\right\}|\mathbf{Y}(t_0)|.$$

Dar, cum $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{U}$ implică $|\mathbf{Y}(t_0)| = 1$, rezultă

$$|\mathbf{Y}(t)| = \exp\left\{\int_{t_0}^t [\text{tr}\,\mathscr{A}(\tau)]\,\mathrm{d}\tau\right\}. \tag{41}$$

Acum este evident că $\mathbf{Y}(t)^{-1}$ există, $-|\mathbf{Y}(t)| \neq 0$, — cu condiţia ca $\int_{t_0}^t [\text{tr}\,\mathscr{A}(\tau)]\,d\tau$ să fie finită pentru orice $t \geqslant t_0$ finit. Dacă oricare din cele două teoreme precedente este satisfăcută, $\int_{t_0}^t \mathscr{A}(\tau)\,d\tau$ este finită pentru $t \geqslant t_0$; prin urmare $\int_{t_0}^t [(\text{tr}\,\mathscr{A}(\tau)]\,\mathrm{d}\tau = \text{tr}\int_{t_0}^t \mathscr{A}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ este finită pentru $t \geqslant t_0$. În concluzie, $\mathbf{Y}(t)$ este nesingulară, cu condiţia ca una din teoremele 1 şi 2 de mai sus să fie satisfăcută.

Soluţia ecuaţiei de stare — Existenţă şi unicitate

Ne întoarcem iar la ecuaţia de stare (neomogenă) propriu-zisă. Trebuie precizat mai întîi ce constituie o soluţie. Vom spune că $\mathbf{x}$ este o soluţie *în sens obişnuit*, cînd ecuaţia de stare (18*a*) este satisfăcută pentru orice $t \geqslant t_0$ finit, cu $d\mathbf{x}/dt$ la $t=t_0$ considerată ca o derivată din dreapta. Următoarea teoremă [1] se referă la existenţa unei soluţii în sens obişnuit.

Teorema 3. *Fiind dat orice* $\mathbf{x}(t_0)$, *ecuaţia de stare* (18a) *are o soluţie unică, în sens obişnuit, egală cu* $\mathbf{x}(t_0)$ *la momentul* t_0, *dacă* $\mathscr{A}$ şi $\mathscr{B}$ *sînt funcţii continue de* t, *pentru* $t_0 \leqslant t < \infty$.

[1] Vezi nota din subsol 2) din pag. 693.

Cînd condiţia de suficienţă de mai sus nu este satisfăcută, din cauză că $\mathscr{A}$ şi (sau) $\mathscr{B}$e nu sînt continue, va fi totuşi posibil să se găsească un **x** care să satisfacă ecuaţia de stare pentru aproape toate valorile lui $t \geqslant t_0$. Pentru a face aceasta posibil trebuie să introducem ecuaţia integrală asociată, cum am făcut în cazul ecuaţiei omogene. Aplicînd integrala la ambii membri din (18a), de la t_0 la t, se obţine

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} [\mathscr{A}(\tau)\,\mathbf{x}(\tau) + \mathscr{B}(\tau)\,\mathbf{e}(\tau)]\,d\tau. \tag{42}$$

Vom zice că **x** este o soluţie a ecuaţiei de stare (18*a*), *în înţeles larg*, dacă satisface ecuaţia integrală (42) pentru orice $t \geqslant t_0$ finit. Rezultă că **x** va satisface ecuaţia integrală, dacă $\mathscr{A}$ şi $\mathscr{B}$e sînt funcţii local integrabile. Aşadar se poate enunţa următoarea teoremă : [1].

Teorema 4. *Fiind dat orice* $\mathbf{x}(t_0)$, *ecuaţia de stare* (18a) *are o soluţie unică, continuă, în sens larg, egală cu* $\mathbf{x}(t_0)$ *la timpul* t_0, *dacă* $\mathscr{A}$ şi $\mathscr{B}$e *sînt funcţii local integrabile pentru* $t \geqslant t_0$.

Se observă că condiţiile de suficienţă ale acestor două teoreme includ şi pe cele corespunzătoare la teoremele de existenţă pentru ecuaţia omogenă. Aceasta este interesant de ştiut. Rezultă, că, dacă ecuaţia de stare are o soluţie unică, ecuaţia omogenă posedă şi ea o soluţie unică. Cu alte cuvinte metoda variaţiei de parametru este o metodă valabilă, prin care se poate obţine soluţia, ori de cîte ori ecuaţia de stare posedă o soluţie.

Trebuie remarcat că, în aceste teoreme, condiţiile sînt numai condiţii suficiente, iar nu condiţii necesare şi suficiente. Astfel, chiar dacă aceste condiţii din teoreme nu sînt satisfăcute, o soluţie poate exista şi de fapt poate exista o soluţie unică.

S-ar părea că discuţia precedentă se referă la adevăruri evidente sau banale. Oare nu are orice circuit real o soluţie?

Pentru a ilustra că nu este înţelept să admitem orbeşte existenţa unui răspuns unic de stare, să considerăm circuitul arătat în fig. 10.4. Ecuaţia de stare pentru acest circuit se găseşte uşor că este [2] :

$$\frac{dq_1}{dt} = 4\,\frac{1}{t^5}\,q_1$$

[1] Vezi nota [1]) de la pag. 693

[2] Aici şi în tot acest capitol, dacă partea dreaptă a unei ecuaţii de stare indicată nu este definită ca un set distinct de puncte în t, pentru **x** fix, trebuie presupus că partea dreaptă a ecuaţiei de stare este zero în aceste puncte. În acest caz se va căuta numai soluţia în sens larg, astfel că situaţia de mai sus nu va afecta rezultatul.

Fig. 10.4. Circuit variabil în timp care nu are o soluţie unică.

Presupunem că $q_1(0)=0$. Atunci, se poate verifica uşor că expresia

$$q_1 = \alpha \exp(-t^{-4}) \tag{43}$$

este soluţia pentru orice valoare finită a lui α. În fig. 10.5 sînt arătate mai multe soluţii. Prima observaţie de făcut este că nu avem cazul cu soluţia unică.

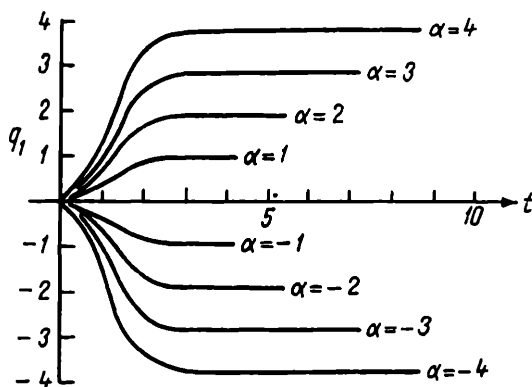


Fig. 10.5. Mai multe soluţii, cu aceeaşi valoare iniţială.

Într-adevăr, nu există nici o bază pentru a anticipa o soluţie unică. Condiţiile de suficienţă din teorema a 2-a de mai sus nu sînt satisfăcute; adică $\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} [4/\tau^5]\, d\tau$ nu există pentru orice $t>0$. Mai mult, nu avem nici o bază pentru a anticipa măcar că există vreo soluţie. De fapt nu există nici o soluţie dacă valoarea iniţială $q_1(0)$ este diferită de zero.

Circuite periodice

Clasa circuitelor variabile în timp este foarte cuprinzătoare, dacă nu se menţionează nimic despre forma variaţiei în timp. Este de aşteptat ca, pentru unele forme speciale de variaţii în timp, să se poată obţine rezultate suplimentare asupra soluţiei, care să fie valabile pentru acele clase de funcţii de timp' dar nu pentru altele. O clasă deosebit de importantă de funcţii de timp este aceea a funcţiilor periodice. Vom considera acum cazul special cînd matricea $\mathscr{A}$ a unui circuit variabil în timp este periodică. În acest caz este posibil să se stabilească unele proprietăţi suplimentare ale soluţiei $\mathbf{Y}$ a ecuaţiei omogene (21). Vom presupune că $\mathscr{A}$ este periodică, cu perioada T; adică $\mathscr{A}(t+T)=A(t)$ pentru orice t.

În primul rînd se găseşte că, dacă $\mathbf{Y}(t)$ este o soluţie a lui (21), atunci şi $\mathbf{Y}(t+T)$ este; adică, dacă avem o deplasare a variabilei timp, cu o mărime egală cu perioada lui $\mathscr{A}$, atunci o soluţie a lui (21) va rămîne şi aici o soluţie. Pentru a arăta aceasta, să notăm că $\mathbf{Y}(\tau)$ satisface condiţia :

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{Y}(\tau)=\mathscr{A}(\tau)\mathbf{Y}(\tau). \tag{44}$$

Punînd $\tau=t+T$ se observă că

$$d\mathbf{Y}(\tau)/d\tau=(d\mathbf{Y}(t+T)/dt)\,(dt/d\tau)=d\mathbf{Y}(t+T)/dt.$$

De aceea (44) devine,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Y}(t+T)=\mathscr{A}(t+T)\,\mathbf{Y}(t+T)=\mathscr{A}(t)\,\mathbf{Y}(t+T) \tag{45}$$

deoarece $\mathscr{A}$ este periodică, astfel că $\mathscr{A}(t+T)=\mathscr{A}(t)$. Comparînd această ecuaţie cu (21) se constată că $\mathbf{Y}(t+T)$ este o soluţie a ecuaţiei omogene.

Vom căuta acum să stabilim unele proprietăţi ale soluţiei lui (21), cînd $\mathscr{A}(t)$ este periodică. În particular, ne vom ocupa de stabilitatea soluţiei. În cele ce urmează se va presupune că sînt satisfăcute condiţiile suficiente, care garantează soluţia unică pentru (21). Atunci, $\mathbf{Y}(t+T)$ este soluţia unică, avînd valoarea $\mathbf{Y}(t_0+T)$ la timpul t_0. Cum $\mathbf{Y}(t)$ este nesingulară pentru $t\geqslant t_0$, matricea inversă $\mathbf{Y}(t_0)^{-1}$ există. Acum se poate defini o matrice constantă $\mathbf{M}$, care există

$$\mathbf{M}=\mathbf{Y}(t_0)^{-1}\,\mathbf{Y}(t_0+T). \tag{46}$$

Este uşor de verificat că $\mathbf{Y}(t)\,\mathbf{M}$ este o soluţie a lui (21) şi deci soluţia unică, avînd valoarea $\mathbf{Y}(t_0)\mathbf{M}$ la timpul t_0. Dacă premultiplicăm (46) cu

$\mathbf{Y}(t_0)$, se vede că se obţine $\mathbf{Y}(t_0+T)=\mathbf{Y}(t_0)\mathbf{M}$. De aceea, — deoarece soluţia lui (21), cu valoare iniţială $\mathbf{Y}(t_0+T)=\mathbf{Y}(t_0)\mathbf{M}$, este unică, urmează că soluţiile $\mathbf{Y}(t)$ şi $\mathbf{Y}(t+T)$ sînt în relaţie liniară, adică

$$\mathbf{Y}(t+T) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{M}. \tag{47}$$

Acesta este un rezultat important şi ne vom întoarce la el în curînd. Dar, mai întîi să arătăm că matricea $\mathbf{M}$ poate fi exprimată ca o exponenţială matriceală de forma

$$\mathbf{M} = e^{\mathbf{P}T} \tag{48}$$

Trebuie doar să se arate că $ln\mathbf{M}$ există şi deci

$$\mathbf{P} = \frac{1}{T}\ln \mathbf{M} \tag{49}$$

există şi ea. Se observă că $\mathbf{M}$ este nesingulară, deoarece atît $\mathbf{Y}(t_0)^{-1}$, cît şi $\mathbf{Y}(t_0+T)$ din (46) sînt nesingulare. Din $d(s)=\det(s\mathbf{U}-\mathbf{M})$ se vede că, punînd $s=0$, determinantul matricei este egal în modul cu termenul constant din ecuaţia caracteristică a matricei. Apoi, cum termenul constant este egal în modul cu produsul valorilor proprii ale matricei, se poate deduce că nici una din valorile proprii ale matricei nesingulare $\mathbf{M}$, notate prin s_i, nu este zero.

Să notăm prin k numărul valorilor proprii distincte ale lui $\mathbf{M}$ şi prin r_i ordinul lor de multiplicitate. Matricele constituante din $\mathbf{M}$ le notăm prin $\mathbf{K}_{ij}$, cu $i=1\ldots k$ şi $j=1,\ldots, r_i$. Aplicînd dezvoltarea după matrice constituente din paragraful 4.4., avem :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}\mathbf{K}_{ij}\left[\frac{1}{(j-1)!}\,\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\ln s\,\Big|_{s=s_i}\right], \tag{50}$$

unde, pentru $j>1$, $d^{j-1}\ln s/ds^{j-1}$ este egal, bineînţeles, cu $(-1)^{j-2}(j-2)!/s_i^{j-1}$. Cum nici una din valorile proprii nu este zero, aceste cantităţi, ca şi $\ln s_i$, sînt finite. Deci $\mathbf{P}$ există.

Se observă că matricea $\mathbf{P}$ nu este definită în mod unic. Aceasta este o consecinţă a naturii polivalente a expresiei $\ln s_i$. Diferitele valori ale lui $\ln s_i$ diferă între ele printr-un termen adiţional $j2\pi n$. În definirea lui $\mathbf{P}$ oricare din aceste valori ale lui $\ln s_i$ este satisfăcătorare.

Pentru a obţine informaţii suplimentare asupra soluţiei, să presupunem că $\mathbf{Y}(t)$ se poate scrie ca un produs de două funcţii.

În particular, să considerăm

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Q}(t)\varepsilon^{\mathbf{P}(t-t_0)}, \tag{51}$$

unde **P** este dat de (49) şi $\mathbf{Q}(t)$ este o matrice ce urmează a fi determinată. De fapt, această expresie poate fi inversată, ca să rezulte $\mathbf{Q}(t)$, astfel.

$$\mathbf{Q}(t)\,\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t)\varepsilon^{-\mathbf{P}(t-t_0)}. \tag{52}$$

Acum se poate folosi relaţia (47) pentru a găsi ceva privitor la $\mathbf{Q}(t)$. Înlocuind pe (51) în (47) se obţine:

$$\mathbf{Q}\,(t+T)\varepsilon^{\mathbf{P}(t+T-t_0)} = \mathbf{Q}(t)\varepsilon^{\mathbf{P}(t-t_0)}\mathbf{M} = \mathbf{Q}(t)\varepsilon^{\mathbf{P}(t-t_0)}\varepsilon^{\mathbf{P}T}.$$

Ultima deducere rezultă din (48). Prin urmare

$$\mathbf{Q}\,(t+T) = \mathbf{Q}(t)\,; \tag{55}$$

ceea ce înseamnă ca funcţia $\mathbf{Q}(t)$ este periodică, cu aceeaşi perioadă T ca şi $\mathscr{A}$.

Este stabilit acum că $\mathbf{Y}(t)$ poate fi exprimat ca un produs a unei matrice periodice $\mathbf{Q}(t)$, cu o exponenţială matricealǎ $\varepsilon^{\mathbf{P}(t-t_0)}$. Deoarece se ştie că $\mathbf{Y}(t)$ este continuă, $Q(t)$ va fi şi ea continuă şi deci mărginită [1] pe intervalul închis între t_0 şi t_0+T. Atunci, cum $\mathbf{Q}(t)$ este şi periodică, va fi uniform mărginită pentru orice $t \geqslant t_0$. În consecinţă, comportarea lui $\mathbf{Y}(t)$, cînd t tinde către infinit, este guvernată de comportarea exponenţialei $\varepsilon^{\mathbf{P}(t-t_0)}$. Ţinîndu-se cont că valorile caracteristice ale lui **P** sînt cunoscute ca *exponenţi caracteristici* ai lui $\mathscr{A}$, se pot face următoarele observaţii:

1. Dacă toţi exponenţii caracteristici au partea reală negativă, atunci $\varepsilon^{\mathbf{P}(t-t_0)}$ şi deci $\mathbf{Y}(t)$ tind spre zero cînd t tinde spre infinit.

2. Dacă toţi exponenţii caracteristici au partea reală nepozitivă, atunci $\varepsilon^{\mathbf{P}(t-t_0)}$ şi deci $\mathbf{Y}(t)$ sînt mărginite cînd t tinde spre infinit.

3. Dacă unul sau mai mulţi exponenţi caracteristici au partea reală pozitivă, atunci $\varepsilon^{\mathbf{P}(t-t_0)}$ şi deci $\mathbf{Y}(t)$ sînt nemărginite cînd t tinde spre infinit. Este recomandabil să se verifice aceste enunţuri.

Astfel, stabilitatea soluţiei este legată de matricea **P**. Aceasta, la rîndul ei, este legată de **M**, prin (48) sau (49), şi **M** este legată de soluţia lui **Y**, prin (46). Totuşi, această succesiune de legături nu ne foloseşte mult. Noi trebuie să cunoaştem pe **P**, pentru ca să putem spune ceva despre comportarea soluţiei, fără să fie necesar să găsim efectiv pe $\mathbf{Y}(t)$. Din păcate, nu există o procedură generală prin care să se determine **P**, fără cunoaşterea lui **Y**. Valoarea teoriei soluţiilor pentru $\mathscr{A}$ periodic nu constituie deci un instrument de calcul, ci un mijloc pentru a ajunge la alte rezultate teoretice, mai folositoare. Se va vedea aceasta mai clar, mai departe.

---

[1] O matrice se zice că este mărginită, dacă toate elementele componente sînt mărginite. Ele nu sînt mărginite, dacă unul sau mai multe elemente nu sînt mărginite.

În încheiere, trebuie observat că atît $\varepsilon^{\mathbf{P}(t-t_0)}$, cît şi Q satisfac anumite ecuaţii diferenţiale. Astfel, exponenţiala $\varepsilon^{\mathbf{P}(t-t_0)}$ satisface

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}=\mathbf{PX}, \tag{56}$$

cu $\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{U}$. În ceea ce priveşte **Q**, înlocuind pe $\mathbf{Y}(t)$ din (51) în (21), se obţine :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}-\mathbf{QP}, \tag{57}$$

cu $\mathbf{Q}(t_0)=\mathbf{Y}(t_0)$.

10.3. PROPRIETĂŢI ALE SOLUŢIEI ECUAŢIEI DE STARE

Sîntem gata acum pentru a începe studiul proprietăţilor soluţiilor ecuaţiei de stare, pentru un circuit variabil în timp. Aceasta se va face prin comparaţie cu un circuit oarecare de „referinţă", despre a cărui soluţie avem unele cunoştinţe.

Lema lui Gronwall [1)]

În acest studiu ne vom baza mult pe următorul rezultat din analiza matematică, pe care-l vom discuta deci, în primul rînd :

Lema. *Dacă*

$$\varphi(t)\leqslant\gamma+\int_{t_0}^{t}[\psi(\tau)\varphi(\tau)+\theta(\tau)]d\tau, \tag{58}$$

unde φ, ψ, *şi* θ, *sînt funcţii continue nenegative de* t, *pentru* $t\geqslant t_0$ *şi unde* γ *este o constantă pozitivă, atunci*

$$\varphi(t)\leqslant\gamma\exp\left\{\int_{t_0}^{t}[\psi(\tau)+\theta(\tau)/\gamma]d\tau\right\} \tag{59}$$

1) Această lemă mai este cunoscută şi ca lema Gronwall-Bellman, în lucrările de analiză matematică.

Acest rezultat se numește Lema lui Gronwall și se demonstrează după cum urmează. Din (58) se vede că

$$\frac{\varphi(t)}{\gamma+\int_{t_0}^{t}[\psi(\tau)\varphi(\tau)+\theta(\tau)]d\tau}\leqslant 1. \tag{60}$$

Dacă multiplicăm ambii membri cu funcția nenegativă $\psi(t)$ și adunăm $\theta(t)/\left\{\gamma+\int_{t_0}^{t}[\psi(\tau)\varphi(\tau)+\theta(\tau)]d\tau\right\}$ la ambii membri, se vede că se obține,

$$\frac{\psi(t)\varphi(t)+\theta(t)}{\gamma+\int_{t_0}^{t}[\psi(\tau)\varphi(\tau)+\theta(\tau)]d\tau}\leqslant\psi(t)+\frac{\theta(t)}{\gamma+\int_{t_0}^{t}[\psi(\tau)\varphi(\tau)+\theta(\tau)d\tau}. \tag{61}$$

Se observă că $\psi(\tau)\varphi(\tau)+\theta(\tau)\geqslant 0$ și, prin urmare, $\int_{t_0}^{t}[\psi(\tau)\varphi(\tau)+\theta(\tau)]d\tau\geqslant 0$. Astfel, $\theta(t)/\left\{\gamma+\int_{t_0}^{t}[\psi(\tau)\varphi(\tau)+\theta(\tau)]d\tau\right\}\leqslant\theta(t)/\gamma$. Folosind această inegalitate în (61), se obține

$$\frac{\psi(t)\varphi(t)+\theta(t)}{\gamma+\int_{t_0}^{t}[\psi(\tau)\varphi(\tau)+\theta(\tau)]d\tau}\leqslant\psi(t)+\frac{\theta(t)}{\gamma}.$$

Integrînd ambii membri, de la t_0 la t, rezultă

$$\ln\left\{\gamma+\int_{t_0}^{t}[\psi(\tau)\varphi(\tau)+\theta(\tau)]d\tau\right\}-\ln\gamma\leqslant\int_{t_0}^{t}\left[\psi(\tau)+\frac{\theta(\tau)}{\gamma}\right]d\tau,$$

ceea ce este echivalent cu

$$\gamma+\int_{t_0}^{t}[\psi(\tau)\varphi(\tau)+\theta(\tau)]d\tau\leqslant\gamma\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\left[\psi(\tau)+\frac{\theta(\tau)}{\gamma}\right]d\tau\right\}. \tag{62}$$

Combinînd (58) cu (62), se obține inegalitatea indicată (59). Prin aceasta se termină demonstrația.

Acum, să ne întoarcem la ecuația de stare, pe care o reprezentăm aici :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)=\mathscr{A}(t)\,\mathbf{x}(t)+\mathscr{B}(t)\,\mathbf{e}(t).$$

Vom presupune că membrul doi este legat, într-un sens încă nedefinit, de membrul doi al *ecuației omogene de referință.*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \hat{\mathscr{A}}(t)\,\mathbf{x}(t).$$

Mai presupunem că toate soluțiile ecuației de referință, fie că se apropie de zero cînd t tinde spre infinit, fie că sînt mărginite. Ar fi de dorit să deducem, în consecință, că toate soluțiile ecuației de stare originală, fie că se apropie de zero, fie că sînt mărginite. Următoarele cîteva teoreme stabilesc condițiile precise, după care aceste deducții sînt valabile. Condițiile impuse de teoreme privitoare la diferența dintre $\mathscr{A}(t)$ și $\hat{\mathscr{A}}(t)$, și asupra lui $\mathscr{B}(t)\mathbf{e}(t)$, stabilesc în ce sens ecuația de stare este legată de ecuația omogenă de referință.

Proprietăți asimptotice relative la o referință invariantă în timp

Pentru circuite a căror ecuații de stare sînt legate (asemănătoare, într-un sens) de o ecuație omogenă invariabilă în timp, avem următoarea teoremă:

Teorema 5. *Dacă toate soluțiile din*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \hat{\mathscr{A}}\,\mathbf{y}, \tag{63}$$

unde $\hat{\mathscr{A}}$ este o matrice constantă, sînt mărginite cînd $t \to \infty$, *atunci toate soluțiile din*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathscr{A}(t)\,\mathbf{x} + \mathscr{B}(t)\,\mathbf{e}(t) \tag{64}$$

sînt mărginite cînd $t \to \infty$, cu condițiile

$$\int_{t_0}^{\infty} \|\mathscr{A}(t) - \hat{\mathscr{A}}\|\, dt < \infty \tag{65a}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \|\mathscr{B}(t)\,\mathbf{e}(t)\|\, dt < \infty\,. \tag{65b}$$

(Barele duble denotă norma matricei sau vectorului încadrat. În cap. 1 s-a tratat despre norme, care vor fi aplicate mai mult în restul prezentului capitol).

Această teoremă are o deosebită valoare, deoarece este foarte uşor să se stabilească dacă toate soluţiile ecuaţiei de referinţă (63) sînt sau nu mărginite.

Reamintim că $\varepsilon^{\hat{\mathscr{A}}(t-t_0)}\,\mathrm{y}(t_0)$ pentru orice $\mathrm{y}(t_0)$ este o soluţie a lui (63). Rezultă atunci imediat, din dezvoltarea în matrice constituente a lui $\varepsilon^{\hat{\mathscr{A}}(t-t_0)}$, că toate soluţiile vor fi mărginite, dacă nici una din valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$ nu are partea reală pozitivă.

Demonstraţia teoremei 5 este următoarea. Se scrie ecuaţia de stare în forma

$$\frac{d}{dt}\mathrm{x} = \hat{\mathscr{A}}\mathrm{x} + [\mathscr{A}(t) - \hat{\mathscr{A}}]\mathrm{x} + \mathscr{B}(t)\,\mathrm{e}(t).$$

Acum se poate arăta uşor că o ecuaţie integrală echivalentă este

$$\mathrm{x}(t) = \mathrm{y}(t) + \int_{t_0}^{t} \varepsilon^{\hat{\mathscr{A}}(t-\tau)}\{[\hat{\mathscr{A}}(\tau) - \hat{\mathscr{A}}]\,\mathrm{x}(\tau) + \mathscr{B}(\tau)\,\mathrm{e}(\tau)\}\,d\tau,$$

unde $\mathrm{y}(t)$ este soluţia ecuaţiei de referinţă (63), cu $\mathrm{y}(t_0) = \mathrm{x}(t_0)$ şi $\varepsilon^{\hat{\mathscr{A}}(t-\tau)}$ este matricea de tranziţie asociată cu (63). Luînd norma în ambii membri a ecuaţiei integrale, aplicînd inegalitatea triunghiulară[1], şi folosind inegalitatea pentru un produs de matrice, se obţine relaţia :

$$||\mathrm{x}(t)|| < ||\mathrm{y}(t)|| + \int_{t_0}^{t} ||\varepsilon^{\hat{\mathscr{A}}(t-\tau)}||\,\{||\mathscr{A}(\tau) - \hat{\mathscr{A}}||\,||\mathrm{x}(\tau)|| + ||\mathscr{B}(\tau)\mathrm{e}(\tau)||\}d\tau.$$

Cum toate soluţiile lui (63) sînt mărginite, $||\mathrm{y}(t)||$ şi $||\varepsilon^{\hat{\mathscr{A}}(t-\tau)}||$, cu $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, trebuie să fie mărginite pentru $t \geqslant t_0$.

Fie marginele respective $\gamma > 0$ şi $\delta > 0$. Atunci

$$||\mathrm{x}(t)|| \leqslant \gamma + \int_{t_0}^{t} \{\delta\,||\mathscr{A}(\tau) - \hat{\mathscr{A}}||\;||\mathrm{x}(\tau)|| + \delta\,||\mathscr{B}(\tau)\,\mathrm{e}(\tau)||\}d\tau.$$

---

[1] Termenul „inegalitate triunghiulară" aplicat pînă acum relaţiei

$$||\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2|| \leqslant ||\mathrm{x}_1|| + ||\mathrm{x}_2||,$$

va fi aplicat acum relaţiei integrale $||\int_a^b \mathrm{x}(\tau)\,d\tau|| \leqslant \int_a^b ||\mathrm{x}(\tau)||\,d\tau.$

Aceasta este o extindere naturală a primei inegalităţi, dacă se consideră integrala ca o trecere la limită a unei sume.

Această expresie are forma din (58), astfel, încît se poate aplica lema lui Gronwall. Se asociază $||\mathbf{x}(t)||$ cu $\varphi(t)$, $\delta||\mathscr{A}(t)-\hat{\mathscr{A}}||$ cu $\psi(t)$ şi $\delta||\mathscr{B}(t)\,\mathbf{e}(t)||$ cu $\theta(t)$. Atunci, pe baza lemei avem

$$||\mathbf{x}(t)|| \leqslant \gamma \exp\left\{\int_{t_0}^{t}[\delta||\mathscr{A}(\tau)-\hat{\mathscr{A}}||+(\delta/\gamma)||\mathscr{B}(\tau)\,\mathbf{e}(\tau)||]\,d\tau\right\}$$

$$\leqslant \gamma \exp\left\{\int_{t_0}^{\infty}[\delta||\mathscr{A}(\tau)-\hat{\mathscr{A}}||+(\delta/\gamma)||\mathscr{B}(\tau)\,\mathbf{e}(\tau)||]\,d\tau\right\}.$$

A doua inegalitate este obţinută punînd pe t să tindă spre infinit. Membrul al doilea al acestei expresii este finit, din cauza condiţiilor (65) ale teoremei. Astfel $||\mathbf{x}(t)||$ este mărginită şi, implicit, $\mathbf{x}(t)$ este mărginită cînd $t\to\infty$. Teorema a fost astfel demonstrată.

Se observă că această teoremă, ca şi altele ce urmează, nu oferă o metodă practică cu ajutorul căreia să se poată descoperi proprietăţile de stabilitate ale soluţiei. În schimb, dacă este dată o ecuaţie de stare ca (64), teorema ne spune că trebuie să verificăm mai întîi că norma lui $\mathscr{B}\mathbf{e}$ este integrabilă pe toată scara infinită a timpului. Apoi trebuie să căutăm o matrice constantă $\hat{\mathscr{A}}$, fără valori proprii în semiplanul drept, şi, în sfîrşit, trebuie să verificăm că norma lui $\mathscr{A}(t)-\hat{\mathscr{A}}$ este integrabilă. Atunci putem conchide că soluţia ecuaţiei originale rămîne mărginită cînd $t\to\infty$.

Absenţa valorilor proprii a lui $\hat{\mathscr{A}}$ în semiplanul drept nu exclude prezenţa uneia sau mai multora pe axa $j\omega$. Totuşi, dacă toate valorile proprii ale lui $\hat{\mathscr{A}}$ sînt în semiplanul stîng deschis, ele vor avea partea reală negativă. Atunci toate soluţiile ecuaţiei omogene de referinţă (64) se vor apropia de zero. Cum aceasta este o proprietate mai restrictivă decît „mărginirea”, ar putea servi, eventual, pentru slăbirea condiţiilor (65). Teorema următoare ne arată cum se poate obţine aceasta.

Teorema 6. *Dacă toate soluţiile ecuaţ*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}=\hat{\mathscr{A}}\mathbf{y}, \tag{63}$$

unde $\hat{\mathscr{A}}$ este o matrice constantă, se apropie de zero cînd $t\to\infty$, atunci toate soluţiile ecuaţiei

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}=\mathscr{A}(t)\,\mathbf{x}+\mathscr{B}(t)\,\mathbf{e}(t) \tag{64}$$

sînt mărginite, cînd $t \to \infty$, cu condiţia

$$\int_{t_0}^{\infty} ||\mathscr{A}(t) - \hat{\mathscr{A}}||\,dt < \infty \tag{66}$$

şi $\mathscr{B}(t)\,\mathbf{e}(t)$ este mărginită pentru $t \geqslant t_0$.

Adică, dacă $\hat{\mathscr{A}}$ nu are valori proprii în semiplanul drept şi nici pe axa $j\omega$, atunci norma lui $\mathscr{B}\mathbf{e}$ nu trebuie să fie integrabilă pe tot timpul infinit. Este necesar numai ca $\mathscr{B}\mathbf{e}$ să fie mărginită.

Demonstraţia este următoarea. Se porneşte de la ecuaţia

$$\frac{d}{dt}\mathbf{z} = \hat{\mathscr{A}}\mathbf{z} + \mathscr{B}(t)\,\mathbf{e}(t).$$

Soluţia acestei ecuaţii, cînd $\mathbf{z}(t_0) = 0$, este

$$\mathbf{z}(t) = \int_{t_0}^{t} \varepsilon^{\hat{\mathscr{A}}(t-\tau)}\,\mathscr{B}(\tau)\,\mathbf{e}(\tau)\,d\tau.$$

Luînd norma în ambii membri ai acestei ecuaţii şi folosind inegalităţile obişnuite pentru norme, obţinem:

$$||\mathbf{z}(t)|| \leqslant \int_{t_0}^{t} ||\varepsilon^{\hat{\mathscr{A}}(t-\tau)}||\;||\mathscr{B}(\tau)\,\mathbf{e}(\tau)||\,d\tau.$$

Prin ipoteză, toate soluţiile lui (63) se apropie de zero cînd $t \to \infty$; de aceea, toate valorile proprii ale lui $\hat{\mathscr{A}}$ au partea reală negativă. Astfel, există constante pozitive α şi δ, care satisfac inegalitatea $||\varepsilon^{\hat{\mathscr{A}}(t-\tau)}|| \leqslant \delta\,\varepsilon^{-\alpha(t-\tau)}$. Se recomandă să se verifice acest enunţ şi să se indice cum pot fi alese valorile α şi δ. Mai departe, $\mathscr{B}(t)\,\mathbf{e}(t)$ este mărginită pentru $t \geqslant t_0$; de aceea norma ei este mărginită. Fie β o margine (limită) pentru $||\mathscr{B}(t)\,\mathbf{e}(t)||$. Înlocuind aceste margini în inegalitatea de mai sus, se ajunge la

$$||\mathbf{z}(t)|| \leqslant \int_{t_0}^{t} \beta\,\delta\,\varepsilon^{-\alpha(t-\tau)}\,d\tau = \frac{\beta\delta}{\alpha}\left[1 - \varepsilon^{-\alpha(t-t_0)}\right].$$

Această inegalitate arată că $||\mathbf{x}(t)||$ şi deci $\mathbf{z}(t)$ sînt mărginite pentru $t \geqslant t_0$.

Să punem acum $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{z}$. Prin diferenţiere se obţine $d\mathbf{w}/dt = d\mathbf{x}/dt - d\mathbf{z}/dt$. Cum ecuaţiile diferenţiale pentru $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{z}$ determină pe $d\mathbf{x}/dt$ şi $d\mathbf{z}/dt$, se poate stabili uşor că $\mathbf{w}$ satisface ecuaţia diferenţială,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{w} = \mathscr{A}(t)\,\mathbf{w} + [\mathscr{A}(t) - \hat{\mathscr{A}}]\,\mathbf{z}(t).$$

Această ecuaţie este asemănătoare cu ecuaţia de stare tratată în teorema precedentă (Teorema 5), cu $[\mathscr{B}(t)\,\mathbf{e}(t)$ înlocuită prin $[\mathscr{A}(t) - \hat{\mathscr{A}}]\,\mathbf{z}(t)$. Astfel, dacă avem

$$\int_{t_0}^{\infty} ||[\mathscr{A}(t) - \hat{\mathscr{A}}]\,\mathbf{z}(t)||\,dt < \infty,$$

atunci concluzia teoremei precedente se aplică şi $\mathbf{w}(t)$ este mărginită cînd $t \to \infty$. Inegalitatea este evident adevărată deoarece: 1) se aplică condiţia (66); 2) $||\mathbf{z}(t)||$ este mărginită pentru $t \geqslant t_0$ şi 3) există inegalitatea:

$$\int_{t_0}^{\infty} ||[\mathscr{A}(t) - \hat{\mathscr{A}}]\,\mathbf{z}(t)||\,dt \leqslant \int_{t_0}^{\infty} ||\mathscr{A}(t) - \hat{\mathscr{A}}||\ \ ||\mathbf{z}(t)||\,dt.$$

S-a stabilit acum că $\mathbf{z}(t)$ şi $\mathbf{w}(t)$ sînt mărginite cînd $t \to \infty$. Atunci $\mathbf{x}(t) = \mathbf{w}(t) + \mathbf{z}(t)$ este mărginită cînd $t \to \infty$ şi teorema este demonstrată.

Situaţia devine mai bună dacă nu există excitaţie exterioară, adică $\mathscr{B}(t)\,\mathbf{e}(t) = 0$. Atunci concluzia ultimei teoreme poate fi întărită.

Teorema 7. *Dacă toate soluţiile ecuaţiei*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \hat{\mathscr{A}}\,\mathbf{y},$$

unde $\hat{\mathscr{A}}$ *este o matrice constantă, se apropie de zero cînd* $t \to \infty$, *atunci toate soluţiile ecuaţiei*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathscr{A}(t)\,\mathbf{x}$$

se apropie de zero cînd $t \to \infty$, *cu condiţia ca* $||\mathscr{A}(t) - \hat{\mathscr{A}}|| \leqslant \alpha/\delta$ *pentru* $t \geqslant t_0$.

Constantele α şi δ au aceleaşi sensuri ca cele din teorema precedentă. Demonstraţia teoremei 7 este lăsată ca exerciţiu pentru cititor.

Pentru a ilustra a doua din cele trei teoreme precedente să considerăm un filtru ca în fig. 10.6. Ecuația de stare se scrie ușor astfel

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3t\varepsilon^{-t} & 1-3t\varepsilon^{-t} & 0 \\ 1-3t\varepsilon^{-t} & -2+3t\varepsilon^{-t} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}[5\sin(\omega_2 t+\theta)].$$

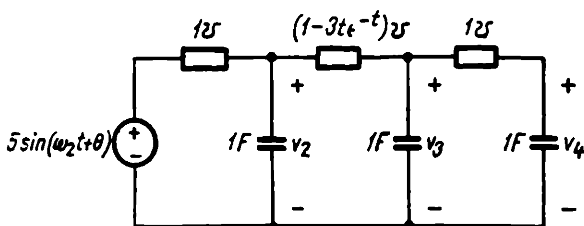


Fig. 10.6. Circuit variabil în timp.

Dacă $\|\mathscr{A}(t)-\hat{\mathscr{A}}\|$ trebuie să fie integrabilă de la t_0 la ∞, atunci trebuie ales $\hat{\mathscr{A}}$ astfel ca $\lim(\mathscr{A}(t)-\hat{\mathscr{A}})=0$ cînd $t\to\infty$. În consecință, din examinarea lui $\mathscr{A}(t)$ se vede că

$$\hat{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Apoi se determină polinomul caracteristic a lui $\hat{\mathscr{A}}$. Algoritmul matricei rezolvate, după cap. 4, poate servi la această determinare, printr-o metodă strict numerică. Astfel, se găsește polinomul caracteristic

$$d(s) = s^3 + 5s^2 + 6s + 1 .$$

Folosind criteriul lui Routh discutat în cap. 9, se găsește, prin metode strict numerice, că toate zero-urile lui $d(s)$ au partea reală negativă. De aceea toate soluțiile lui (63) se apropie de zero, cînd $t\to\infty$.

Formăm norma expresiei $\mathscr{A}(t)-\hat{\mathscr{A}}$:

$$\mathscr{A}(t)-\hat{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} 3t\varepsilon^{-t} & -3t\varepsilon^{-t} & 0 \\ -3t\varepsilon^{-t} & 3t\varepsilon^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

apoi

$$\| \mathscr{A}(t) - \hat{\mathscr{A}} \|_1 = 6\,t\,\varepsilon^{-t} .$$

S-a ales în mod arbitrar, în acest exemplu, folosirea normei vectorului sumă de module şi a normei matricei asociate. Acum, deoarece avem

$$\int_{t_0}^{\infty} \| \mathscr{A}(t) - \hat{\mathscr{A}} \|_1 \, dt = \int_{t_0}^{\infty} 6t\,\varepsilon^{-t}\, dt = 6\,(1 + t_0)\,\varepsilon^{-t_0} ,$$

condiţia (66) din Teorema 6 este satisfăcută. În sfîrşit,

$$\mathscr{B}(t)\,\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [5 \sin(\omega_2 t + \theta)]$$

este mărginită.

Astfel, toate condiţiile Teoremei 6 s-au găsit că sînt satisfăcute. Deci, pe baza teoremei, avem că $\mathbf{x}(t) = [q_2(t)\, q_3(t)\, q_4(t)]$, este mărginită cînd $t \to \infty$. Se observă că s-a stabilit acest lucru fără să se calculeze explicit soluţia ecuaţiei de stare sau a lui (63).

Proprietăţi asimptotice relative la o referinţă periodică

Ne vom îndrepta acum atenţia spre circuite care sînt aproape de o descriere a lor printr-o ecuaţie omogenă cu coeficienţi periodici. Vom numi acesta, o *ecuaţie de referinţă omogenă periodică*. Teorema ce urmează se referă la caracterul mărginit al vectorului de stare.

Teorema 8. *Dacă toate soluţiile ecuaţiei*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \hat{\mathscr{A}}(t)\mathbf{y} , \qquad (67)$$

unde $\hat{\mathscr{A}}(t)$ *este periodică, sînt soluţii mărginite pentru* $t \to \infty$, *atunci toate soluţiile ecuaţiei*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathscr{A}(t)\,\mathbf{x} + \mathscr{B}(t)\,\mathbf{e}(t)$$

sînt mărginite cînd $t \to \infty$, cu condiţiile

$$\int_{t_0}^{\infty} \| \mathscr{A}(t) - \hat{\mathscr{A}}(t) \| dt < \infty \tag{68a}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \| \mathscr{B}(t)\, \mathbf{e}(t) \| \, dt < \infty . \tag{68b}$$

Demonstraţia acestei teoreme se bazează pe faptul că orice soluţie a lui (67) poate fi exprimată sub forma $\mathbf{Q}(t)\varepsilon^{\mathbf{P}(t-t_0)}\mathbf{y}(t_0)$, pentru un $\mathbf{y}(t_0)$ oarecare, unde $\mathbf{Q}(t)$ este nesingulară şi periodică, iar $\mathbf{P}$ este o matrice constantă. Pentru a începe, să scrie mai întîi ecuaţia de stare sub forma

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \hat{\mathscr{A}}(t)\,\mathbf{x} + [\mathscr{A}(t) - \hat{\mathscr{A}}(t)]\,\mathbf{x} + \mathscr{B}(t)\,\mathbf{e}(t).$$

Considerăm că $\mathbf{y}(t)$ este soluţia ecuaţiei de referinţă (67), cu $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$; atunci, folosind matricea de tranziţie $\mathbf{Q}(t)\,\varepsilon^{\mathbf{P}(t-\tau)}\,\mathbf{Q}(\tau)^{-1}$, asociată cu (67), ecuaţia de stare va putea fi pusă în forma ecuaţiei integrale echivalente

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{Q}(t)\,\varepsilon^{\mathbf{P}(t-\tau)}\,\mathbf{Q}(\tau)^{-1}\,\{[\mathscr{A}(\tau) - \hat{\mathscr{A}}(\tau)]\,\mathbf{x}(\tau) + \mathscr{B}(\tau)\,\mathbf{e}(\tau)\}\,d\tau .$$

Luînd norma în ambii membri ai acestei ecuaţii şi aplicînd inegalităţile obişnuite referitoare la norme, se obţine:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leqslant \|\mathbf{y}(t)\| + \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{Q}(t)\|\;\|\varepsilon^{\mathbf{P}(t-\tau)}\|\;\|\mathbf{Q}(\tau)^{-1}\|$$
$$\times\, \{\|\mathscr{A}(\tau) - \hat{\mathscr{A}}(\tau)\|\;\|\mathbf{x}(\tau)\| + \|\mathscr{B}(\tau)\,\mathbf{e}(\tau)\|\}\,d\tau . \tag{69}$$

Cum toate soluţiile ecuaţiei de referinţă (67) sînt mărginite, $\|\mathbf{y}(t)\|$ este mărginită pentru $t \geqslant t_0$ şi nici unul din exponenţii caracteristici asociaţi cu (67) nu au partea reală pozitivă. Astfel $\|\varepsilon^{\mathbf{P}(t-\tau)}\|$, cu $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, este mărginită pentru $t \geqslant t_0$. Deoarece $\mathbf{Q}(t)$ este nesingulară şi periodică, $\|\mathbf{Q}(t)\|$ şi $\|\mathbf{Q}(\tau)^{-1}\|$, cu $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, sînt mărginite pentru $t \geqslant t_0$. Fie γ şi δ marginile corespunzătoare pentru $\|\mathbf{y}(t)\|$ şi $\|\mathbf{Q}(t)\|\;\|\varepsilon^{\mathbf{P}(t-\tau)}\|\;\|\mathbf{Q}(\tau)^{-1}\|$. Folosind aceste margini în (69), se găseşte că

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leqslant \gamma + \int_{t_0}^{\infty} [\delta\,\|\mathscr{A}(\tau) - \hat{\mathscr{A}}(\tau)\|\;\|\mathbf{x}(\tau)\| + \delta\,\|\mathscr{B}(\tau)\,\mathbf{e}(\tau)\|\,]\,d\tau .$$

sînt mărginite cînd $t \to \infty$, *cu condiţiile*

$$\int_{t_0}^{\infty} \| \mathscr{A}(t) - \hat{\mathscr{A}}(t) \| dt < \infty \tag{68a}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \| \mathscr{B}(t) \, \mathbf{e}(t) \| \, dt < \infty . \tag{68b}$$

Demonstraţia acestei teoreme se bazează pe faptul că orice soluţie a lui (67) poate fi exprimată sub forma $\mathbf{Q}(t) \varepsilon^{\mathbf{P}(t-t_0)} \mathbf{y}(t_0)$, pentru un $\mathbf{y}(t_0)$ oarecare, unde $\mathbf{Q}(t)$ este nesingulară şi periodică, iar **P** este o matrice constantă. Pentru a începe, să scrie mai întii ecuaţia de stare sub forma

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \hat{\mathscr{A}}(t) \, \mathbf{x} + [\mathscr{A}(t) - \hat{\mathscr{A}}(t)] \, \mathbf{x} + \mathscr{B}(t) \, \mathbf{e}(t).$$

Considerăm că $\mathbf{y}(t)$ este soluţia ecuaţiei de referinţă (67), cu $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$; atunci, folosind matricea de tranziţie $\mathbf{Q}(t) \, \varepsilon^{\mathbf{P}(t-\tau)} \, \mathbf{Q}(\tau)^{-1}$, asociată cu (67), ecuaţia de stare va putea fi pusă în forma ecuaţiei integrale echivalente

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{Q}(t) \, \varepsilon^{\mathbf{P}(t-\tau)} \, \mathbf{Q}(\tau)^{-1} \{ [\mathscr{A}(\tau) - \hat{\mathscr{A}}(\tau)] \, \mathbf{x}(\tau) + \mathscr{B}(\tau) \, \mathbf{e}(\tau) \} \, d\tau .$$

Luind norma în ambii membri ai acestei ecuaţii şi aplicînd inegalităţile obişnuite referitoare la norme, se obţine:

$$\| \mathbf{x}(t) \| \leqslant \| \mathbf{y}(t) \| + \int_{t_0}^{t} \| \mathbf{Q}(t) \| \, \| \varepsilon^{\mathbf{P}(t-\tau)} \| \, \| \mathbf{Q}(\tau)^{-1} \|$$
$$\times \{ \| \mathscr{A}(\tau) - \hat{\mathscr{A}}(\tau) \| \, \| \mathbf{x}(\tau) \| + \| \mathscr{B}(\tau) \, \mathbf{e}(\tau) \| \} \, d\tau . \tag{69}$$

Cum toate soluţiile ecuaţiei de referinţă (67) sînt mărginite, $\| \mathbf{y}(t) \|$ este mărginită pentru $t \geqslant t_0$ şi nici unul din exponenţii caracteristici asociaţi cu (67) nu au partea reală pozitivă. Astfel $\| \varepsilon^{\mathbf{P}(t-\tau)} \|$, cu $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, este mărginită pentru $t \geqslant t_0$. Deoarece $\mathbf{Q}(t)$ este nesingulară şi periodică, $\| \mathbf{Q}(t) \|$ şi $\| \mathbf{Q}(\tau)^{-1} \|$, cu $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, sînt mărginite pentru $t \geqslant t_0$. Fie γ şi δ marginile corespunzătoare pentru $\| \mathbf{y}(t) \|$ şi $\| \mathbf{Q}(t) \| \, \| \varepsilon^{\mathbf{P}(t-\tau)} \| \, \| \mathbf{Q}(\tau)^{-1} \|$. Folosind aceste margini în (69), se găseşte că

$$\| \mathbf{x}(t) \| \leqslant \gamma + \int_{t_0}^{\infty} [\delta \| \mathscr{A}(\tau) - \hat{\mathscr{A}}(\tau) \| \, \| \mathbf{x}(\tau) \| + \delta \| \mathscr{B}(\tau) \, \mathbf{e}(\tau) \|] \, d\tau .$$

Aceasta este forma la care se poate aplica lema lui Gronwall. Dacă mai facem ca t să tindă spre infinit, rezultatul devine:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leqslant \gamma \exp\left\{\int_{t_0}^{\infty} [\delta \|\mathscr{A}(\tau) - \hat{\mathscr{A}}(\tau)\| + (\delta/\gamma)\|\mathscr{B}(\tau)\,\mathbf{e}(\tau)\|]\,d\tau\right\}.$$

Apoi, din condiţiile (68) ale teoremei, rezultă că $\|\mathbf{x}(t)\|$ este mărginită şi deci $\mathbf{x}(t)$ este mărginită cînd $t \to \infty$. Astfel, teorema s-a demonstrat.

Din nou condiţiile teoremei pot fi uşurate, dacă i se aplică lui $\hat{\mathscr{A}}(t)$ restricţii în plus. În loc de a cere numai ca soluţiile ecuaţiei de referinţă omogenă periodică (67) să fie mărginite periodic, vom cere ca ele să se apropie de zero cînd $t \to \infty$. Atunci condiţiile (68) pot fi uşurate. Aceasta este enunţat mai precis în teorema următoare:

Teorema 9. *Dacă toate soluţiile din*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \hat{\mathscr{A}}(t)\,\mathbf{y},$$

unde $\hat{\mathscr{A}}(t)$ *este periodică, se apropie de zero cînd* $t \to \infty$, *atunci toate soluţiile din*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathscr{A}(t)\,\mathbf{x} + \mathscr{B}(t)\,\mathbf{e}(t)$$

sînt mărginite cînd $t \to \infty$, *cu condiţia*

$$\int_{t_0}^{\infty} \|\mathscr{A}(t) - \hat{\mathscr{A}}(t)\|\,dt < \infty \tag{70}$$

şi $\mathscr{B}(t)\,\mathbf{e}(t)$ *să fie mărginită cînd* $t \geqslant t_0$.

În demonstraţie, care nu se dă aici, trebuie urmărit ca toţi exponenţii caracteristici să aibă partea reală negativă. Aceasta este implicat prin presupunerea că toate soluţiile lui (67) se apropie de zero cînd $t \to \infty$. Deci, există nişte constante pozitive α şi β, astfel ca $\|\varepsilon^{\mathbf{P}(t-\tau)}\| \leqslant \delta\varepsilon^{-\alpha(t-\tau)}$.

În sfîrşit, ca şi în teoremele precedente, dacă lipseşte excitaţia, adică $\mathscr{B}(t)\mathbf{e}(t) \equiv 0$, — concluzia poate fi făcută mult mai riguroasă.

Teorema 10. *Dacă toate soluţiile din*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \hat{\mathscr{A}}(t)\,\mathbf{y},$$

unde $\hat{\mathscr{A}}(t)$ *este periodică, se apropie de zero cînd* $t\to\infty$, *atunci toate soluţiile din*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathscr{A}(t)\,\mathbf{x}$$

se apropie de zero cînd $t\to\infty$, *cu condiţia ca* $||(\mathscr{A}t)-\hat{\mathscr{A}}(t)||<\beta$, *pentru* $t\geqslant t_0$, *unde* β *este o constantă pozitivă ce depinde de* $\hat{\mathscr{A}}(t)$ *şi este stabilită în demonstraţie.*

Demonstraţia este similară cu cea pentru Teorema 7.

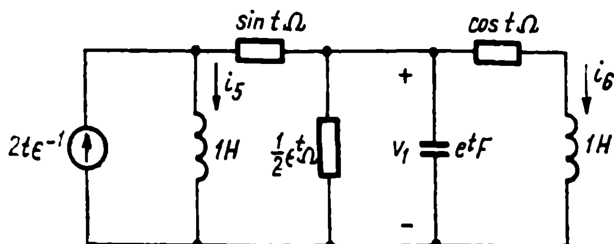


Fig. 10.7. Circuit variabil în timp, cu ecuaţie de referinţă omogenă periodică.

Pentru a ilustra prima din ultimul lot de teoreme, se consideră circuitul din fig. 10.7. Ecuaţia de stare este

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_1 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ \varepsilon^{-t} & -\sin t & 0 \\ \varepsilon^{-t} & 0 & -\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix} [2\,t\varepsilon^{-t}].$$

Norma expresiei, $||\mathscr{A}(t)-\hat{\mathscr{A}}(t)||$, va fi integrabilă de la t_0 la infinit, numai dacă $\lim\limits_{t\to\infty}[\mathscr{A}(t)-\hat{\mathscr{A}}(t)]=0$. Astfel, din examinarea lui $A(t)$ rezultă :

$$\hat{\mathscr{A}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -\sin t & 0 \\ 0 & 0 & -\cos t \end{bmatrix}.$$

Se poate demonstra că soluţia ecuaţiei de referinţă (67) este :

$$y(t)=\begin{bmatrix} \varepsilon^{-2(t-t_0)} & -\int_{t_0}^{t}\varepsilon^{-2(t-\tau)}\varepsilon^{\cos\tau-\cos t_0}d\tau & -\int_{t_0}\varepsilon^{-2(t-\tau)}\varepsilon^{-\sin\tau-\sin t_0}d\tau \\ 0 & \varepsilon^{\cos t-\cos t_0} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-\sin t+\sin t_0}\end{bmatrix}\mathbf{y}(t_0).$$

Se vede că, pentru orice $\mathbf{y}(t_0)$, soluţia este mărginită cînd $t\to\infty$.
Să examinăm apoi expresia :

$$\mathscr{A}(t)-\widehat{\mathscr{A}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \varepsilon^{-t} & 0 & 0\\ \varepsilon^{-t} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

şi

$$\mathscr{B}(t)\mathbf{e}(t)=\begin{bmatrix}2t\varepsilon^{-t}\\ 2t\sin t\varepsilon^{-t}\\ 0\end{bmatrix}.$$

Pentru norma acestor expresii obţinem :

$$||\mathscr{A}(t)-\widehat{\mathscr{A}}(t)||_{\infty}=\varepsilon^{-t}$$

şi

$$||\mathscr{B}(t)\mathbf{e}(t)||_{\infty}=2t\varepsilon^{-t}.$$

Se menţionează că norma de maximum modul a vectorului este mai convenabilă pentru această problemă, decît norma de sumă de modùle, aceasta din urmă fiind o expresie foarte complicată pentru $\mathscr{B}(t)\mathbf{e}(t)$.
În particular,

$$||\mathscr{B}(t)\mathbf{e}(t)||_1=2t\varepsilon^{-t}+2t|\sin t|\varepsilon^{-t}.$$

Este clar că cele două condiţii (68) sînt satisfăcute, deoarece

$$\int_{t_0}^{\infty}||\mathscr{A}(t)-\widehat{\mathscr{A}}(t)||_{\infty}dt=\varepsilon^{-t_0}<\infty$$

şi

$$\int_{t_0}^{\infty}||\mathscr{B}(t)\mathbf{e}(t)||_{\infty}dt=2(1+t_0)\varepsilon^{-t_0}<\infty.$$

Astfel, condițiile teoremei 8 sînt satisfăcute și vectorul $\mathbf{x}=[q_1\ \lambda_5\ \lambda_6]'$ este mărginit cînd $t\to\infty$. Spre deosebire de aceasta, în exemplul anterior era necesar să se rezolve ecuația omogenă $d\mathbf{y}/dt=\hat{\mathscr{A}}(t)\mathbf{y}$. Astfel, faptul că $\hat{\mathscr{A}}(t)$ nu este o constantă atrage după sine o muncă mai mare pentru aplicarea teoremei, decît în cazul cînd $\hat{\mathscr{A}}(t)$ este constantă.

Proprietăți asimptotice relative la o referință generală variabilă în timp

S-au discutat pînă aici cîteva teoreme care stabilesc condițiile ca soluția unei ecuații generale de stare (64), să posede proprietăți de mărginire asimptotice. Aceasta s-a făcut în legătură cu soluția unei ecuații de referință omogene, de forma

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}=\hat{\mathscr{A}}(t)\,\mathbf{y}. \tag{71}$$

S-au considerat două cazuri: 1) $\hat{\mathscr{A}}(t)$, matrice constantă și 2) $\hat{\mathscr{A}}(t)$ matrice periodică. Cînd $\hat{\mathscr{A}}(t)$ nu este limitată la aceste cazuri, dar se admite că soluția lui (71) are proprietatea asimptotică corespunzătoare, — ar fi tentant să se presupună că soluția generală a ecuației de stare va avea proprietăți asemănătoare, dacă $\mathscr{A}(t)$ și $\mathscr{B}(t)\mathbf{e}(t)$ satisfac condiții asemănătoare. Această presupunere ar fi însă incorectă. Se pot da exemple pentru a dovedi aceasta.

Exemplu. Presupunem că

$$\mathscr{A}=(t)\begin{bmatrix}-\nu & 0\\ \varepsilon^{-\nu t} & \sin t-t\cos t-2\nu\end{bmatrix}$$

și

$$\mathscr{B}(t)\,\mathbf{e}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

Apoi, punem

$$\hat{\mathscr{A}}(t)=\begin{bmatrix}-\nu & 0\\ 0 & \sin t+t\cos t-2\nu\end{bmatrix},$$

Se verifică ușor că soluția ecuației de referință omogenă (71) este

$$y_1(t)=\varepsilon^{-\nu t}y_1(0)$$
$$y_2(t)=\varepsilon^{t\sin t-2\nu t}\,y_2(0).$$

Este clar că $\mathbf{y} = [y_1 \; y_2]'$ este mărginită pentru $2\nu \geqslant 1$ și că, de fapt, se apropie de zero pentru $2\nu > 1$. Se observă că $\int_0^\infty ||\mathscr{A}(t) - \widehat{\mathscr{A}}(t)||_\infty \, dt = \int_0^\infty \varepsilon^{-\nu t} dt = 1/\nu < \infty$ și $\int_0^\infty ||\mathscr{B}(t)\, \mathbf{e}(t)||_\infty \, dt \equiv 0 < \infty$. S-a ales în mod arbitrar în acest exemplu norma de vector cu modul maxim și norma de matrice asociată. Soluția ecuației este:

$$x_1(t) = \varepsilon^{-\nu t} x_1(0)$$

$$x_2(t) = \varepsilon^{t \sin t - 2\nu t} \left[x_2(0) + x_1(0) \int_0^t \varepsilon^{-\tau \sin \tau} \, d\tau \right].$$

Se recomandă verificarea acestor rezultate. Să ne referim la integrala din ultima expresie de mai sus. Se pune $t_n = 2n\pi + \pi/2$; atunci, cum $\varepsilon^{-\tau \sin \tau}$ este pozitiv pentru $0 \leqslant \tau \leqslant t_n$, vom avea

$$\int_0^{t_n} \varepsilon^{-\tau \sin \tau} d\tau > \int_{t_n - 5\pi/4}^{t_n - 3\pi/4} \varepsilon^{-\tau \sin \tau} \, d\tau = \int_{2n\pi - 3\pi/4}^{2n\pi - \pi/4} \varepsilon^{-\tau \sin \tau} \, d\tau.$$

Cea mai mică valoare a integrandului în intervalul de la $2n\pi - 3\pi/4$ pînă la $2n\pi - \pi/4$, apare la

$$\tau = 2n\pi - 3\pi/4 \text{ și este } \varepsilon^{(2n\pi - 3\pi/4)/\sqrt{2}}. \text{ De aceea}$$

$$\int_0^{t_n} \varepsilon^{-\tau \sin \tau} d\tau > \varepsilon^{(2n\pi - 3\pi/4)/\sqrt{2}} \int_{2n\pi - 3\pi/4}^{2n\pi - \pi/4} d\tau$$

$$> \frac{\pi}{2} \varepsilon^{(2n\pi - 3\pi/4)/\sqrt{2}}.$$

Cum $2n\pi - 3\pi/4 = t_n - 5\pi/4$, rezultă

$$\int_0^{t_n} \varepsilon^{-\tau \sin \tau} d\tau > \frac{\pi}{2} \varepsilon^{-5\pi/4\sqrt{2}} \; \varepsilon^{t_n/\sqrt{2}}$$

Acum știm că. pentru $t = t_n$, avem

$$x_2(t_n) > \varepsilon^{t_n \sin t_n - 2\nu t_n} \left[x_2(0) + x_1(0) \frac{\pi}{2} \varepsilon^{-5\pi/4\sqrt{2}} \; \varepsilon^{t_n/\sqrt{2}} \right]$$

Deoarece sînt $t_n = \sin(2n\pi + \pi/2) = 1$, inegalitatea de mai sus se poate scrie:

$$x_2(t_n) > \varepsilon^{(1-2\nu)t_n} \left[x_2(0) + x_1(0) \; \frac{\pi}{2} \varepsilon^{-5\pi/4\sqrt{2}} \; \varepsilon^{t_n/\sqrt{2}} \right].$$

Este evident căm dacă t_n tinde spre infinit, x_2, (t_n) devine nemărginit cînd $2\nu<1+1/\sqrt{2}$ şi $x_1(0) \neq 0$. Aceasta atrage după sine şi faptul că $\mathbf{x}=[x_1x_2]'$ devine nemărginită cînd $t \to \infty$. Astfel, pentru $1 \leqslant 2\nu < \overline{1+1}/\sqrt{2}$, toate soluţiile ecuaţiei de referinţă (71) sînt mărginite şi unele soluţii ale cuacţiei de stare sînt nemărginite.

Acest exemplu ne arată clar că modificarea ce am vrut s-o facem în teoremele anterioare nu este valabilă. Totuşi, ar fi interesat de ştiut ce anume restricţii suplimentare ar fi necesare pentru a obţine rezultatul dorit. Ecuaţia de stare se poate scrie în forma :

$$\frac{d}{dt}\, \mathbf{x} = \mathscr{A}(t)\,\mathbf{x} + [\mathscr{A}(t) - \hat{\mathscr{A}}(t)]\mathbf{x} + \mathscr{B}(t)\mathbf{e}(t).$$

Fie $\mathbf{y}(t)$ soluţia lui (71), cu $\mathbf{y}(t)_0=\mathbf{x}(t_0)$ şi fie $\mathbf{Y}(t)\ \mathbf{Y}(\tau)^{-1}$, matricea de tranziţie asociată cu (71). Atunci, ecuaţia de stare are ecuaţia integrală echivalentă de forma :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(\tau)^{-1}\{[\mathscr{A}(\tau)-\hat{\mathscr{A}}(\tau)]\mathbf{x}(\tau) + \mathscr{B}(\tau)\mathbf{e}(\tau)\}\, d\tau.$$

Luînd norma la ambii membrii şi aplicînd neegalităţile de normă ca mai sus, se obţine:

$$||\mathbf{x}(t)|| \leqslant ||\mathbf{y}(t)|| + \int_{t_0}^{t} ||\mathbf{Y}(t)||\ ||\mathbf{Y}(\tau)^{-1}||$$

$$\times\{||\mathscr{A}(\tau)-\hat{\mathscr{A}}(\tau)||\ \ ||\mathbf{x}(\tau)|| + ||\mathscr{B}(\tau)\mathbf{e}(\tau)||\}d\tau.$$

Pentru a aplica lema lui Gronwall este necesar ca $||\mathbf{y}(t)||$, $||\mathbf{Y}(t)||$ şi $||\mathbf{Y}(\tau)^{-1}||$, cu $t_0<\tau<t$, să fie mărginite cînd $t>t_0$. Dacă toate soluţiile lui (71) sînt mărginite, $||\mathbf{y}(t)||$ şi $||\mathbf{Y}(t)||$ sînt mărginite, totuşi, nu se poate deduce că şi $||\mathbf{Y}(\tau)^{-1}||$ este mărginită.

Astfel, avem nevoie de o condiţie care să ne asigure că $||\mathbf{Y}(\tau)^{-1}||$ este mărginită. În acest scop să observăm că $\mathbf{Y}(t)^{-1}=\text{adj}\,[\mathbf{Y}(t)]\,/\det\,[\mathbf{Y}(t)]$ există pentru orice $t \geqslant t_0$ finit, cu condiţia ca $\det\,[\mathbf{Y}(t)] \neq 0$, şi este mărginită, dacă $\det\,[\mathbf{Y}(t)]$ este mărginită departe de zero. Acum să ne amintim din (41) că

$$\det\,[\mathbf{Y}(t)] = \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \text{tr}\,[\hat{\mathscr{A}}(\tau)]\, d\tau\right\}.$$

De aceea, dacă se adaugă condiţia

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t} \text{tr}\,[\hat{\mathscr{A}}(\tau)]\, d\tau > -\infty.$$

atunci det $[\mathbf{Y}(t)]$ este mărginit departe de zero şi $||\mathbf{Y}(t)^{-1}||$ este mărginită pentru $t \geqslant t_0$. În mod echivalent, $||\mathbf{Y}(\tau)^{-1}||$ cu $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ este mărginită pentru $t \geqslant t_0$.

Cu această condiţie adăugată, demonstraţia se desfăşoară ca în demonstraţiile anterioare, făcînd uz în acest scop de lema lui Gronwall. Demonstraţia fiind astfel indicată, — efectuarea ei este lăsată pe seama cititorului, — vom enunţa acum ultima teoremă din acest paragraf.

Teorema 11. *Dacă toate soluţiile din*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \hat{\mathscr{A}}(t)\mathbf{y}$$

sînt mărginite cînd $t \to \infty$, atunci toate soluţiile din

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathscr{A}(t)\,\mathbf{x} + \mathscr{B}(t)\,\mathbf{e}(t)$$

sînt mărginite cînd $t \to \infty$, cu condiţiile

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}\,[\hat{\mathscr{A}}(\tau)\,d\tau > -\infty \tag{72a}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} ||\mathscr{A}(t) - \hat{\mathscr{A}}(t)||\,dt < \infty \tag{72b}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} ||\mathscr{B}(t)\,\mathbf{e}(t)||\,dt < \infty. \tag{72c}$$

Ultimele două condiţii sînt aceleaşi ca înainte.

Modificarea se găseşte în condiţia (72*a*). Aceasta este preţul care se plăteşte pentru faptul că nu se limitează $\hat{\mathscr{A}}(t)$ să fie o simplă constantă sau o matrice periodică. Condiţia (72*a*) este destul de severă; atît de mult încît, un circuit care este cunoscut că are un vector de stare mărginit asimptotic, după una din teoremele anterioare, s-ar putea să nu satisfacă pe (72*a*).

De exemplu, să presupunem că $\hat{\mathscr{A}}(t)$ este o matrice constantă şi condiţiile de la Teorema 5 sînt satisfăcute. În plus, să presupunem că toate soluţiile ecuaţiei omogene de referinţă (63) se apropie de zero cînd $t \to \infty$, — adică admitem o condiţie care cere mai mult decît „mărginirea" impusă prin Teorema 5 şi prin Teorema 11. În acest caz condiţia (72*a*) nu poate fi îndeplinită. Demonstraţia este lăsată în sarcina cititorului.

Să aplicăm acum această ultimă teoremă la un exemplu. Se consideră circuitul din fig. 10.8. Toate elementele sînt variabile în timp. Ecuaţia de stare se găseşte a fi

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_2 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1-t\sin 2t)\varepsilon^{-3t} & -\varepsilon^{-t} \\ \varepsilon^{-t} & -1(1-2t)\varepsilon^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_2 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}[e(t)].$$

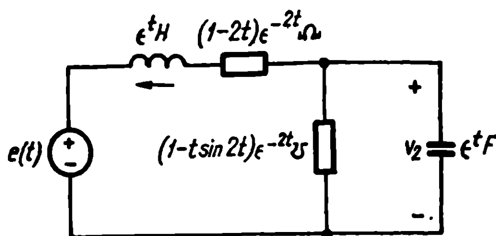


Fig. 10.8. Circuit variabil în timp.

Dacă condiţia (72*b*) trebuie să fie satisfăcută, atunci $\hat{\mathscr{A}}(t)$ trebuie aleasă astfel ca $\lim\limits_{t\to\infty} [\mathscr{A}(t)-\hat{\mathscr{A}}(t)]=0$; o alegere posibilă este:

$$\hat{\mathscr{A}}(t) = \begin{bmatrix} -\varepsilon^{-3t} & 0 \\ 0 & -\varepsilon^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Atunci, ecuaţia de referinţă (71) are soluţia:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \exp\{\frac{1}{3}(\varepsilon^{-3t}-\varepsilon^{-3t_0})\} & 0 \\ 0 & \exp\{\frac{1}{3}(\varepsilon^{-3t}-\varepsilon^{-3t_0})\} \end{bmatrix}\mathbf{y}(t_0),$$

după cum se poate verifica. Se observă că soluţia pentru orice $\mathbf{y}(t_0)$ este mărginită cînd $t\to\infty$. Deoarece tr $\hat{\mathscr{A}}(t) = -2\varepsilon^{-3t}$, se găseşte $\int_{t_0}^{t} \text{tr}\, \hat{\mathscr{A}}(t)dt = \frac{2}{3}\, \varepsilon^{-3t} - \varepsilon^{-3t_0})$ şi deci condiţia (72*a*) este satisfăcută.

Să examinăm acum celelalte condiţii din (72). Pentru $\mathscr{A}(t)-\hat{\mathscr{A}}(t)$ se găseşte

$$\mathscr{A}(t) - \hat{\mathscr{A}}(t) = \begin{bmatrix} t\sin 2\, t\varepsilon^{-3t} & -\varepsilon^{-t} \\ \varepsilon^{-t} & 2t\varepsilon^{-3t} \end{bmatrix}$$

şi în consecinţă

$$\|\mathscr{A}(t)-\hat{\mathscr{A}}(t)\|_1 = \max\{\varepsilon^{-t} + t|\sin 2t|\,\varepsilon^{-3t},\ \varepsilon^{-t} + 2t\,\varepsilon^{-3t}\}$$

$$= \varepsilon^{-t} + 2t\varepsilon^{-3t}.$$

Astfel, condiţia (72*b*) este satisfăcută , deoarece

$$\int_{t_0}^{\infty} \|\mathscr{A}(t)-\hat{\mathscr{A}}(t)\|_1 dt = \varepsilon^{-t_0} + \frac{2}{9}(1+3t_0)\varepsilon^{-3t_0} < \infty.$$

Prin această teoremă se poate face acum următorul enunţ : pentru orice tensiuni de excitaţie $e(t)$, la care condiţia (72*c*) este satisfăcută, starea $[q_2(t)\ \lambda_5(t)]'$ a circuitului din fig. 10.8 este mărginită cînd $t \to \infty$.

10.4. FORMULAREA ECUAŢIEI DE STARE PENTRU CIRCUITE NELINIARE

Deşi rezolvarea ecuaţiilor liniare variabile în timp este mai dificilă decît rezolvarea celor liniare invariabile în timp, condiţiile fundamentale de liniaritate permit aplicarea, la circuitele variabile în timp, a multor procedee cunoscute de la cazul cu invarianţă în timp. Aceasta nu mai este adevărat pentru circuite neliniare, spre care ne îndreptăm acum atenţia. Vom presupune, de la bun început, că circuitele pot fi atît variabile în timp, cît şi neliniare. Pentru astfel de circuite este necesar, de fapt, să ne întoarcem la legile fundamentale, pentru a putea formula ecuaţiile potrivite.

Formularea topologică

Formularea ecuaţiilor de stare trebuie să combine relaţiile topologice, exprimate prin relaţiile lui Kirchhoff pentru un arbore normal (sau o pădure), — care sînt valabile independent de starea de liniaritate sau de variaţie în timp, — cu expresiile neliniare şi variabile în timp, care leagă variabilele ce descriu relaţiile din laturi. Etapele vor fi în paralel cu cele din cap. 4, unde s-au dedus ecuaţiile de stare pentru circuite liniare, inva-

riante în timp. Pentru ușurință, se repetă aici ecuațiile topologice date în cap. 4. Notațiile sînt conforme cu cele din acel capitol.

$$\mathbf{i}_E = -\mathbf{Q}_{EC}\mathbf{i}_{Cl} - \mathbf{Q}_{ER}\mathbf{i}_{Rl} - \mathbf{Q}_{EL}\mathbf{i}_{Ll} - \mathbf{Q}_{EJ}\mathbf{i}_J \tag{73a}$$

$$\mathbf{i}_{Ct} = -\mathbf{Q}_{CC}\mathbf{i}_{Cl} - \mathbf{Q}_{CR}\mathbf{i}_{Rl} - \mathbf{Q}_{CL}\mathbf{i}_{Ll} - \mathbf{Q}_{CJ}\mathbf{i}_J \tag{73b}$$

$$\mathbf{i}_{Rt} = \qquad - \mathbf{Q}_{RR}\mathbf{i}_{Rl} - \mathbf{Q}_{RL}\mathbf{i}_{Ll} - {}_{RJ}\mathbf{i}_J \tag{73c}$$

$$\mathbf{i}_{Lt} = \qquad\qquad - \mathbf{Q}_{LL}\mathbf{i}_{Ll} - \mathbf{Q}_{LJ}\mathbf{i}_J \tag{73d}$$

$$\mathbf{v}_{Cl} = \mathbf{Q}'_{EC}\mathbf{v}_E + \mathbf{Q}'_{CC}\mathbf{v}_{Ct} \tag{73e}$$

$$\mathbf{v}_{Rl} = \mathbf{Q}'_{RR}\mathbf{v}_E + \mathbf{Q}'_{CR}\mathbf{v}_{Ct} + \mathbf{Q}'_{RR}\mathbf{v}_{Rt} \tag{73f}$$

$$\mathbf{v}_{Ll} = \mathbf{Q}'_{EL}\mathbf{v}_L + \mathbf{Q}'_{CL}\mathbf{v}_{Ct} + \mathbf{Q}'_{RL}\mathbf{v}_{Rt} + \mathbf{Q}'_{LL}\mathbf{v}_{Lt} \tag{73g}$$

$$\mathbf{v}_J = \mathbf{Q}'_{EL}\mathbf{v}_E + \mathbf{Q}'_{CJ}\mathbf{v}_{Ct} + \mathbf{Q}'_{RJ}\mathbf{v}_{Rt} + \mathbf{Q}'_{LJ}\mathbf{v}_{Lt}. \tag{73h}$$

Detaliile de formulare vor fi diferite, în funcție de variabilele specifice alese drept componente ale vectorului de stare. Acestea pot fi tensiuni și curenți, sau sarcini electrice și fluxuri magnetice. Vom formula relațiile pe laturi așa ca elementele vectorului de stare să fie combinații liniare de sarcini pe capacități și combinații liniare de fluxuri în inductanțe. Se știe că

$$\mathbf{i}_{Ct} = \frac{d}{dt}\mathbf{q}_{Ct} \tag{74a}$$

$$\mathbf{i}_{Cl} = \frac{d}{dt}\mathbf{q}_{Cl}, \tag{74b}$$

unde elementele vectorilor $\mathbf{q}_{Ct}$ și $\mathbf{q}_{Cl}$ sînt respectiv sarcini pe capacitățile din ramuri (twig) și pe capacitățile din coarde (link). Vom presupune că sarcinile sînt funcții neliniare de tensiunile de pe capacități. Astfel

$$\mathbf{q}_{Ct} = \mathbf{f}_{Ct}(\mathbf{v}_{Ct}) \tag{75a}$$

$$\mathbf{q}_{Cl} = \mathbf{f}_{Cl}(\mathbf{v}_{Cl}). \tag{75b}$$

unde $\mathbf{f}_{Ct}$ și $\mathbf{f}_{Cl}$ sînt funcții vectoriale de $\mathbf{v}_{C_t}$ și $\mathbf{v}_{Cl}$. În plus, ele pot fi și funcții de timp. După înlocuirea expresiilor (74*a*) și (74*b*) în (73*b*) și rearanjarea termenilor, se obține :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{q}_{Ct} + \mathbf{Q}_{CC}\mathbf{q}_{Cl}) = -\mathbf{Q}_{CR}\mathbf{i}_{Rl} - \mathbf{Q}_{CL}\mathbf{i}_{Ll} - \mathbf{Q}_{CJ}\mathbf{i}_J. \tag{76}$$

Apoi, să exprimăm combinaţia liniară a sarcinilor $q_{Ct}+Q_{CC}\,q_{Cl}$, în termenii relaţiilor (75). Astfel,

$$q_{Ct} + Q_{CC}q_{Cl} = f_{Ct}(v_{Ct}) + Q_{CC}f_{Cl}(v_{Cl}). \tag{77}$$

Înlocuind v_{Cl} din ecuaţia lui Kirchhoff (73e), se obţine

$$q_{Ct}+Q_{CC}q_{Cl} = f_{Ct}(v_{Ct}) + Q_{CC}f_{Cl}(Q'_{EC}v_E + Q'_{CC}v_{Ct}). \tag{78}$$

Vom *presupune* că această ecuaţie posedă o soluţie unică pentru v_{Ct}, pe care o scriem după cum urmează,

$$b_t = g_{Ct}(q_{Ct} + Q_{CC}q_{Cl}, v_E). \tag{79}$$

unde g_{Ct} este o funcţie vectorială, cu argumentele $q_{Ct} + Q_{CC}q_{Cl}$ şi v_E.

Înainte de a dezvolta mai departe (76) şi (79) ne întoarcem spre relaţiile de laturi pentru inductanţe. Se ştie că

$$\frac{d}{dt}\lambda_{Lt} = v_{Lt} \tag{80a}$$

$$\frac{d}{dt}\lambda_{Ll} = v_{Ll}. \tag{80b}$$

unde elementele lui λ_{Lt} şi λ_{Ll} sînt respectiv fluxuri prin inductanţele de ramuri şi prin inductanţele de coarde. Vom presupune că fluxurile sînt funcţii neliniare de curenţi în inductanţe.
Astfel,

$$\lambda_{Lt} = f_{Lt}(i_{Lt}, i_{Ll}) \tag{81a}$$

$$\lambda_{Ll} = f_{Ll}(i_{Lt}, i_{Ll}), \tag{81b}$$

unde f_{Lt} şi f_{Ll} sînt funcţii vectoriale de i_{Lt} şi i_{Ll}. Ele pot fi în acelaşi timp şi funcţii de timp.

Apoi înlocuim (80*a*) şi (80*b*) în expresia topologică (73*g*) şi rearanjăm termenii pentru a stabili următoarea expresie:

$$\frac{d}{dt}(\lambda_{Ll} - Q'_{LL}\lambda_{Lt}) = Q'_{CL}v_{Ct} + Q'_{RL}v_{Rt} + Q'_{EL}v_E. \tag{82}$$

Combinația liniară a fluxurilor $\lambda_{Ll} - Q'_{LL}\lambda_{Lt}$ poate fi exprimată în termenii relațiilor din (81), după cum urmează:

$$\lambda_{Ll} - Q'_{E}\lambda_{Lt} = \mathbf{f}_{Ll}(\mathbf{i}_{Lt}, \mathbf{i}_{Ll}) - Q'_{LL}\mathbf{f}_{Lt}(\mathbf{i}_{Lt}, \mathbf{i}_{Ll}). \tag{83}$$

Înlocuind $\mathbf{i}_{Lt}$ din ecuația lui Kirchhoff (73*d*) se obține,

$$\lambda_{Ll} - Q'_{LL}\lambda_{Lt} = \mathbf{f}_{Ll}(-Q_{LL}\mathbf{i}_{Ll} - Q_{LJ}\mathbf{i}_{J}, \mathbf{i}_{Ll})$$
$$- Q'_{LL}\mathbf{f}_{Lt}(-Q_{LL}\mathbf{i}_{Ll} - Q_{LJ}\mathbf{i}_{J}, \mathbf{i}_{Ll}). \tag{84}$$

Vom presupune că această ecuație posedă o soluție unică pentru $\mathbf{i}_{Ll}$, în termeni de $\lambda_{Ll} - Q'_{LL}\lambda_{Lt}$ și $\mathbf{i}_{J}$, care poate fi exprimată ca

$$\mathbf{i}_{Ll} = \mathbf{g}_{Ll}(\lambda_{Ll} - Q'_{LL}\lambda_{Kt}, \mathbf{i}_{J}), \tag{85}$$

unde $\mathbf{g}_{Ll}$ este o funcție vectorială de argumentele indicate.

Să înlocuim acum (85) in (76) și (79) in (82). Astfel,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{q}_{Ct} + Q_{CC}\mathbf{q}_{Cl}) = -Q_{CR}\mathbf{i}_{Rl} - Q_{CL}\mathbf{g}_{Ll}(\lambda_{Ll} - Q'_{LL}\lambda_{Ll}, \mathbf{i}_{J}) - Q_{CJ}\mathbf{i}_{J} \tag{86a}$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda_{Ll} - Q'_{LL}\lambda_{Ll}) = Q'_{CL}\mathbf{g}_{Cl}(\mathbf{q}_{Ct} + Q_{CC}\mathbf{q}_{Cl}, \mathbf{v}_{E}) + Q'_{RL}\mathbf{v}_{Rl} + Q'_{EL}\mathbf{v}_{E}. \tag{86b}$$

Dacă n-ar fi fost prezența variabilelor $\mathbf{i}_{Rl}$ și $\mathbf{v}_{Rt}$ a rezistențelor de laturе, am fi avut perechea dorită de ecuații diferențiale vectoriale de ordinul intîi pentru $\mathbf{q}_{Ct} + Q_{CC}\mathbf{q}_{Cl}$ și $\lambda_{Ll} - Q'_{LL}\lambda_{Lt}$. De aceea ne îndreptăm atenția acum asupra relațiilor de laturi pentru rezistențe.

Să presupunem că relațiile intre tensiunile pe rezistențe și curenții din aceste rezistențe pot fi exprimate prin ecuația vectorială implicită:

$$\mathbf{f}_{R}(\mathbf{i}_{Qt}, \mathbf{v}_{Rt}, \mathbf{i}_{Rl}, \mathbf{v}_{Rl}) = 0. \tag{87}$$

Aceasta este corespondenta lui (125) din cap. 4. Dacă substituim ecuațiile lui Kirchhoff (73*c*) și (73*f*) in această ecuație implicită, obținem:

$$\mathbf{f}_{R}(-Q_{RR}\mathbf{i}_{RL} - Q_{RL}\mathbf{i}_{Ll} - Q_{RJ}\mathbf{i}_{J}, \mathbf{v}_{Rt}, \mathbf{i}_{Rl},$$
$$Q'_{ER}\mathbf{v}_{E} + Q'_{CR}\mathbf{v}_{Cl} + Q'_{RR}\mathbf{v}_{Rl}) = 0. \tag{88}$$

Apoi, substituind pe (79) și (85) in această expresie, avem:

$$\mathbf{f}_{R}(-Q_{RR}\mathbf{i}_{Rl} - Q_{RL}\mathbf{g}_{Ll}(\lambda_{Ll} - Q'_{LL}\lambda_{Lt}, \mathbf{i}_{J}) - Q_{RJ}\mathbf{i}_{J} \cdot \mathbf{v}_{Rt} \cdot \mathbf{i}_{Rl},$$
$$Q'_{ER}\mathbf{v}_{E} + Q'_{CR}\mathbf{g}_{Cl}(\mathbf{q}_{Ct} + Q_{CC}\mathbf{q}_{Cl} \cdot \mathbf{v}_{E}) + Q'_{RR}\mathbf{v}_{Rl}) = 0. \tag{89}$$

Aceasta este corespondenta lui (126) din cap. 4. Reamintim că acolo am presupus doar că anumite matrice nu erau singulare, astfel că acele ecuații puteau fi inversate. În mod analog, presupunem că (89) poate fi

rezolvată pentru $\mathbf{v}_{Rt}$ şi $\mathbf{i}_{Rl}$, în termeni de $\mathbf{q}_{Ct} + \mathbf{Q}_{CC}\mathbf{q}_{Cl}$, $\lambda_{Ll} - \mathbf{Q}'_{LL}\lambda_{Lt}$, $\mathbf{v}_E$ şi $\mathbf{i}_J$. Soluţia va avea expresia implicită :

$$\mathbf{v}_{Rt} = \mathbf{g}_{Rt}(\mathbf{q}_{Ct} + \mathbf{Q}_{CC}\mathbf{q}_{Cl}, \lambda_{Ll} - \mathbf{Q}'_{LL}\lambda_{Lt}, \mathbf{v}_E, \mathbf{i}_J) \tag{90a}$$

$$\mathbf{i}_{Rl} = \mathbf{g}_{Rl}(\mathbf{q}_{Ct} + \mathbf{Q}_{CC}\mathbf{q}_{Cl}, \lambda_{Ll} - \mathbf{Q}'_{LL}\lambda_{Lt}, \mathbf{v}_E, \mathbf{i}_J). \tag{90b}$$

Substituind aceste două expresii, pentru $\mathbf{v}_{Rt}$ şi $\mathbf{i}_{Rl}$ în (86), se obţin ecuaţiile diferenţiale dorite

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{q}_{Ct} + \mathbf{Q}_{CC}\mathbf{q}_{Cl}) = -\mathbf{Q}_{CR}\mathbf{g}_{Rl}(\mathbf{q}_{Ct} + \mathbf{Q}_{CC}\mathbf{q}_{Cl}, \lambda_{Ll} - \mathbf{Q}'_{LL}\lambda_{Lt}, \mathbf{v}_E, \mathbf{i}_J)$$
$$- \mathbf{Q}_{CL}\mathbf{g}_{Ll}(\lambda_{Ll} - \mathbf{Q}'_{LL}\lambda_{Lt}, \mathbf{i}_J) - \mathbf{Q}_{CJ}\mathbf{i}_J \tag{91a)}$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda_{Ll} - \mathbf{Q}'_{LL}\lambda_{Lt}) = \mathbf{Q}'_{RL}\mathbf{g}_{Rt}(\mathbf{q}_{Ct} + \mathbf{Q}_{CC}\mathbf{q}_{Cl}, \lambda_{Ll} - \mathbf{Q}'_{LL}\lambda_{Lt}, \mathbf{v}_E, \mathbf{i}_J)$$
$$+ \mathbf{Q}'_{CL}\mathbf{g}_{Ct}(\mathbf{q}_{Ct} + \mathbf{Q}_{CC}\mathbf{q}_{Cl}, \mathbf{v}_E) + \mathbf{Q}'_{EL}\mathbf{v}_E. \tag{91b}$$

Vom considera că elementele vectorului de stare sint combinaţii liniare de sarcini pe capacităţi şi fluxuri în inductanţe.
Astfel,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{Ct} + \mathbf{Q}_{CC}\mathbf{q}_{Cl} \\ \lambda_{Ll} - \mathbf{Q}'_{LL}\lambda_{Lt} \end{bmatrix}. \tag{92}$$

Vectorul de excitaţie este definit prin

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{i}_J \end{bmatrix}, \tag{93}$$

cum a mai fost anterior. Atunci cele două ecuaţii diferenţiale (91) pot fi combinate şi exprimate ca o ecuaţie diferenţială vectorială :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{e}), \tag{94}$$

unde **h** este o funcţie vectorială de **x** şi de **e**, care este determinată prin membrii din dreapta a ecuaţiilor diferenţiale (91) şi relaţiile de definiţie (92) şi (93) pentru **x** şi **e**. Se poate determina uşor expresia explicită a lui **h**. Mai departe, **h**, poate fi şi o funcţie explicită de timp ; cînd este necesar să se pună în evidenţă aceasta, se va scrie (94) astfel :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, t). \tag{95}$$

Cum $\mathbf{x}$ este un *vector de stare* a circuitelor, oricare din cele două ultime ecuaţii diferenţiale de $\mathbf{x}$, va fi denumită *ecuaţie de stare*.

S-a arătat o metodă pentru desfăşurarea ecuaţiei de stare a unui circuit neliniar, în care relaţiile variabilelor de laturi pot fi exprimate în forma specificată în (74), (80) şi (87) şi pentru care ecuaţiile algebrice (78), (84) şi (89) au soluţii după cum s-a presupus. Pentru orice problemă particulară, nu se va lua expresia finală şi nu se va substitui în ea valorile numerice corespunzătoare. În schimb, se vor repeta etapele din procedeu pentru problema particulară respectivă. Rezultatele obţinute sînt generale; în anumite cazuri specifice, liniaritatea unor elemente componente va permite unele simplificări, ce vor ieşi la iveală numai cînd se urmează etapele detaliate ale formulării.

Exemplu. Să aplicăm acest procedeu de formulare la circuitul arătat în fig. 9*a*— Cu modelul obişnuit pentru triodă la frecvenţe joase, circuitul poate fi redesenat ca în fig. 9*b*. În circuit există o inductanţă neliniară şi o sursă dependentă, neliniară. În fig. 9, *c* se arată graful circuitului şi arborele normal. Nu există nici o degenerare, astfel că matricea fundamentală de grup tăiat (secţiune) este determinată uşor şi se foloseşte pentru exprimarea ecuaţiilor Kirchhoff ca în (73). Astfel,

$$[i_1] = [-1\ \ 0\ \ -1\ \ 0\ \ 0]\begin{pmatrix} i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \end{pmatrix} + [0]\,[i_{11}]$$

$$\begin{bmatrix} i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}[i_{11}].$$

$$[i_5] = [0\ \ 0\ \ 0\ \ -1\ \ 0]\begin{bmatrix} i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \end{bmatrix} + [0]\,[i_{11}]$$

$$\begin{bmatrix} v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}[v_1] + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}[v_5]$$

$$[v_{11}] = [0]\,[v_1] + [0\ \ 0\ \ 1]\begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + [0]\,[v_5].$$

Pentru relaţiile pe laturi avem, corespunzător cu (75)

$$\begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}.$$

În acest caz relaţia funcţională este liniară. Într-adevăr, aceasta este uşor de rezolvat pentru $[v_2 \; v_3 \; v_4]'$, în termeni de $[q_2 \; q_3 \; q_4]'$; se obţine,

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

ca şi în cazul particular (79). În mod analog, corespunzător cu (81), avem:

$$[\lambda_{11}] = \left[\frac{1}{10} \text{ th } i_{11}\right],$$

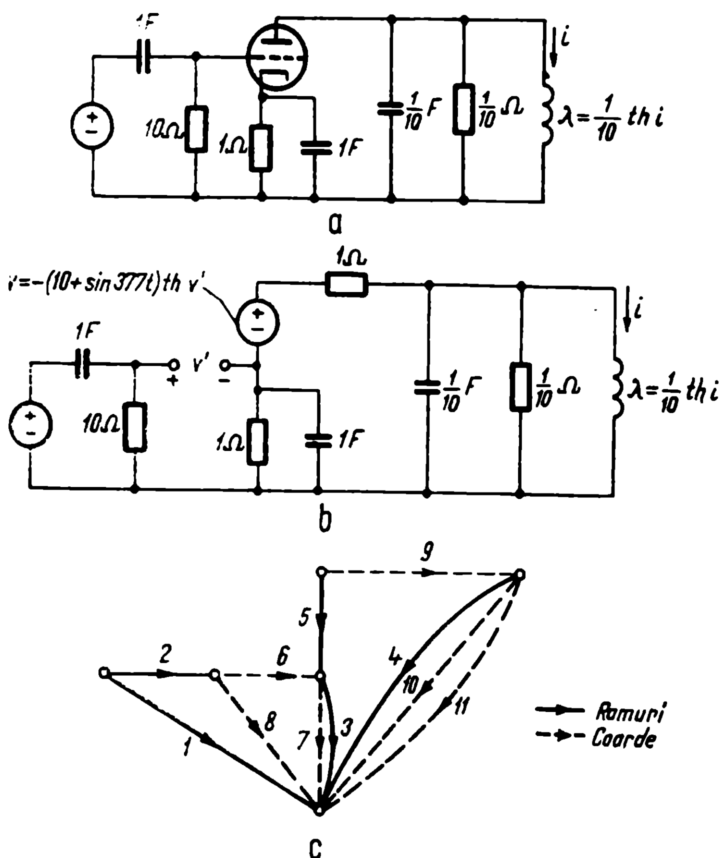


Fig. 10.9. Circuit de amplificator, variabil în timp, neliniar.

de unde

$$[i_{11}] = \operatorname{arth} 10\, \lambda_{11},$$

care este cazul particular în (85).
Corespunzător cu (87), pentru laturile rezistive avem

$$\begin{bmatrix} v_5 - 10 + \sin 377t)\operatorname{th} v_6 \\ i_6 \\ i_7 - v_7 \\ i_8 - v_8 \dfrac{1}{10} \\ i_9 - v_9 \\ i_{10} - 10v_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se substituie rezultatele ecuației Kiechhoff, care dău pe $[v_6\ v_7\ v_8\ v_9\ v_{10}]'$, în funcție de tensiunile pe laturile arborelui; se obține:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -(10+\sin 377t)\operatorname{th}(v_1-v_2-v_3) \\ 0 \\ v_3 \\ \dfrac{1}{10}(v_1 - v_2) \\ v_3 - v_4 + v_5 \\ 10v_4 \end{bmatrix}.$$

După substituirea expresiei anterioare pentru $[v_2\ v_3\ v_4]'$, ecuația devine:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -(10+\sin 377t)\operatorname{th}(v_1-q_2-q_3) \\ 0 \\ q_3 \\ \dfrac{1}{10}v_1 - \dfrac{1}{10}q_2 \\ q_3 - 10a\, q_4 + v_5 \\ 100q_4 \end{bmatrix}.$$

Soluția pentru $[v_5)$ și pentru $[i_6\ i_7\ i_8\ i_9\ \ i_{10}]'$ este evident.

$$[v_5] = [-(10+\sin 277t)\operatorname{th}(v_1-q_2-q_3)]$$

$$\begin{bmatrix} i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_3 \\ \dfrac{1}{10}v_1 - \dfrac{1}{10}q_2 \\ q_3 - 10q_4 - (10+\sin 377t)\operatorname{th}(v_1-q_2-q_3) \\ 100q_4 \end{bmatrix}.$$

Aceste ecuaţii sînt cazurile particulare din (90). Relaţia dinamică asociată la capacităţi şi corespunzătoare la (74) etc:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [i_{11}].$$

Egalitatea a doua rezultă folosind ecuaţia lui Kirchhoff pentru a obţine $[i_2\, i_3\, i_4]'$ în funcţie de curenţii de coarde. Apoi, substituim expresiile stabilite anterior pentru $[i_6\ i_7\ i_8\ i_9\, i_{10}]'$ şi $[i_{11}]$, pentru a obţine;

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} v_1 - \frac{1}{10} q_2 \\ -2q_3 + 10q_4 + (10+\sin 377t)\,\mathrm{th}(v_1 - q_2 - q_3) \\ q_3 - 110q_4 - (10 + \sin 377t)\,\mathrm{th}\,(v_1 - q_2 - q_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mathrm{th}^{-1} 10\lambda_{11} \end{bmatrix},$$

care este corespondentă lui (91*a*) în acest exemplu.

Să trecem acum la bobina de inductanţă. Cazul particular al relaţiei dinamice pentru inductanţă din (80) este:

$$\frac{d}{dt}[\lambda_{11}] = [v_{11}] = [0]\,[v_1] + [0\ \ 0\ \ 1]\begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ {}_4 \end{bmatrix} + [0]\,[v_5].$$

Egalitatea a doua corespunde ecuaţiei lui Kirchhoff pentru $(v_{11}]$. Înlocuind expresia dedusă anterior pentru $[v_2\, v_3\, v_4]'$, se obţine:

$$\frac{d}{dt}[\lambda_{11}] = [10q_4]$$

care este cazul particular din (91*b*).

După combinarea acestor două ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi se obţine ecuaţia de stare:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \lambda_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} v_1 - \frac{1}{10} q_2 \\ -2q_3 + 10q_4 + (10 + \sin 377t)\,\mathrm{th}\,(v_1 - q_2 - q_3) \\ q_3 - 110q_4 - (10 + \sin 377t)\,\mathrm{th}\,(v_1 - q_2 - q_3) - \mathrm{th} 10\lambda_{11} \\ 10q_4 \end{bmatrix}.$$

Cu $\mathbf{x} = [q_2\ q_3\ q_4\ \lambda_{11}]$, şi $\mathbf{e} = [v_1]$, membrul al doilea este o funcţie vectorială $\mathbf{h}$ $(\mathbf{x},\mathbf{e},t)$ a ecuaţiei de stare (95). Nu pare evident că acest membru al doilea este efectiv o funcţie de vectorii

x şi **e**, deoarece evidentă este numai dependenţa faţă de elementele lui **x** şi **e**. De aceea se va arăta că rîndul al doilea din dreapta considerat rînd tip, este o funcţie de **x** şi de **e**. Este evident că

$$[-2q_3 + 10q_4 + (10 + \sin 377t)\,\mathrm{th}(v_1 - q_2 - q_3)]$$

$$= [0 \; -2 \; 10 \; 0] \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \lambda_{11} \end{bmatrix} + (10 + \sin 377t)\,\mathrm{th} \left\{ [v_1] + [-1 \; -1 \; 0 \; 0] \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \lambda_{11} \end{bmatrix} \right\}.$$

Astfel, rîndul al doilea este o funcţie de **x** şi de **e**; în modul acesta s-a găsit al doilea element $\mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{e}, t)$ din vectorul $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, t)$.

Ecuaţia de ieşire

Urmează acum problema de a exprima variabilele de ieşire, în funcţie de variabilele de stare, excitaţia şi derivata excitaţiei. Se va începe cu inductanţele. Variabilele de laturi care ne interesează în primul rînd sînt fluxurile din laturi, adică elementele matricelor λ_{Ll} şi λ_{Lt}; de asemenea sînt şi curenţii de laturi, adică elementele lui $\mathbf{i}_{Ll}$ şi $\mathbf{i}_{Lt}$. După (85) $\mathbf{i}_{Ll}$ este dat în funcţie de $\lambda_{Ll} - Q'_{LL}\lambda_{Lt}$ (parte din **x**) şi de $\mathbf{i}_J$ (parte din **e**). Astfel.

$$\mathbf{i}_{Ll} = \mathbf{g}_{Ll}\,(\lambda_{Ll} - \mathbf{Q}'_{LL}\lambda_{Lt},\, \mathbf{i}_J)$$

Ecuaţia lui Kirchhoff (73 d), combinată cu această expresie a lui $\mathbf{i}_{Ll}$ ne dă

$$\mathbf{i}_{Lt} = -\,\mathbf{Q}_{LL}\,\mathbf{g}_{Ll}\,(\lambda_{Ll} - \mathbf{Q}'_{LL}\lambda_{Lt}),\, \mathbf{i}_J) - \mathbf{Q}_{LJ} i_J.$$

Substituind aceste două expresii pentru $\mathbf{i}_{Ll}$ şi $\mathbf{i}_{Lt}$ în ecuaţiile de laturi, adică

$$\lambda_{Ll} = \mathbf{f}_{Ll}(i\mathbf{i}_{Lt}, \mathbf{i}_{Ll})$$

$$\lambda_{Lt} = \mathbf{f}_{Lt}(\mathbf{i}_{Lt}, \mathbf{i}_{Ll})$$

se obţine λ_{Ll} şi λ_{Lt} ca funcţii de $\lambda_{Lt} - \mathbf{Q}'_{LL}\lambda_{Lt}$ şi $\mathbf{i}_J$.

Variabilele de laturi ce ne interesează în al doilea rînd sînt tensiunile de laturi, elemente din $\mathbf{v}_{Ll}$ şi $\mathbf{v}_{Lt}$. Se recomandă cititorilor, ca un exerciţiu, să demonstreze că $\mathbf{f}_{Lt}\,(\mathbf{i}_{Lt},\mathbf{i}_{Ll})$ trebuie să fie zero — adică să nu existe ramurei inductive — sau că $\mathbf{f}_{Lt}\;(\mathbf{i}_{Lt},\mathbf{i}_{Ll})$ şi $\mathfrak{g}_{Lt}\;(\lambda_{Lt}-\mathbf{Q}'_{LL}\lambda_{Ll},\mathbf{i}_{J})$ trebuie să fie funcţii diferenţiabile, pentru ca să se poată exprima $\mathbf{v}_{Ll}$ şi $\mathbf{v}_{Lt}$ ca funcţii de $\mathbf{x}$, $\mathbf{e}$ şi de $d\mathbf{e}/dt$.

Să considerăm acum capacităţile. Variabilele ce ne interesează în primul rînd sînt sarcinile de laturi, elemente din $\mathbf{q}_{Ct}$ şi $\mathbf{q}_{Cl}$; de asemenea sînt şi tensiunile, elemente din $\mathbf{v}_{Ct}$ şi $\mathbf{v}_{Cl}$; Ecuaţia (79) dă pe $\mathbf{v}_{Ct}$ sub forma:

$$\mathbf{v}_{Ct}=\mathfrak{g}_{Ct}\,(\mathbf{q}_{Ct}+\mathbf{Q}_{CC}\mathbf{q}_{Cl},\;\mathbf{v}_{E}).$$

Combinată cu ecuaţia lui Kirchhoff (73e) se găseşte:

$$\mathbf{v}_{Cl}=\mathbf{Q}'_{CC}\mathfrak{g}_{Ct}(\mathbf{q}_{Ct}+\mathbf{Q}_{CC}\mathbf{q}_{Cl},\mathbf{v}_{E})+\mathbf{Q}'_{EC}\mathbf{v}_{E}.$$

Substituind aceste două ecuaţii de mai sus în ecuaţiile de laturi:

$$\mathbf{q}_{Ct}=\mathbf{f}_{Ct}(\mathbf{v}_{Ct})$$

$$\mathbf{q}_{Cl}=\mathbf{f}_{Cl}(\mathbf{v}_{Cl})$$

se obţin $\mathbf{q}_{Ct}$ şi $\mathbf{q}_{Cl}$ ca funcţii de $\mathbf{q}_{Ct}+\mathbf{Q}_{CC}\mathbf{q}_{Cl}$ şi de $\mathbf{v}_{E}$.

Variabilele de laturi care ne interesează în al doilea rînd sînt curenţii, elemente din $\mathbf{i}_{Ct}$ şi $\mathbf{i}_{Cl}$. Se poate demonstra că $\mathbf{i}_{Ct}$ şi $\mathbf{i}_{Cl}$ sînt funcţii de $\mathbf{x}$, $\mathbf{e}$ şi de $d\mathbf{e}/dt$, dacă $\mathbf{f}_{Cl}(\mathbf{v}_{Cl})$ este identic zero, — adică nu există coarde capacitive, — sau dacă $\mathbf{f}_{Cl}(\mathbf{v}_{Cl})$ şi $\mathfrak{g}_{Ct}(\mathbf{q}_{Ct}+\mathbf{Q}_{CC}\mathbf{q}_{Cl},\mathbf{v}_{E})$ sînt funcţii diferenţiabile.

În sfîrşit, să considerăm componentele rezistive. Elementele din $\mathbf{v}_{Rt}$, $\mathbf{v}_{Rl}$, $\mathbf{i}_{Rt}$ şi $\mathbf{i}_{Rl}$ sînt cele care ne interesează. Ecuaţia (90) ne dă $\mathbf{v}_{Rt}$ şi $\mathbf{i}_{Rl}$ sub forma:

$$\mathbf{v}_{Rt}=\mathfrak{g}_{Rt}(\mathbf{q}_{Ct}+\mathbf{Q}_{CC}\mathbf{q}_{Cl},\,\lambda_{Lt}-\mathbf{Q}'_{LL}\lambda_{Ll},\,\mathbf{v}_{E},\,\mathbf{i}_{J})$$

$$\mathbf{i}_{Rl}=\mathfrak{g}_{Rl}(\mathbf{q}_{Ct}+\mathbf{Q}_{CC}\mathbf{q}_{Cl},\,\lambda_{Lt}-\mathbf{Q}'_{LL}\lambda_{Ll},\,\mathbf{v}_{E},\,\mathbf{i}_{J}).$$

Celelalte variabile rezistive se obţin prin substituirea acestor relaţii, împreună cu expresiile pentru $\mathbf{i}_{Ll}$ şi $\mathbf{v}_{Cl}$, în ecuaţiile lui Kirchhoff, (73*c*) şi (73*f*):

$$\mathbf{i}_{Rt}=-\mathbf{Q}_{RR}\mathbf{i}_{Rl}-\mathbf{Q}_{RL}\mathbf{i}_{Ll}-\mathbf{Q}_{RJ}\mathbf{i}_{J}$$

$$\mathbf{v}_{Rl}=\mathbf{Q}'_{ER}\mathbf{v}_{E}+\mathbf{Q}'_{CR}\mathbf{v}_{Ct}+\mathbf{Q}'_{RR}\mathbf{v}_{Rt}.$$

S-a arătat mai sus cum pot fi exprimate diferitele variabile ale circuitului, în funcţie de $\mathbf{x}$, $\mathbf{e}$ şi $d\mathbf{e}/dt$. Aşadar, dacă $\mathbf{w}$ este un vector a cărui

elemente sînt un set de variabile de răspuns ale circuitului, atunci $\mathbf{w}$ se poate exprima ca

$$\mathbf{w}=\mathbf{h}\left(\mathbf{x},\mathbf{e},\frac{d\mathbf{e}}{dt}\right) \tag{96}$$

sau

$$\mathbf{w}=\mathbf{h}\left(\mathbf{x},\mathbf{e},\frac{d\mathbf{e}}{dt},t\right), \tag{97}$$

unde, în ultimul caz, ieşirea este dependentă explicit de timp.

10.5. SOLUŢIA ECUAŢIEI DE STARE PENTRU CIRCUITE NELINIARE

Odată scrisă o ecuaţie de stare pentru un circuit neliniar, sarcina următoare constă în rezolvarea acestei ecuaţii. Pentru uşurinţă, în ecuaţia $d\mathbf{x}/dt=\mathbf{h}\,(\mathbf{x},\mathbf{e},t)$, vom pune $\mathbf{h}\,(\mathbf{x},\mathbf{e},t)=\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$. Aceasta este corect, deoarece, dacă $\mathbf{e}(t)$ este dat, $\mathbf{h}[\mathbf{x},\mathbf{e}(t),t]$ este o funcţie explicită numai de $\mathbf{x}$ şi de t. Astfel, ecuaţia diferenţială vectorială, care va sta în centrul atenţiei în acest paragraf, este.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}\,(\mathbf{x},t). \tag{98}$$

Nu există vreo cale cunoscută, prin care să se poată obţine soluţia unei ecuaţii diferenţiale neliniare oarecare. În fapt, se cunosc soluţii analitice în formă compactă numai pentru cîteva clase restrînse din astfel de ecuaţii. De aceea, eforturile desfăşurate pentru studiul acestui gen de ecuaţii sînt concentrate asupra condiţiilor de existenţă şi de unicitate a unei soluţii, asupra proprietăţilor soluţiei şi a aproximării ei. Ne vom opri puţin asupra primelor două; a treia este în afara preocupărilor din această carte [1].

Existenţă şi unicitate

Cercetarea condiţiilor în care (98) poate avea o soluţie, sau o soluţie unică, este o sarcină foarte importantă; aceasta, din cauză că, între alte motive, numai dacă se ştie că există o soluţie, eventual o soluţie unică, are

[1] Aproape orice text de analiză neliniară poate oferi o informaţie considerabilă în acest subiect; de exemplu, Nicolas Minorsky, *Nonlinear Oscillations*, D. Van Nostrand Co. Princeton N. J., 1962.

sens să se caute o soluție aproximativă. Mai mult încă, existența sau unicitatea, dacă există, nu înseamnă că este sigură. S-a văzut aceasta, pentru circuite variabile în timp, prin exemplul din paragraful 10.3.

Ca un exemplu suplimentar, în acest caz numai pentru neunicitate, să considerăm circuitul din fig. 10.10.

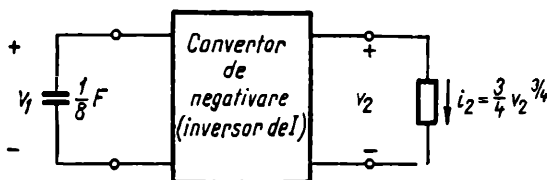


Fig. 10.10. Circuit neliniar cu răspuns neunic.

Se poate verifica ușor că ecuația de stare este

$$\frac{dq_1}{dt} = 3\, q_1^{2/3}.$$

Se presupune că $q_1(t_0)=0$. Atunci, este ușor de arătat că

$$q_1(t)=0 \qquad (t_0 \leqslant t < \alpha)$$

$$=(t-\alpha)^3 \qquad (\alpha \leqslant t)$$

este o soluție pentru orice $\alpha \geqslant t_0$. De aceea acest circuit nu are o soluție unică dacă $q_1(t_0)=0$.

Condițiile pentru ca să existe o soluție cînd $t \geqslant t_0$, — intervalul de timp care ne interesează— , se stabilesc de obicei în două etape. Mai întîi, dacă $t_1 \geqslant t_0$, se stabilesc condițiile care determină existența unei soluții într-un interval $t_2 > t \geqslant t_1$, unde t_2 este determinat de proprietățile funcției $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ în intervalul $t_2 > t \geqslant t_1$. Apoi, se stabilesc condițiile prin care o soluție poate fi extinsă, de la un interval de timp, la următorul, pînă ce se asigură soluția pentru orice $t \geqslant t_0$.

O soluție a ecuației (98) *în sens obișnuit*, necesită ca $\mathbf{x}$ să satisfacă ecuația diferențială pentru orice $t \geqslant t_0$ finit. Este adeseori posibil să se găsească o funcție care să satisfacă (98) pentru aproape orice t, deși $d\mathbf{x}/dt$ nu există, pentru anumite valori discrete a lui t. Pentru a admite acest tip de funcție drept o soluție, se va considera ecuația integrală

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_1) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}\,[\mathbf{x}(\tau),\ \tau]\, d\tau \qquad (99)$$

asociată cu (98). Vom numi orice soluţie a lui (99), o soluţie a lui (98) *în sens larg*. Se poate vedea că (99) poate avea o soluţie entru $t \geqslant t_0$ şi totuşi (98) să nu aibe o soluţie în sens obişnuit pentru $t \geqslant t_0$.

În ceea ce priveşte existenţa, se enunţă următoarea teoremă, fără demonstraţie : [1].

Teorema 12. *Fiind dat orice* $t_1 \geqslant t_0$ *şi* $\mathbf{x}(t_1)$, *ecuaţia diferenţială* (98) *posedă cel puţin o soluţie continuă în sens larg, pentru* $t_2 > t \geqslant t_1$, *egală cu* $\mathbf{x}(t_1)$ *în momentul* t_1, *dacă* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ *este continuă în* $\mathbf{x}$, *pentru* $t \geqslant t_0$ *fix, şi integrabilă local în* t, *pentru* $t \geqslant t_0$ *şi* $\mathbf{x}$ *fix, şi dacă* $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\|$ *este mărginită în orice vecinătate mărginită a originei* 0, *de o funcţie de* t, *integrabilă local, pentru* $t \geqslant t_0$.

Condiţiile acestei teoreme sînt mai largi decît este necesar pentru stabilirea existenţei unei soluţii, cînd $t_2 > t \geqslant t_1$; totuşi, ele sînt potrivite pentru enunţul teoremei următoare, asupra extinderii soluţiei în întreg domeniul semidreptei $t \geqslant t_0$.

Teorema 13. *Presupunînd condiţiile Teoremei 12 asupra existenţei satisfăcute, atunci orice soluţie a lui* (98), *în sens larg, egală cu* $x(t_0)$ *la timpul* t_0, *poate fi extinsă, pentru a da o soluţie definită penru orice* $t \geqslant t_0$, *dacă* $\|f(x, t)\|_1 \leqslant \alpha(t)\Phi(\|x\|_1)$, *cînd* $t > t_0$, *unde* $\alpha(t)$ *este nenegativă şi local integrabilă şi unde* $\Phi(v)$ *este pozitivă şi continuă, cînd* $v > 0$ *şi satisface*

$$\lim_{u \to \infty} \int_{u_0}^{u} \frac{dv}{\Phi(v)} = + \infty \tag{100}$$

pentru o valoare $\mu_0 > 0$:

Mai există şi alte teoreme de extindere [2] şi pot fi mai utile în anumite situaţii date. Una din aceste alte teoreme, extrem de simplă, este dată în problema pusă ca o teoremă ce trebuie demonstrată.

Înainte de a continua, să arătăm, cu ce restricţii suplimentare soluţia în sens larg poate deveni o soluţie în sens obişnuit. Aplicînd definiţia unei derivate aplicate ecuaţiei integrale (99), se obţine :

$$\frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} \mathbf{f}[\mathbf{x}(\tau), \tau]\, d\tau.$$

Soluţia în sens larg este continuă. De aceea, dacă $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ este continuă în t, fiind continuă şi în $\mathbf{x}$, atunci $\mathbf{f}[\mathbf{x}(\tau), \tau]$ va fi o funcţie continuă de τ.

---

[1] Vezi nota de la subsol la pag. 731

[2] Ca referinţă iniţială, vezi G. Sansone şi R. Conte, *Non-Linear Differential Eqautions*, The Macmillan, Co, New York, 1964.

Apoi, se poate folosi teorema primei valori medii a calculului integral şi, în consecinţă, relaţia de mai sus dă

$$\frac{\mathbf{x}(t+\Delta t)-\mathbf{x}(t)}{\Delta t}=\mathbf{f}[\mathbf{x}(\theta),\ \theta]$$

pentru $t \leqslant \theta \leqslant t$, dacă $\Delta t > 0$, sau $t+\Delta t \leqslant \theta \leqslant t$, dacă $\Delta t < 0$. Deoarece $\mathbf{f}[x(\theta),\theta]$ este o funcţie continuă de θ, limita membrului întîi a ecuaţiei, cînd Δt tinde spre zero, există şi este egală cu $\mathbf{f}[x(t),t]$. Astfel

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\ t)$$

deoarece $\lim\limits_{\Delta t \to 0}[\mathbf{x}(t+\Delta t)-\mathbf{x}(t)]/\Delta t = d\mathbf{x}/dt$. Prin urmare, cînd $f(\mathbf{x},\ t)$ este continuă în t, ca şi în $\mathbf{x}$, soluţia ecuaţiei integrale este diferenţiabilă şi astfel satisface ecuaţia diferenţială.

Acum, că se cunoaşte în ce condiţii există o soluţie continuă pe semidreapta $(t \geqslant t_0)$, este interesant de aflat ce restricţii suplimentare sînt necesare pentru a garanta o soluţie unică. Prin aceasta ajungem la teorema următoare [1].

Teorema 14. *Presupunem satisfăcute condiţiile Teoremelor 12 şi 13, privind existenţa; atunci* (98) *posedă o soluţie continuă în sens larg, pentru* $t \geqslant t_0$, *care este unică dacă*

$$||\mathbf{f}(\mathbf{x}_1,\ t)-\mathbf{f}(\mathbf{x}_2,\ t)|| \leqslant \gamma(t)||\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2||.$$

pentru $t \geqslant t_0$ *şi pentru toţi* $\mathbf{x}_1$ *şi* $\mathbf{x}_2$ *din vecinătatea oricărui punct, unde* $\gamma(t)$ *este o funcţie local integrabilă, nenegativă.*

Condiţia adăugată $||\mathbf{f}(\mathbf{x}_1,\ t)-\mathbf{f}(\mathbf{x}_2,\ t)|| \leqslant \gamma(t)\ ||\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2||$ pentru $t > t_0$ şi orice $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, care este necesară să asigure unicitatea, se numeşte *condiţia Lipschitz.*

Făcînd acum o pauză, vom reexamina exemplul din fig. 10.10, în lumina acestor teoreme şi comentarii. Mărimea scalară q_1 stabileşte starea circuitului. Pentru compatibilitatea notaţiei cu teoremele, vom înlocui notaţia q_1 prin x. Atunci $f(x, t)$ este funcţia scalară $3x^{2/3}$. Prin teorema de existenţă, rezultă că există o soluţie $\mathbf{x}(t)$, începînd de la $x=0$ la $t=0$, pentru un interval oarecare pozitiv, deoarece $3x^{2/3}$ este continuă în x şi mărginită în orice vecinătate mărginită a originei; de exemplu, dacă pentru orice x dintr-o vecinătate a originei avem $|x| \leqslant \rho$, atunci $|3x^{2/3}| \leqslant 3\rho^{2/3} < \infty$ Prin teorema de existenţă, o soluţie poate fi extinsă pe întreaga semi-

[1] Vezi nota din subsol de la pag. 731

dreaptă $t \geqslant t_0$, dacă $|3x^{2/3}| \leqslant \Phi(|x|)$ pentru vreo funcție $\Phi(v)$ continuă, avînd proprietatea (100). Condiția este satisfăcută luînd $\Phi(v) = 3v^{2/3}$. Prin teorema de unicitate, soluția va fi unică dacă $3x^{2/3}$ satisface condiția Lipschitz; adică, dacă $|3x_1^{2/3} - 3x_2^{2/3}| \leqslant \gamma\, |x_1 - x_2|$ pentru orice x_1 și x_2 într-o vecinătate a oricărui punct și pentru un γ finit. Această condiție *nu* este satisfăcută. Luînd $x_2 = 0$, pentru orice γ finit, inegalitatea este violată dacă se ia $|x_1|$ suficient de mic. Aplicația acestor teoreme dă rezultate conforme cu cunoașterea noastră anterioară a soluției, cum este dată în exemplu.

Nu este totdeauna o sarcină ușoară să se verifice că funcția vectorială $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ satisface condiția Lipschitz. De aceea este bine să se știe că, dacă derivatele parțiale $\partial f_i(\mathbf{x}, t)/dx_i$ există și sînt continue în $\mathbf{x}$ pentru aproape toți $t \geqslant t_0$, fiind și mărginite ca modul în vreo vecinătate a oricărui punct, prin funcții local integrabile ne-negative de variabile $t \geqslant t_0$, atunci condiția Lipschitz este satisfăcută. Nu se va da demonstrația acestei afirmații, dar este recomandabil să fie efectuată, ca o problemă.

Exemplu. Ca o ilustrație a acestui mijloc de a arăta îndeplinirea condiției Lipschitz, să considerăm circuitul din fig. 10.11 pentru $t \leqslant -1$. Educația de stare este:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_2 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{t^{1/3}}\, q_2 - \lambda_5 \\ q_2 - \lambda_5 - 4\, th\, \lambda_5 - 3\, t\, \varepsilon^{-2t} \end{bmatrix}.$$

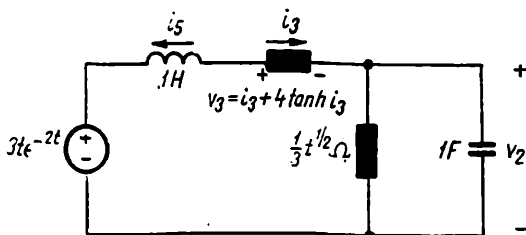


Fig. 10.11. Circuit variabil în timp neliniar.

Trebuie arătat că toate condițiile teoremelor de existență și de extensiune sînt satisfăcute. Apoi, să ne întoarcem atenția spre condiția Lipschitz. Vom pune $q_2 = x_1$ și $\lambda_5 = x_2$; atunci

$$f(x, t) = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{t^{1/3}}\, x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 - 4\, \text{th}\, x_2 - 3\, t\, \varepsilon^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Derivatele parțiale ale lui $f_i(\mathbf{x}, t)$ în raport cu x_j sînt

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\frac{3}{t^{1/3}}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1 - 4\, \text{sch}^2\, x_2.$$

Evident că derivatele există şi sînt continue în x_1 şi în x_2 pentru aproape orice t; $\partial f_1/\partial x_1$ nu există pentru $t = 0$.

Mai departe, $|\partial f_1/\partial x_1| \leqslant 3\,|t|^{-1/3}$, $|\partial f_1/\partial x_2| \leqslant 1$, $|\partial f_2/\partial x_1| \leqslant 1$ şi $|\partial f_2/\partial x_2| \leqslant 5$; de aceea, pentru orice x şi deci în vreo vecinătate a oricărui x, derivatele sînt mărginite prin funcţii de t, local integrabile, nenegative, pentru $t \geqslant -1$. Astfel, condiţia Lipschitz este satisfăcută şi, prin teorema de unicitate, soluţia va fi unică.

De fapt, se poate arăta, ceea ce e uşor de demonstrat, că relaţia următoare este valabilă (folosind norma vectorului de sumă de modùle).

$$\|\mathbf{f}(x_1, t) - \mathbf{f}(x_2, t)\|_1 \leqslant \max\{3|t|^{-1/3} + 1{,}6\}\ \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_1$$

$$\leqslant (3|t|^{-1/3} + 6)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_1.$$

Acelaşi rezultat s-ar fi obţinut şi dacă s-ar fi folosit norma vectorului de maximum modùl

Proprietăţile soluţiei

Pentru cazul circuitelor variabile în timp, am descoperit diferite proprietăţi ale soluţiei, raportînd ecuaţia de stare la o ecuaţie omogenă de referinţă. Pe aceeaşi cale vom obţine răspunsuri şi în cazul circuitelor neliniare.

Să presupunem că membrul doi al ecuaţiei neliniare

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

este închis, într-un sens ce urmează a fi definit în teoremele următoare, în membrul doi al ecuaţiei:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}.$$

Apoi, am putea anticipa că, dacă toate soluţiile ultimei ecuaţii sînt mărginite în apropiere de zero, cînd $t \to \infty$, soluţiile ecuaţiei precedente se vor comporta la fel. Această deducţie este valabilă dacă $\mathbf{A}(t)$ este o matrice constantă sau periodică. Se recomandă să se demonstreze de cititor că nu poate exista teoremă similară pentru cazul cînd $\mathbf{A}(t)$ este o matrice oarecare, variabilă în timp.

Pentru circuite care arată că pot fi descrise printr-o ecuaţie diferenţială omogenă, invariantă în timp, (anume $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$), se va prezenta mai jos o serie de teoreme folositoare. Prima teoremă determină condiţiile pentru răspuns mărginit.

Teorema 15. *Să presupunem că toate soluţiile ecuaţiei de referinţă*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}, \tag{101}$$

unde **A** *este o matrice constantă, sînt mărginite cînd t tinde spre infinit. Mai departe, să presupunem că* $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)=\mathbf{A}\mathbf{x}+\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x},t)+\mathbf{g}(t)$. *Atunci soluţiile ecuaţiei*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x},t),$$

– cu un vector iniţial $\mathbf{x}(t_0)$ *astfel ca* $||\mathbf{x}(t_0)||\leqslant\delta$, *unde* δ *este o constantă ce depinde de* $f(\mathbf{x},t)$, *– sînt mărginite cînd t tinde spre infinit, dacă*

$$||\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x},t)||\leqslant\beta(t)||\mathbf{x}|| \text{ pentru } ||\mathbf{x}||\leqslant\zeta \tag{102a}$$

$$\int_{t_0}^{\infty}\beta(t)\,dt<\infty \tag{102b}$$

$$\int_{t_0}^{\infty}||\mathbf{g}(t)||dt\leqslant\gamma\delta. \tag{102c}$$

unde γ *este o constantă pozitivă aleasă în mod convenabil.*

Pentru demonstraţie se foloseşte lema lui Gronwall,
Ecuaţia de stare

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x},t) + \mathbf{g}(t),$$

este echivalentă cu ecuaţia integrală

$$\mathbf{x}(t)=\varepsilon^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\varepsilon^{\mathbf{A}(t-\tau)}\{\mathbf{f}[\mathbf{x}(\tau),\tau]+\mathbf{g}(\tau)\}d\tau,$$

unde $e^{\mathbf{A}(t-\tau)}$ este matricea de tranziţie asociată cu (101). Luînd norma in ambii membri ai acestei ecuaţii şi aplicînd inegalităţile obişnuite de norme, se găseşte că,

$$||\mathbf{x}(t)||\leqslant||\varepsilon^{\mathbf{A}(t-t_0)}||\,||\mathbf{x}(t_0)||+\int_{t_0}^{t}||\varepsilon^{\mathbf{A}(t-\tau)}||\{||\mathbf{f}[\mathbf{x}(\tau),\tau]||+||\mathbf{g}(\tau)||\}d\tau.$$

Cum toate soluţiile lui (101) sînt mărginite, există o constantă pozitivă α astfel ca $||\varepsilon^{\mathbf{A}(t-\tau)}||\leqslant\alpha$, pentru $t_0\leqslant\tau\leqslant t$ şi pentru orice $t\geqslant t_0$. Folosind această limită, pe cea din (102*a*) şi $||\mathbf{x}(t_0)||\leqslant\delta$, se obţine

$$||\mathbf{x}(t)||\leqslant\alpha\delta+\int_{t_0}^{t}\alpha[\beta(\tau)||\mathbf{x}(\tau)||+||\mathbf{g}(\tau)||\,d\tau$$

cu condiţia ca $\|\mathbf{x}(\tau)\| \leqslant \delta$ pentru $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$. Lema lui Gronwall poate fi aplicată acestei relaţii, punînd $\varphi(t) = \|\mathbf{x}(t)\|$, $\psi(t) = \alpha\beta(t)$ şi $\theta(t) + = \alpha \|g(t)\|$. Rezultă inegalităţile,

$$\|\mathbf{x}(t) \leqslant \alpha\delta \exp\left\{\int_{t_0}^{t} [\alpha\beta(\tau) + \|\mathbf{g}(\tau)\|/\delta] d\tau\right\}$$

$$\leqslant \alpha\delta \exp\left[\int_{t_0}^{\infty} \alpha\beta(\tau) d\tau + \gamma\right].$$

A doua inegalitate, — obţinută prin lăsarea lui t să se apropie de infinit şi invocînd apoi condiţia (102*c*), — ne arată că $\|\mathbf{x}(t)\|$ este mărginită cînd t tinde spre infinit, deoarece $\int_{t_0}^{\infty} \alpha\beta(\tau)\, d\tau$ este mărginită, în virtutea lui (102*b*).

Ne mai arată, mai departe, că $\|\mathbf{x}(t)\|$ este uniform mărginită pentru orice t. Prin urmare, vom avea $\|\mathbf{x}(t)\| \leqslant \zeta$, pentru $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ şi orice $t \geqslant t_0$, după cum se impune pentru satisfacerea unei condiţii anterioare, dacă

$$\delta \leqslant (\xi/\alpha) \exp.\left[-\int_{t_0}^{\infty} \alpha\beta(\tau)\, d\tau - \gamma\right].$$

Astfel, spre deosebire de cazul circuitelor liniare variabile în timp, considerate anterior, mărginirea depinde de starea iniţială; adică, $\|\mathbf{x}(t_0)\|$ trebuie să fie suficient de mică. Mai mult, funcţia $\mathbf{g}(t)$ are restricţiia arătată în (102*c*).
(*Notă*: concluzia teoremei devine valabilă pentru toate stările iniţiale, numai dacă $\zeta = +\infty$.)

După cum se arată în teorema următoare, concluziile teoremei precedente pot fi făcute mai severe, dacă toate soluţiile lui (101) se apropie de zero cînd t tinde spre infinit.

Teorema 16. *Se presupune că toate soluţiile ecuaţiei de referinţă* (101), *în care* $\mathbf{A}$ *este o matrice constantă, se apropie de zero cînd t tinde spre infinit. Mai departe, se presupune că* $\mathbf{f}(\mathbf{x},t) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{x} + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x},t) + \mathbf{g}(t)$. *Atunci toate soluţiile ecuaţiei neliniare* (98), — *cu vectorul iniţial* $\mathbf{x}(t_0)$, *astfel ca* $\|\mathbf{x}(t_0)\| \leqslant \delta$, *unde* δ *este o constantă ce depinde de* $\mathbf{f}(x,t)$, — *se apropie de zero cînd t tinde spre infinit, dacă:*

$$\int_{t_0}^{\infty} \|\mathbf{B}(t)\| dt < \infty \tag{103a}$$

$$\varepsilon^{\beta(t-t_0)} \|\mathbf{g}(t)\| \leqslant \gamma\delta \tag{103b}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0} \frac{\|\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x},t)\|}{\|\mathbf{x}\|} \to 0 \text{ for } t \geqslant t_0, \tag{103c}$$

unde β *şi* γ *sînt constante pozitive alese în mod corespunzător.*

Demonstraţia acestei teoreme este puţin diferită de demonstraţiile precedente. Ecuaţia integrală echivalentă cu (98) este:

$$\mathbf{x}(t) + = \varepsilon^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varepsilon^{\mathbf{A}(t-\tau)}\{\mathbf{B}(\tau)\mathbf{x}(\tau) + \hat{\mathbf{f}}[\mathbf{x}(\tau),\tau] + \mathbf{g}(\tau)\}d\tau.$$

Luînd norma în ambii membri şi aplicînd inegalităţile de norme obişnuite, se obţine:

$$||\mathbf{x}(t)|| \leqslant ||\varepsilon^{\mathbf{A}(t-t_0)}||\,||\mathbf{x}(t_0)|| + \int_{t_0}^{t} ||\varepsilon^{\mathbf{A}(t-\tau)}||\{||\mathbf{B}(\tau)||\,||\mathbf{x}(\tau)||$$

$$+ ||\hat{\mathbf{f}}[\mathbf{x}(\tau),\tau]|| + ||\mathbf{g}(\tau)||\}d\tau.$$

Cum toate soluţiile lui (101) se apropie de zero cînd t tinde spre infinit, există nişte constante pozitive α şi υ, astfel ca

$$||\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x},t)|| \leqslant \left(\frac{\upsilon}{2\alpha}\right) ||\mathbf{x}|| \text{ pentru } t \geqslant t_0 \text{ dacă } ||\mathbf{x}|| \leqslant \zeta.$$

Folosind aceste limite şi $||(t_0)||\mathbf{x} \leqslant \gamma$, se găseşte

$$||\mathbf{x}(t)|| \leqslant \alpha\delta\varepsilon^{-\upsilon(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} \alpha\varepsilon^{-\upsilon(t-\tau)}\left\{\left[||\mathbf{B}(\tau)|| + \left(\frac{\upsilon}{2\alpha}\right)\right] ||\mathbf{x}(\tau)|| + ||\mathbf{g}(\tau)||\right\}d\tau,$$

sau, echivalent,

$$||\mathbf{x}(t)||\varepsilon^{\upsilon t} \leqslant \alpha\varepsilon^{\upsilon t_0}\delta + \int_{t_0}^{t}\left\{\left[\alpha||\mathbf{B}(\tau)|| + \left(\frac{\upsilon}{2}\right)\right]||\mathbf{x}(\tau)||\varepsilon^{\upsilon t} + \alpha\varepsilon^{\upsilon t}||\mathbf{g}(\tau)||\right\}d\tau,$$

cu condiţia

$$||\mathbf{x}(\tau)|| \leqslant \zeta \text{ pentru } t_0 \leqslant \tau \leqslant t.$$

Lema lui Gronwall este aplicabilă, cu $\varphi(t) = ||\mathbf{x}(t)||\varepsilon^{\upsilon t}$, $\psi(t) = \alpha||\mathbf{B}(t)|| + \frac{\upsilon}{2}$, $\theta + \alpha\varepsilon^{\upsilon t}||\mathbf{g}(t)||$. Rezultatul este:

$$||\mathbf{x})t)||\varepsilon^{\upsilon t} \leqslant \alpha\delta\varepsilon^{\upsilon t_0} \exp\left[\int_{t_0}^{t} \alpha||\mathbf{B}(\tau)||\,d\tau\right] \varepsilon^{\upsilon(t-t_0)/2} \exp\left\{\frac{\int_{t_0}^{t} \alpha||\mathbf{g}(\tau)||\varepsilon^{\upsilon t}\,d\tau}{\alpha\delta\varepsilon^{\upsilon t_0}}\right\}$$

$$\leqslant \alpha\delta\varepsilon^{\upsilon t_0} \exp\left[\int_{\infty}^{t_0} \alpha||\mathbf{B}(\tau)||\,d\tau\right] \varepsilon^{\upsilon(t-t_0)/2}\, \varepsilon^{\upsilon(t-t_0)}$$

A doua inegalitate rezultă din prima, punînd pe t să se apropie de infinit în prima integrală şi folosind (103b), cu $\beta = \nu$ în integrala a doua. Multiplicînd cu $\varepsilon^{-\nu t}$ se obţine

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leqslant \alpha\delta \exp\left[\int_{t_0}^{\infty} \alpha \|\mathbf{B}(\tau)\| d\tau\right] \exp\left[-\left(\frac{\nu}{2} - \gamma\right)(t - t_0)\right].$$

Acum se pune $\gamma < \nu/2$; atunci $\|\mathbf{x}(t)\|$ este mărginită uniform, în virtutea lui (103a) şi este mai mică decît

$$\alpha\delta \exp\left[\int_{t_0}^{\infty} \alpha \|\mathbf{B}(\tau)\| d\tau\right],$$

pentru orice $t \geqslant t_0$. Prin urmare, spre a satisface condiţia că $\|\mathbf{x}(\tau)\| \leqslant \zeta$ pentru $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ şi orice $t \geqslant t_0$, este necesar doar să se aleagă δ, astfel ca

$$\delta \leqslant \left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) \exp\left[-\int_{t_0}^{\infty} \alpha \|\mathbf{B}(\tau)\| d\tau\right].$$

Mai departe, cu referire la limitarea lui $\|\mathbf{x}(t)\|$, se vede că $\mathbf{x}(t)$ trebuie să se apropie de zero cînd t tinde spre infinit, deoarece $\|\mathbf{x}(t)\|$ este mărginită de către o exponenţială scăzătoare.

Mai sînt posibile şi alte teoreme. Cele două precedente stabilesc tipul şi condiţiile care sînt necesare de obicei pentru demonstraţie. Se poate vedea că este relativ uşor să se varieze aceste condiţii şi să se obţină totuşi o demonstraţie valabilă. De exemplu, în ultima teoremă, condiţia (103c) poate fi înlocuită prin condiţia $\|\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x},t)\| \leqslant \mu\|\mathbf{x}\|$, pentru $\|\mathbf{x}\| \leqslant \zeta$ şi μ suficient de mic. Această variaţie (modificare) este destul de importantă, deoarece ea permite ca un termen liniar mic să fie o parte din $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)$.

În cele două teoreme date mai sus, dacă se înlocuieşte $\mathbf{A}$ prin $\mathbf{A}(t)$, unde $\mathbf{A}(t)$ este periodică, se obţine de asemenea teoreme valabile. Demonstraţiile diferă numai puţin de cele date anterior. Se recomandă să se determine ce schimbări sînt necesare.

Exemplu. Ca o ilustrare a teoremei a doua, să considerăm circuitul din fig. 10.12, pentru $t \geqslant 0$. Cu $q_2 = x_1$ şi $\lambda_5 = x_2$, ecuaţia de stare este:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2\varepsilon^{-3t}}{t^{1/2}} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 - \operatorname{th} x_2 \end{bmatrix}.$$

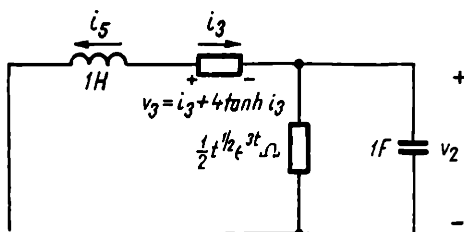


Fig. 10.12. Circuit variabil în timp neliniar, fără excitaţie.

În primul rînd trebuie exprimată această ecuaţie într-o formă care să permită aplicarea teoremei. Astfel,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dfrac{2\varepsilon^{-3t}}{t^{1/2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4x_2 - 4\,\mathrm{th}\, x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{x} + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x},t).$$

Polinomul caracteristic a lui $\mathbf{A}$ este $d(s) = s^2 + 5s + 1$. Valorile proprii sînt evidente reale şi negative, (dacă ecuaţia caracteristică ar fi fost de un grad mai mare, atunci s-ar fi putut folosi criteriul lui Routh sau alt criteriu similar, pentru a se vedea dacă toare rădăcinile au sau nu partea reală negativă). Astfel, toate soluţiile lui (101) se apropie de zero cînd $t \to \infty$. Aplicînd norma vectorului de suma modùlelor, se obţine

$$\|\mathbf{B}(t)\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} -\dfrac{2\varepsilon^{-3t}}{t^{1/2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_1 = \frac{2\varepsilon^{-3t}}{|t^{1/2}|}$$

şi

$$\int_0^\infty \|\mathbf{B}(t)\|_1 \, dt = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}}.$$

Astfel, condiţia (103a) este satisfăcută. Condiţia (103b) corespunde, deoarece $\mathbf{g}(t) \equiv 0$. Să considerăm acum

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4x_2 - 4\mathrm{th}x_2 \end{bmatrix}.$$

Vom avea

$$\frac{\|\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x},t)\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1} = \frac{4|x_2 - \mathrm{th}x_2|}{|x_1| + |x_2|} \leqslant 4\,\frac{|x_2 - \mathrm{th}x_2|}{|x_2|}.$$

Inegalitatea rezultă din faptul că $|x_2| \leqslant |x_1| + |x_2|$. Deoarece $||\mathbf{x}||_1$ şi deci $|x_2|$ se apropie de zero, $4|x_2 - \text{th}x_2|/|x_2|$ şi deci $||\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)||_1/||\mathbf{x}||_1$ se apropie de zero. Aceasta rezultă din faptul că

$$\frac{|x_2 - \text{th}x_2|}{|x_2|} = \frac{\left|\frac{1}{3} x_2^3 - \frac{2}{12} x_2^5 + \frac{17}{315} x_2^7 - \ldots\right|}{|x_2|}$$

$$= \left|\frac{1}{3} x_2^2 - \frac{2}{12} x_2^4 + \frac{17}{315} x_2^6 - \ldots\right| \to 0 \text{ cînd } |x_2| \to 0.$$

Astfel condiţia (103c) este satisfăcută.

Toate condiţiile teoremei sînt satisfăcute; prin urmare, prin teorema 16, toate soluţiile se apropie de zero cînd $t \to \infty$, pentru $||\mathbf{x}(0)||_1 < \delta$. Valoarea lui δ nu este cunoscută, dar cunoaştem că ea există. Se recomandă determinarea acestei valori a lui δ.

Alocarea termenilor lui $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x},t)$, la $\mathbf{A}\mathbf{x}$ şi la $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x},t)$ nu este unică. De fapt orice termen liniar poate fi alocat lui $\mathbf{A}\mathbf{x}$, dacă valoarea sa negativă este alocată lui $\hat{\mathbf{f}}$. Această flexibilitate poate fi utilizată pentru a ajuta să fie satisfăcută condiţia (103c). Acesta este de fapt motivul pentru care s-a exprimat, în exemplul dat, termenul $-x_2$, sub forma $-5x_2 + 4x_2$.

10.6. SOLUŢIA NUMERICĂ

Situaţii în care se cer soluţii numerice ale ecuaţiei de stare sînt:

— cînd nu se poate determina soluţia analitică exactă;

— cînd o soluţie analitică aproximativă poate fi determinată cu suficientă precizie, numai printr-o cantitate de muncă prea mare;

— cînd se caută o familie de soluţii numai pentru un număr limitat de variaţii ale valorii parametrilor. În acest paragraf ne vom îndrepta atenţia spre soluţionarea numerică a ecuaţiei de stare, exprimată în forma:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \tag{104}$$

Vom începe prin a prezenta cîteva metode elementare de soluţie numerică a ecuaţiei (104) şi apoi vom enunţa, fără demonstraţie, o metodă avansată.

Formula de diferenţe inverse a lui Newton

Multe metode de soluţionare numerică a ecuaţiei de stare se pot stabili relativ uşor, dacă se porneşte de la o expresie a valorii funcţiei într-un moment oarecare, în funcţie de valorile ei în momentele anterioare. De aceea vom trata mai întîi acest subiect.

Pentru a stabili o bază, în termeni familiari, pentru formula ce va fi analizată, să considerăm funcţia vectorială $\mathbf{y}(t)$ exprimată ca o serie trunchiată de puteri, cu un rest; adică

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_i) + \mathbf{y}^{(1)}(t_i)(t - t_i) + \frac{1}{2!}\mathbf{y}^{2}(t_i)(t - t_i)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{j!}\mathbf{y}^{(j)}(t_i)(t - t_i)^j + \mathbf{r}(t), \tag{105}$$

unde $\mathbf{y}^{(k)}(t_i) = d^k \mathbf{y}(t)/dt^k|_{t=t_i}$. Adeseori $\mathbf{y}(t)$ poate fi aproximată printr-un polinom obţinut prin neglijarea restului $\mathbf{r}(t)$. De fapt, dacă $\mathbf{y}(t)$ este un polinom de grad cel mult j, atunci această aproximaţie nu este eronată. Greşeala majoră ce s-ar face folosind (105) constă în faptul că ea cere cunoaşterea derivatelor lui $\mathbf{y}(t)$, ceea ce nu este totdeauna posibil.

Pentru a se evita problema de evaluare a derivatelor lui $\mathbf{y}(t)$, vom căuta o reprezentare diferită, dar echivalentă a lui $\mathbf{y}(t)$. Fie $t_{i-1}, t_{i-2} \dots t_{i-j}$ un set de j valori distincte de timp. Dacă înlocuim fiecare din aceste valori în (105), se obţin j ecuaţii, avînd ca necunoscute derivatele. Acestea se pot rezolva pentru $\mathbf{y}^{(k)}(t_i)$ în termeni de $\mathbf{y}(t_i)$, $\mathbf{y}(t_{i-k})$, şi de rest $\mathbf{r}(t_{i-l})$, unde $k=1,\dots,j$. Dacă se introduc aceste soluţii pentru $\mathbf{y}\ (t)$ în (105), expresia rezultată pentru $\mathbf{y}(t)$ se poate pune în forma următoare :

$$\mathbf{y}(t) = a_0(t)\mathbf{y}(t_i) + a_1(t)\mathbf{y}(t_{i-1}) + a_2(t)\mathbf{y}(t_{i-2}) + \dots$$

$$\dots + a_j(t)\mathbf{y}(t_{i-j}) + \hat{\mathbf{r}}(t), \tag{106}$$

unde $\hat{\mathbf{r}}(t)$ este un rest, bineînţeles diferit de $\mathbf{r}(t)$; $a_k(t)$ sînt polinoame în t, de grad cel mult j. Neglijînd pe $\hat{\mathbf{r}}(t)$, se obţine un polinom care aproximează pe $\mathbf{y}(t)$.

Coeficienţii $a_l(t)$ nu sînt uşor de evaluat, după cum ar fi de dorit. Totuşi ,dacă se rearanjează termenii în (106), astfel ca $\mathbf{y}(t)$ să fie exprimată în funcţie de sume şi diferenţe între diferite valori $\mathbf{y}(t_{i-l})$, atunci noii coeficienţi se evaluează uşor. Aceasta se va înţelege uşor prin cele ce urmează.

Să definim mai întîi un set de funcţii, care sînt sume şi diferenţe ale valorilor lui $\mathbf{y}(t)$ în diferite „puncte" de timp, după cum urmează :

$$\delta[t_i] = \mathbf{y}(t_i) \tag{107a}$$

$$\delta\,[t_{i-1}, t_i] = \frac{\delta[t_i] - \delta\,[t_{i-1}]}{t_i - t_{i-1}} \tag{107b}$$

. . . .

$$\delta\,[t_{i-k},\dots, t_{i-1}, t_i] = \frac{\delta[t_{i-k+1},\dots,t_i] - \delta[t_{i-k},\dots,t_{i-1}]}{t_i - t_{i-k}}\,. \tag{107vc}$$

Fiecare funcţie, după prima, este diferenţa dintre funcţia precedentă, la două momente succesive de timp, divizată prin diferenţa între momentele de timp respective. Aceste funcţii se numesc *diferenţe divizate*. Se observă că, deoarece prima „diferenţă divizată" este chiar $y(t_i)$, prin definiţie, toate diferenţele divizate succesiv sînt sume şi diferenţe de $y(t)$, la diferite momente, divizate prin intervale de timp.

Urmează acum să exprimăm pe $y(t)$ în funcţie de sumele şi diferenţele valorilor ce le are în momentele t_i, $t_{i-1}, \ldots$; adică, în funcţie de diferenţele divizate. Vom exprima mai întîi pe $y(t)$ în funcţie de $\delta[t_i,t]$. Apoi, exprimînd pe $\delta[t_i,t]$ în funcţie de $\delta[t_{i-1}, t_i]$ şi $\delta[t_{i-1}, t_i, t]$, vom scrie pe $y(t)$ în funcţie de $\delta[t_{i-1},t_i]$ şi $\delta[t_{i-1},t_i,t]$. Acest proces de substituire se continuă, pînă ce se obţine $y(t)$ în funcţie de diferenţele divizate, de toate ordinele.

Să începem cu diferenţa divizată $\delta[t_i,t]$. Din (107*b*) se ştie că :

$$\delta[t]=\delta[t_i]+(t-t_i)\ \delta[t_i,t].$$

Înlocuind aici pe (107*a*) se obţine :

$$y[t] = y(t_i) + (t - t_i)\ \delta[t_i, t].$$

Apoi se consideră diferenţa divizată $\delta[t_{i-1},t_i,t]$. Din (107*c*) se obţine expresia pentru $\delta[t_{i-1}, t_i, t]$, care pate fi scrisă, rearanjînd termenii

$$\delta[t_i,t] = \delta[t_{i-1}, t_i] + (t - t_{i-1})\ \delta[t_{i-1}, t_i,t].$$

Înlocuind aceasta în (108*a*) se obţine :

$$y(t) = y(t_i) + (t - t_i)\ \delta[t_{i-1}, t_i] + (t - t_i)(t - t_{i-1})\ \delta[t_{i-1},t_i,t].$$

Din (107*c*) se ştie că :

$$\delta[t_{i-k},\ldots,t_i,t] = \delta[t_{i-k-1},\ldots,t_i] - (t-t_{i-k-1})\ \delta[t_{i-k-1},\ldots, t_i t].$$

Prin utilizarea repetată a acestei relaţii ,(108*b*) devine

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_i) + (t - t_i)\,\delta[t_{i-1},t_i] \\ &+ (t-t_i)(t-t_{i-1})\delta[t_{i-2},t_{i-1}, t_i] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (108c) \\ &+ (t- t_i)(t-t_{i-1})\ldots(t - t_{i-j+1})\delta[t_{i-j},\ldots, t_{i-1},t_i] \\ &+ e(t), \end{aligned}$$

unde

$$e(t) = (t-t_i) \dots (t-t_{i-j})\, \delta\, [t_{i-j}, \dots, t_i, t] \quad (109)$$

este considerată ca eroarea din aproximarea lui $y(t)$ prin polinomul

$$y(t_i)+(t-t_i)\,\delta[t_{i-1},t_i]+\dots+(t-t_i)\dots(t-t_{i-j+1})\,\delta t_{i-j},\dots t_i] \quad (110)$$

Pe baza comentariilor precedente referitoare la (106), se ştie că $e(t)\equiv 0$, dacă $y(t)$ este un polinom de grad cel mult j. Din examinarea relaţiei (109) se observă că $e(t)=0$ pentru $t=t_i$, $t_{i-1},\dots,t_{i-j}$, fie că $y(t)$ este sau nu un polinom.

Deoarece diferenţele divizate nu sînt tot aşa de simplu de calculat ca diferenţele, se va reformula (110) în termeni de simple diferenţe, luate invers, adică

$$\nabla y(t_l) = y(t_l) - y(t_{l-1}) \quad (111a)$$

$$\nabla^2 y(t_l) = [\nabla y(t_l) - \nabla y(t_{l-1}] \quad (111b)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\nabla^k y(t_l) = [\nabla^{k-1} y(t_l) - \nabla^{k-1} y(t_{l-1})]. \quad (111c)$$

Acestea sînt denumite *diferenţe în sens invers*, Vom presupune în cele ce urmează că diferenţele dintre valorile adiacente de timp sînt egale; adică, $t_k-t_{k-1}=h$, pentru $k=i-j+1,\dots,i$.
Apoi, începînd cu (111a), se obţine

$$\nabla y(t_i)=(t_i-t_{i-1})\,\frac{y(t_i)-y(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}$$

$$= h\,\delta[t_{i-1}, t_i].$$

În mod analog, începînd cu (111b), se obţine,

$$\nabla^2 y(t_i)\,(t_i-t_{i-2})\,\frac{\nabla y(t_i) - \nabla y(t_{i-1})}{t_i-t_{i-2}}$$

$$= 2h^2\,\frac{\delta[t_{i-1},t_i]-\delta[t_{i-2}, t_{i-1}]}{t_i-t_{i-2}}$$

$$= 2h^2\,\delta[t_{i-2},t_{i-1}, t_i].$$

Rîndul al doilea rezultă din primul, folosind expresia dedusă anterior pentru $\nabla y(t_i)$, iar rîndul trei rezultă din al doilea, folosind (107c). Continuînd în acest mod se găseşte că

$$\nabla y(t_i) = h\delta[t_{i-1}, t_i] \tag{112a}$$

$$\nabla^2 y(t_i) = 2h^2\delta[t_{i-2}, t_{i-1}, t_i] \tag{112b}$$

. . . .

$$\nabla^k y(t_i) = k!h^k\delta[t_{i-k}, \ldots, t_i] \tag{112c}$$

sau, sub rormă echivalentă,

$$\delta[t_{i-k}, \ldots, t_i] = \frac{1}{k!\,h^k} \nabla y\ (t_i) \tag{113}$$

Dacă se introduce această relaţie dintre diferenţele divizate şi diferenţele în sens invers în (108c) se obţine:

$$y(t) = y(t_i) + \frac{(t-t_i)}{h}\nabla y(t_i) + \frac{(t-t_i)(t-t_{i-1})}{2!h^2}\nabla^2 y(t_i) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(t-t_i)\ldots(t-t_{i-j+1})}{j!h^j}\nabla_j y(t_i) + e(t). \tag{114}$$

În mod analog, polinomul aproximant a lui (110), obţinut prin neglijarea lui $e(t)$, este:

$$y(t_i) + \frac{(t-t_i)}{h}\nabla y(t_i) + \ldots + \frac{(t-t_i)\ldots(t-t_{i-j+1})}{j!h^j}\nabla^j y(t_i). \tag{115}$$

Ecuaţia (114) este *formula de diferenţe în sens invers a lui Newton*; (115) este această formulă, trunchiată, după $j+1$ termeni.

Formule deschise

Folosind formula de diferenţe în sens invers (de diferenţe inverse) a lui Newton, vom stabili o formulă destul de generală pentru soluţia ecuaţiei de stare la momentul t_{i+1}, în funcţie de diferenţele inverse şi de derivatele lor la momentele anterioare de timp. Aceste formule, denumite *formule deschise*, formează baza pentru multe din metodele numerice specifice ce urmează a fi prezentate aici.

Notînd pe d/dt printr-un punct deasupra şi punînd $\mathbf{y}(t)=\dot{\mathbf{x}}(t)$, obţinem formula de diferenţe inverse a lui Newton (114), trunchiată după $j+1$ termeni,

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\dot{\mathbf{x}}(t_i)+\frac{(t-t_i)}{h}\nabla\dot{\mathbf{x}}(t_i)+\ldots+\frac{(t-t_i)\ldots(t-t_{i-j+1})}{j!h_j}\nabla^j\dot{\mathbf{x}}(t_i). \quad (116)$$

Dacă se integrează $\dot{\mathbf{x}}(t)$ de la t_i la $t_{i+1}=t_i+h$, rezultatul este $\mathbf{x}(t_{i+1})-$ $-\mathbf{x}(t_i)$; în mod echivalent,

$$\mathbf{x}(t_{i+1})=\mathbf{x}(t_i)+\int_{t_i}^{t_i+h}\dot{x}(t)dt$$

Substituind pe (116) în (117) se obţine,

$$\mathbf{x}(t_{i+1})=\mathbf{x}(t_i)+h\sum_{k=0}^{j}b_k\nabla^k\dot{\mathbf{x}}(t_i),$$

unde $b_0=1$ şi, pentru $k>0$,

$$b_k=\int_{t_i}^{t_i+h}\frac{(t-t_i)\ldots(t-t_{i-k+1})}{k!h^{k+1}}dt$$

$$=\int_0^1\frac{\tau(\tau+1)\ldots(\tau+k-1)}{k!}d\tau. \quad (119)$$

Integrala a doua din (119) se obţine din prima prin schimbarea variabilei $\tau=(t-t_i)/h$ şi prin faptul că $t_{i-l}=t_i-lh$. După evaluarea acestei integrale pentru mai multe valori ale lui k şi substituirea rezultatului în (118) se găseşte că

$$\mathbf{x}(t_{i+1})=\mathbf{x}(t_i)+h[\dot{\mathbf{x}}(t_i)+\tfrac{1}{2}\nabla\dot{\mathbf{x}}(t_i)+\tfrac{5}{12}\nabla^2\dot{\mathbf{x}}(t_i)$$
$$+\tfrac{3}{8}\nabla^3\dot{\mathbf{x}}(t_i)+\tfrac{251}{720}\nabla^4\dot{\mathbf{x}}(t_i)+\ldots]. \quad (120)$$

Într-un anumit sens, se poate spune că s-a ajuns ţinta. Dacă se cunoaşte $\mathbf{x}(t_0)$, $\mathbf{x}(t_1),\ldots$, şi $\mathbf{x}(t_j)$, atunci se poate folosi ecuaţia de stare pentru a determina $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$, $\dot{\mathbf{x}}(t_1)$, $-\ldots$, şi $\dot{\mathbf{x}}(t_j)$. Apoi se calculează diferenţele inverse $\nabla\dot{\mathbf{x}}(t_j)$, $\nabla^2\dot{\mathbf{x}}(t_j),\ldots$,şi $\nabla^j\dot{\mathbf{x}}(t_j)$, iar (118) este folosită pentru evaluarea lui $\mathbf{x}(t_{j+1})$. Se repetă apoi aceste trepte pentru evaluarea lui $\mathbf{x}(t_{j+2})$, pornind de la $\mathbf{x}(t_1)$, $\mathbf{x}(t_2),\ldots$, şi $\mathbf{x}(t_{j+1})$. Continuînd în acest sens, se stabileşte valoarea lui $x(t)$ în momentele $t=t_{j+1},t_{j+2},\ldots$ Ne vom opri mai mult asupra acestei chestiuni mai tîrziu.

Ecuaţia (118) stabileşte dependenţa lui $\mathbf{x}(t_{i+1})$ de valorile imediat precedente ale lui $\mathbf{x}$ (anume, $\mathbf{x}(t_1)$ şi de $\dot{\mathbf{x}}(t_i)$, $\nabla\dot{\mathbf{x}}(t_i),\ldots$, şi $\nabla^j\dot{\mathbf{x}}(t_i)$). Se poate

tot aşa de uşor stabili dependenţa lui $\mathbf{x}(t_{i+1})$ de $\mathbf{x}(t_{i-l})$, pentru $l \geqslant 0$ şi de $\dot{\mathbf{x}}(t_i)$, $\nabla\dot{\mathbf{x}}(t_i), \ldots,$ şi $\nabla^j\dot{\mathbf{x}}(t_i)$. Relaţia integrală obţinută astfel este:

$$\mathbf{x}(t_{i+1}) = \mathbf{x}(t_{i-l}) + \int_{t_i - lh}^{t_i + h} \dot{\mathbf{x}}(t)dt. \tag{121}$$

Prin substituirea lui (116) se obţine,

$$\mathbf{x}(t_{i+1}) = \mathbf{x}\,(t_{i-l}) + h \sum_{k=0}^{j} b_k\,(l)\,\nabla^k\dot{\mathbf{x}}\,(t_i), \tag{122}$$

unde $b_0(l) = l+1$ şi, pentru $k > 0$,

$$b_k\,(l) = \int_{-l}^{1} \frac{\tau(\tau+1)\ldots(\tau+k-1)}{k!}\,d\tau. \tag{123}$$

Pentru aplicaţii ulterioare, se dau în tabelul 10.1 valorile coeficienţilor $b_k(l)$, care apar în relaţia foarte generală (122).

Tabelul 10.1.

Valorile lui $b_k\ (l)$

k	l = 0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	-4	$-\frac{17}{2}$	-12
2	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{85}{12}$	15
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	0	$-\frac{55}{24}$	-9
4	$\frac{251}{720}$	$\frac{29}{90}$	$\frac{27}{80}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{83}{144}$	$\frac{33}{10}$
5	$\frac{95}{299}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{51}{160}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{95}{288}$	0

Nu s-a spus nimic despre eroarea ce apare prin folosirea formei trunchiate a formulei diferenţelor inverse a lui Newton. Despre aceste erori se tratează în cărţile de analiza numerică [1]. Totuşi, trebuie menţionat că eroarea din (122) este proporţională cu h^{j+2}. Astfel, într-un sens intuitiv, dacă h este suficient de mic şi j suficient de mare, eroarea poate ajunge foarte mică.

---

[1] Vezi, de exemplu, R.W. Hamming, *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, Mc Graw-Hill Book Co. New York, 1962.

Formule închise

Relaţiile obţinute din (122) pentru diferite valori ale lui l se numesc *formule deschise*, pentru că $\mathbf{x}(t_{i+1})$ depinde nu de $\mathbf{x}$ la momentul t_{i+1}, ci numai de $\dot{\mathbf{x}}$ la momente anterioare de timp. Pe de altă parte, *formulele închise* ce se vor prezenta mai jos, au o relaţie de dependenţă între $\mathbf{x}(t_{i+1})$ şi $\dot{\mathbf{x}}$, atît la momentul t_{i+1}, cît şi la cele anterioare.

Se pune $\mathbf{y}(t)=\dot{\mathbf{x}}(t)$ şi apoi se înlocuieşte t_i prin t_{i+1}, în formula de diferenţe inverse a lui Newton, trunchiată după $j+1$ termeni. Ecuaţia rezultată devine :

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\dot{\mathbf{x}}(t_{i+1})+\frac{(t-t_{i+1})}{h}\nabla\dot{\mathbf{x}}(t_{i+1})+\ldots+\frac{(t-t_{i+1})\ldots(t_{i-j+2})}{j!h^j}\nabla^j\dot{\mathbf{x}}(t_{i+1}). \quad (124)$$

Integrarea lui $\dot{\mathbf{x}}(t)$ între $t_{i-l}=t_i-1l$ şi $t_{i+1}=t_i+h$, duce la relaţia :

$$\mathbf{x}(t_{i+1})=\mathbf{x}(t_{i-l})+\int_{t_i-lh}^{t_i+h}\dot{\mathbf{x}}(t)\,dt. \quad (125)$$

După introducerea expresiei pentru (124) se găseşte :

$$\mathbf{x}(t_{i+1})=\mathbf{x}(t_{i-l})+h\sum_{k=0}^{j}c_k(l)\,\nabla^k\,\dot{\mathbf{x}}(t_{i+1}), \quad (126)$$

unde $c_0(l)=l+1$ şi, pentru $k>0$,

$$c_k(l)=\int_{-l}^{1}\frac{(\tau-1)\tau(\tau+1)\ldots(\tau+k-2)}{k!}\,d\tau. \quad (127)$$

În tabelul 10.2 se dau valorile calculate a lui $c_k(l)$, pentru formula închisă foarte generală (126).

Tabelul 10.2.

Valorile lui $c_k(l)$

k	l = 0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6
1	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$	-8	$-\frac{25}{2}$	-18
2	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{27}{12}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{175}{12}$	27
3	$-\frac{1}{24}$	0	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{69}{8}$	-24
4	$-\frac{19}{720}$	$-\frac{1}{90}$	$-\frac{3}{80}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{425}{84}$	$\frac{123}{10}$
5	$-\frac{3}{160}$	$-\frac{1}{90}$	$-\frac{3}{160}$	0	$-\frac{95}{288}$	$-\frac{33}{10}$

Ca şi în cazul formulelor deschise, eroarea în (126), datorită trunchierii formulei de diferenţe inverse a lui Newton, pentru $\dot{\mathbf{x}}(t)$, este proporţională cu h^{j+2}.

La prima vedere s-ar părea că formulele închise nu au o importanţă deosebită, deoarece ecuaţia de stare nu poate fi folosită pentru calculul lui $\dot{\mathbf{x}}(t_{i+1})$, pînă ce nu este cunoscută $\mathbf{x}(t_{i+l})$, iar (126) nu poate fi folosită pentru determinarea lui $\mathbf{x}(t_{i+1})$, pînă ce nu este cunoscută $\dot{\mathbf{x}}(t_{i+1})$. Totuşi, formulele închise sînt utile în soluţionarea numerică a ecuaţiei de stare, prin aşa numitele metode de predictor-corector, despre care ne vom ocupa puţin mai tîrziu.

Metoda lui Euler

Să considerăm, în acelaşi timp, formula deschisă (118), cu $j=0$, şi ecuaţia de stare evaluată la t_i. Astfel

$$\mathbf{x}(t_{i+1}) = \mathbf{x}(t_i) + h\,\dot{\mathbf{x}}(t_i) \tag{128a}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t_i) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t_i), t_i]. \tag{128b}$$

Valoarea lui $\mathbf{x}$ la $t=t_i$, introdusă în membrul doi al ecuaţiei a doua, ne dă derivata $\dot{\mathbf{x}}(t_i)$. Dacă se introduce aceasta în membrul doi din prima ecuaţie, rezultă valoarea lui $\mathbf{x}$ la t_{i+1}. Utilizarea alternativă a acestor două expresii, ne duce la valorile lui x la t_i+kh, pentru toate valorile k. Acest procedeu numeric se numeşte metoda lui Euler.

Nu ne vom opri mult asupra acestei metode elementare, deoarece eroarea este mult mai mare decît în alte metode. Mai există neajunsul că eroarea poate creşte mult, cînd creşte timpul. Aceasta se poate vedea dintr-un exemplu. Să considerăm ecuaţia scalară

$$\frac{dx}{dt} = x,$$

cu $x(0)=1$. Soluţia exactă ε^t este concavă în sus, cum se vede în fig. 10.13. În metoda lui Euler, valoarea lui $x(h)$ se calculează utilizînd $x(0)$ şi panta curbei (soluţiei), trecînd prin punctul $[x(0), 0]$. După cum se vede în figura 10.13, $x(h)$ are o valoare mai mică decît a soluţiei exacte. Se poate vedea uşor că soluţionarea numerică, evaluată pentru momente succesive de timp, va da o curbă ce se depărtează din ce în ce mai mult de curba soluţiei

exacte. În fig. 10.13 s-a luat $h=0{,}5$, destul de mare, pentru a se pune în evidenţă această abatere crescîndă cu timpul.

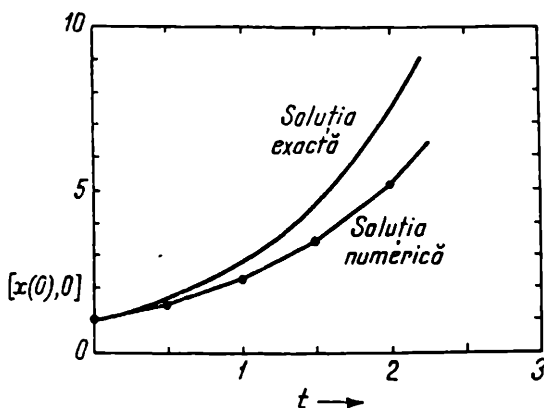


Fig. 10.13.

Metoda lui Euler modificată

Pentru a se înlătura unul din neajunsurile metodei lui Euler, se modifică puţin aceasta, făcînd ca $\mathbf{x}(t_{i+1})$ să depindă de $\dot{\mathbf{x}}$ atît la t_i, cît şi la t_{i+1}, nu numai la t_i singur.

Vom porni de la formula închisă (126), cu $j=1$ şi $l=0$; acesta dă

$$\mathbf{x}(t_{i+1})=\mathbf{x}(t_i)+h\left[\dot{\mathbf{x}}(t_{i+1})-\frac{1}{2}\nabla\,\dot{\mathbf{x}}(t_{i+1})\right], \tag{129}$$

care, dacă se face înlocuirea $\nabla\,\dot{\mathbf{x}}(t_{i+1})=\dot{\mathbf{x}}(t_{i+1})-\dot{\mathbf{x}}(t_i)$, devine

$$\mathbf{x}(t_{i+1})=\mathbf{x}(t_i)+h\,\frac{\dot{\mathbf{x}}(t_{i+1})+\dot{\mathbf{x}}(t_i)}{2}, \tag{130}$$

Astfel, dacă se foloseşte (129), $\mathbf{x}(t_{i+1})$ se determină prin $\mathbf{x}(t_i)$ şi media dintre $\dot{\mathbf{x}}$ la t_i şi la t_{i+1}. La prima vedere s-ar părea că această relaţie este fără folos, deoarece $\dot{\mathbf{x}}(t_{i+1})$ poate fi determinată din ecuaţia de stare numai dacă $\mathbf{x}(t_{i+1})$, care este mărimea ce trebuie evaluată, este cunoscută. Această dificultate este învinsă în modul următorul: Pornind de la $\mathbf{x}(t_i)$, se foloseşte metoda lui Euler pentru a prezice valoarea lui $\mathbf{x}(t_{i+1})$. Cu această valoare *prezisă* a lui $\mathbf{x}(t_{i+1})$, ecuaţia (129), împreună cu ecuaţia de stare, ne pot da o valoare corectată a lui $\mathbf{x}(t_{i+1})$. Acest ultim pas este apoi repetat pînă ce valorile corectate succesiv ale lui $\mathbf{x}(t_{i+1})$ sînt echivalente, cu precizia numerică dorită; de exemplu, echivalente pînă la patru cifre zecimale.

Aceasta este *metoda lui Euler modificată*; se mai poate spune că este o metodă cu *predictor-corector*. Este doar o metodă, poate cea mai elementară, dintr-o largă clasă de astfel de metode cu predictor-corector, dintre care unele vor fi luate în considerare mai departe.

Pentru a ilustra procedeul în metoda lui Euler modificată, să presupunem că:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^3 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

este ecuația de stare și $\mathbf{x}(0)=[1{,}000 - 2{,}000]'$. Luăm în mod arbitrar $h=0{,}1$. Acum, $\mathbf{x}(0)$ și ecuația de stare împreună, dau $\dot{\mathbf{x}}(0)=[-1 \quad 3]'$. Ecuația (128*a*) în metoda Euler dă

$$\mathbf{x}(h)=[0{,}900 \quad -1{,}700]',$$

valoarea prezisă a lui $\mathbf{x}(h)$. Ecuația de stare dă apoi valoarea corespunzătoare pentru $\dot{\mathbf{x}}(h)$, adică $\dot{\mathbf{x}}(h)=[-0{,}729 \quad 2{,}600]'$. Folosind pe (130) din metoda modificată Euler, prima valoare corectată a lui $\mathbf{x}(h)$ devine $[0{,}914 \; -1{,}740]'$. Ecuația de stare ne dă acum o nouă valoare a lui $\dot{\mathbf{x}}(h)$, iar (130) ne dă a doua valoare corectată a lui $\mathbf{x}(h)$. Acestea sînt

$$\dot{\mathbf{x}}(h)=\begin{bmatrix} -0{,}764 \\ 2{,}654 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(h)=\begin{bmatrix} 0{,}912 \\ -1{,}719 \end{bmatrix}.$$

Presupunînd că o precizie de trei zecimale este suficientă, calculul lui $\mathbf{x}(h)$, este terminat, deoarece ultimele două valori calculate ale lui $\mathbf{x}(h)$ sînt echivalente cu această precizie. Evaluarea mărimilor $\mathbf{x}(2h)$, $\mathbf{x}(3h)$,... se face în același mod, cu calcularea următoare începută de la valoarea lui $\mathbf{x}(h)$ imediat anterioară (stabilită).

Metoda Adams

Formula deschisă (118) pentru un j oarecare, astfel ca în cazul particular $j=3$ să avem

$$\mathbf{x}(t_{i+1}) = \mathbf{x}(t_i) + h\left[\dot{\mathbf{x}}(t_i) + \frac{1}{2}\nabla\dot{\mathbf{x}}(t_i) + \frac{5}{12}\nabla^2\dot{\mathbf{x}}(t_i) + \frac{3}{8}\nabla^3\dot{\mathbf{x}}(t_i)\right], \qquad (131)$$

formează baza *metodei Adams*. Ecuația de stare este folosită, bineînțeles, pentru a evalua pe $\dot{\mathbf{x}}(t_i)$ de $\mathbf{x}(t_i)$.

Ca și alte metode care folosesc formule deschise și închise, cu $j\geqslant 1$, metoda Adams este de tip *fără auto-pornire*; adică nu este suficient să

cunoaştem numai ecuaţia de stare şi $\mathbf{x}(t_0)$, ci trebuie cunoscute şi valorile $\mathbf{x}(t_1), \ldots,$ şi $\mathbf{x}(t_j)$. Numai cu această informaţie suplimentară poate fi calculat primul set complet de diferenţe inverse, la timpul t_j şi poate fi deci folosită (118) pentru evaluarea lui $\mathbf{x}(t_{j+1})$.

Valorile suplimentare ale lui $\mathbf{x}$, necesare pentru a porni metoda Adams, pot fi produse şi prin alte metode. Astfel, se poate folosi o dezvoltare a lui $\mathbf{x}(t)$ în seria Taylor trunchiată, la t_0, pentru a evalua pe $\mathbf{x}(t_1), \ldots,$şi $\mathbf{x}(t_j)$. Pentru a menţine echivalente erorile în metoda Adams şi în evaluarea seriei, pentru valorile de pornire, – seria lui Taylor trebuie trunchiată după $j+2$ termeni; adică, se va utiliza următoarea serie trunchiată:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{x}^{(1)}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{x}^{(2)}(t_0)(t-t_0)^2 + \ldots + \frac{1}{(j+1)!}\mathbf{x}^{(j+1)}(t_0)(t-t_0)^{j+1}. \tag{132}$$

Această metodă cu serie cere evident ca $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ să fie suficient de diferenţiabilă (de j ori în $\mathbf{x}$ şi t) la t_0; numai atunci se poate evalua $\mathbf{x}^{(k)}(t_0)$; de exemplu, $\ddot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{f}_x[\mathbf{x}(t_0), t_0]\dot{\mathbf{x}}(t_0) + \mathbf{f}_t[\mathbf{x}(t_0), t_0] = \mathbf{f}_x[\mathbf{x}(t_0), t_0]\mathbf{f}[\mathbf{x}(t_0), t_0] + \mathbf{f}_t[\mathbf{x}(t_0), t_0]$.

Pentru a ilustra metoda Adams, să considerăm aceasta simplă ecuaţie de stare

$$\frac{d}{dt}x = -x + \varepsilon^{-t},$$

cu $x(0)=0$. Punem $h=0,1$ şi luăm $j=3$. Astfel, (131) va fi cazul particular a lui (118) folosit aici.

Valorile de pornire se obţin folosind seria Taylor trunchiată.

Mai întîi,

$$\dot{x}(0) = [-x(t) + \varepsilon^{-t}]|_{t=0} = 1$$

$$\ddot{x}(0) = [-\dot{x}(t) - \varepsilon^{-t}]|_{t=0} = -2$$

$$\dddot{x}(0) = [-\ddot{x}(t) + \varepsilon^{-t}]|_{t=0} = 3$$

$$x^{(4)}(0) = [-\dddot{x}(t) - \varepsilon^{-t}]|_{t=0} = -4$$

Deci, seria trunchiată (132) este în acest caz

$$x(t) = t - t^2 + \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{6}t^4.$$

Folosind această serie, se evaluează $x(h)$, $x(2h)$ şi $x(3h)$; astfel $x(h)=0{,}0905$, $x(2h)=0{,}1637$, $x(3h)=0{,}2222$. Cu aceste valori se poate folosi (131) pentru a calcula valorile următoare ale lui $x(ih)$. Aceste valori, împreună cu cele ale mai multor diferenţe inverse, sînt arătate în tabelul 10.3, pentru i pînă la 10. Pentru comparaţie sînt date şi valorile exacte $(ih)e^{-(ih)}$ ale lui x la $t=ih$.

Tabelul 10.3.

i	Exact $x(ih)$	Numeric $x(ih)$	$\dot{x}(ih)$	$\nabla \dot{x}(ih)$	$\nabla^2 \dot{x}(ih)$	$\nabla^3 \dot{x}(ih)$
0	0,0000	0,0000	1,0000			
1	0,0905	0,0905	0,8143	−0,1857		
2	0,1637	0,1637	0,6550	−0,1593	0,0264	
3	0,2222	0,2222	0,5186	−0,1364	0,0229	−0,0035
4	0,2681	0,2681	0,4022	−0,1164	0,0200	−0,0029
5	0,3032	0,3032	0,3033	−0,0989	0,0175	−0,0025
6	0,3293	0,3292	0,2196	−0,0837	0,0152	−0,0023
7	0,3476	0,3475	0,1491	−0,0705	0,0132	−0,0020
8	0,3595	0,3594	0,0899	−0,0592	0,0113	−0,0019
9	0,3659	0,3658	0,0408	−0,0491	−0,0101	0,0012
10	0,3679	0,3678				

Metoda Adams modificată

Se poate face o modificare a metodei Adams, asemănătoare cu modificarea la metoda Euler. Metoda Adams este folosită să prezică o valoare pentru $\mathbf{x}(t_{i+1})$. Formula închisă (126) pentru un j oarecare şi $l=0$, se foloseşte în mod repetat, pînă ce valorile succesive corectate ale lui $\mathbf{x}(t_{i+1})$ sînt ecnivalente la precizia numerică dorită. Ca un caz tipic, (131) (adică (118), cu $j=3$) se foloseşte să prezică valoarea lui $\mathbf{x}(t_{i+1})$; apoi din

$$\mathbf{x}(t_{i+1})=\mathbf{x}(t_i)+h\left[\dot{\mathbf{x}}\,(t_{i+1})-\frac{1}{2}\nabla\,\dot{\mathbf{x}}(t_{i+1})-\frac{1}{12}\nabla^2\dot{\mathbf{x}}\,(t_{i+1})-\frac{1}{24}\nabla^3\dot{\mathbf{x}})\,t_{i+1})\right]. \tag{13}$$

care este (126), cu $j=3$ şi $l=0$, se calculează valoarea corectată a lui $\mathbf{x}(t_{i+1})$. Aceasta este *metoda Adams modificată*; ca şi metoda Euler modificată, este o metodă cu predictor-corector.

Metoda Milne

Aceasta este o altă metodă cu predictor-corector; în particular este o metodă care ţine seama bine de zero-urile care apar în Tabelele 10.1 şi 10.2. Ecuaţia (122), cu $j=3$ şi $l=3$, se foloseşte pentru a prezice valoarea lui $\mathbf{x}(t_{i+1})$. Deoarece $b_3(3)=0$, termenul $\nabla^3\dot{\mathbf{x}}(t_i)$ nu trebuie să fie niciodată inclus în ecuaţie. Astfel

$$\mathbf{x}(t_{i+1}) = \mathbf{x}(t_{i-3}) + h\left[4\dot{\mathbf{x}}(t_i) - 4\nabla\dot{\mathbf{x}}(t_i) + \frac{8}{3}\nabla^2\dot{\mathbf{x}}(t_1)\right]. \quad (134)$$

Se observă că numai două diferenţe inverse sînt calculate, ca şi cum s-ar trunchia formula deschisă (122) la $j=2$. Totuşi, precizia este aceeaşi ca cea obţinută cînd se trunchează formula deschisă la $j=3$. Formula închisă (126), cu $j=3$ şi $l=1$, se foloseşte pentru calculul valorilor corectate ale lui $\mathbf{x}(t_{i+1})$. Cum $c_3(1)=0$, trebuie calculate numai două, în loc de trei, diferenţe inverse. Astfel, ecuaţia se poate scrie fără termenul $\nabla^3\dot{\mathbf{x}}(t_{i+1})$, adică:

$$\mathbf{x}(t_{i+1}) = \mathbf{x}(t_{i-1}) + h\left[2\,\dot{\mathbf{x}}(t_{i+1}) - 2\nabla\,\dot{\mathbf{x}}(t_{i+1}) + \frac{1}{3}\nabla^2\dot{\mathbf{x}}(t_{i+1})\right]. \quad (135)$$

O a doua metodă Milne foloseşte formula deschisă (122), cu $j=5$ şi $l=5$, pentru a prezice pe $\mathbf{x}(t_{i+1})$, precum şi formula închisă (126), cu $j=5$ şi $l=3$, pentru a corecta pe $\mathbf{x}\,(t_{i+1})$. Faptul că $b_5(5)$ şi $c_5(3)$ sînt zero, reduce efortul de calcul, pînă la cel necesar cînd (122) şi (126) sînt trunchiate la $j=4$.

Metode cu predictor-corector

Mai multe din metodele examinate sînt metode cu predictor-corector. Ele fac parte dintr-o clasă largă de astfel de metode, care folosesc formula deschisă (122), pentru anumite j şi l, ca să prezică pe $\mathbf{x}\,(t_{i+1})$, şi formula închisă (126), pentru anumite j şi l, ca să corecteze pe $\mathbf{x}(t_{i+1})$. Indicii j şi l pot fi diferiţi în cele două ecuaţii. În mod convenţional, (122) se numeşte un predictor, iar (126) un corector.

Pentru a ilustra cum servesc aceste ecuaţii la stabilirea metodei particulare, să vedem mai întîi cum poate fi îmbunătăţită metoda Euler

modificată, fără să se adauge ceva la cantitatea de calcul necesară. Corectorul

$$\mathbf{x}(t_{i+1}) = \mathbf{x}(t_i) + h\,\frac{\dot{\mathbf{x}}(t_i) + \dot{\mathbf{x}}(t_{i+1})}{2}$$

este (126) cu $j=1$ şi $l=0$. Predictorul

$$\mathbf{x}(t_{i+1}) = \mathbf{x}(t_i) + h\dot{\mathbf{x}}(t_i)$$

este (122) cu $j=0$. Astfel, predictorul nu este tot aşa de precis cît este corectorul. Aceasta înseamnă că ultimul, probabil, va trebuie să fie folosit de mai multe ori, pînă să se ajungă la valori succesive ale lui $\mathbf{x}(t_{i+1})$ echivalente (aproape egale), decît ar fi necesar dacă predictorul şi corectorul ar avea aceeaşi precizie. Din examinarea tabelului 10.1 se vede că $b_1(1)=0$. Astfel (122), cu $j=1$ şi $l=1$, dă un predictor:

$$\mathbf{x}(t_{i+1}) = \mathbf{x}\,(t_{i-1}) + 2h\dot{\mathbf{x}}(t_i),$$

cu aceeaşi precizie ca şi corectorul; cantitatea de calcul necesară pentru a preciza pe $\mathbf{x}(t_{i+1})$ este aceeaşi ca şi la predictorul original.

Trebuie observat faptul că cele mai multe din metodele cu predictor-corector, care se bazează pe (122) şi (126), nu cînt cu auto-porn ire. Excepţiile sînt (122), cu $j=0$ şi $l=0$, precum şi (126), cu $j=0$ sau 1 şi $l=0$.

Metoda Runge-Kutta

Metoda de ordinul patru *Runge-Kutta*, este baza cunoscută şi folosită pentru obţinerea soluţiei numerice a ecuaţiei de stare. Este o metodă cu auto-pornire — deci cu avantaj evident — şi destul de precisă.

Metoda de ordinul patru Runge-Kutta este exprimată prin ecuaţia

$$\mathbf{x}(t_{i+1}) = \mathbf{x}(t_i) + \frac{1}{6}\,[\mathbf{w}_0 + 2\mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3] \qquad (136)$$

unde:

$$\mathbf{w}_0 = h\,\mathbf{f}[\mathbf{x}(t_i), t_i]$$

$$\mathbf{w}_1 = h\,\mathbf{f}\left[\mathbf{x}\,(t_i) + \frac{\mathbf{w}_0}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right]$$

$$\mathbf{w}_2 = h\,\mathbf{f}\left[\mathbf{x}\,(t_i) + \frac{\mathbf{w}_1}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right]$$

$$\mathbf{w}_3 = h\,\mathbf{f}\,[\mathbf{x}(t_i) + \mathbf{w}_2, t_i + h].$$

Nu se va încerca să se justifice această ecuaţie, deoarece este o demonstraţie lungă şi nu dă informaţii utile pentru dezvoltarea altor metode. Este cunoscut că termenul de eroare este proporţional cu h^5. Astfel, dacă h este suficient de mic, eroarea va fi neglijabilă.

Se observă că nu se foloseşte nici-un corector în această metodă. În comparaţie cu alte metode avînd aceeaşi precizie, dar fără corector, ea cere un efort de calcul ceva mai mare. Pentru fiecare creştere a timpului, $\dot{x}$ trebuie evaluată de patru ori, faţă de numai o dată, în alte metode. Mai mult, într-o metodă cu predictor-corector, avînd paşi h suficient de mici, $\dot{x}$ va fi rareori evaluat mai mult decît de două ori. Se vede că, din acest punct de vedere, metoda Runge-Kutta este mai desavantajoasă decît metodele cu predictor-corector.

Totuşi, se observă că avantajele şi dezavantajele metodei Runge-Kutta, în comparaţie cu metodele de prezicere-corecţie, sînt complementare între ele. Metoda Runge-Kutta este cu auto-pornire, iar metodele cu predictor-corector necesită mai puţin calcul. De aceea metoda Runge-Kutta se poate folosi pentru pornirea uneia dintre metodele cu predictor-corector.

Erori

S-a spus pînă aici puţin despre erorile din soluţiile numerice ale ecuaţiei de stare, afară de sublinierea dependenţei erorii de h, datorită truncherii în formula cu diferenţe inverse a lui Newton. Mai există şi alte erori şi trebuie să fim atenţi asupra modului cum apar.

Sînt erori care apar din cauză că operaţiile aritmetice se fac cu numere ce au un număr limitat de cifre semnificative. Acest tip de erori sînt cunoscute ca erori de „rotunjire'', deoarece prin rotunjire se elimină unele cifre finale considerate nesemnificative.

Erorile de trunchere şi de rotunjire, apărînd la fiecare pas al calculului, afectează nu numai eroarea soluţiei numerice la acel pas, ci şi eroarea paşilor următori; se spune că eroarea se propagă.

O altă sursă de eroare, considerată ca eroare dinamică, apare în modul următor. Ecuaţiile folosite pentru obţinerea soluţiei numerice a ecuaţiei de stare pot prezenta mai multe moduri independente dinamic, decît ecuaţia de stare. Dacă unul din modurile suplimentare este instabil, atunci soluţia numerică se poate depărta radical de soluţia efectivă.

Nu ne vom ocupa mai mult despre erori, aceste chestiuni fiind tratate pe larg în cărţile de analiză numerică (vezi Bibliografia).

10.7. STABILITATEA LIAPUNOV

În cazul circuitelor liniare, pentru care există soluţii analitice generale ale ecuaţiei de stare şi pot fi determinate, se poate examina soluţia şi studia proprietăţile ei. În particular, este posibil să se facă observaţi asupra proprietăţilor de stabilitate ale soluţiei, dacă rămîne mărginită sau chiar se apropie de zero cînd $t \to \infty$. Pentru circuite neliniare, nu există soluţii analitice generale, şi astfel nu se pot face observaţii cantitative asupra soluţiei. De aceea este important să se obţină unele informaţii asupra comportării calitative a soluţiei unei ecuaţii de stare, în particular asupra comportării ei cînd $t \to \infty$, adică asupra gradului de stabilitate sau instabilitate a soluţiei.

Definiţii de stabilitate

Ecuaţia de stare neliniară se exprimă prin

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x},t), \tag{137}$$

Se observă că la punctele unde $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)=0$ pentru orice $t > t_0$, viteza de schimbare a lui $\mathbf{x}$ este identic zero. Aceasta înseamnă, bineînţeles, că dacă starea începe sau ajunge la un astfel de punct, va rămîne acolo. Aceste puncte sînt evident deosebite şi de aceea se numesc *puncte singulare.*

Problema stabilităţii se ocupă cu comportarea soluţiei ecuaţiei de stare într-un punct singular. Prin convenţie, în definiţii şi în teoreme, se alege punctul singular în chestiune drept origină. Pentru a vedea că aceasta este totdeauna posibil, fie $\mathbf{x}_s$ un punct singular. Apoi, să punem $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s$. Rezultă că $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_s$ corespunde la $\mathbf{y}(t)=0$. Identificarea echivalentă $\mathbf{x}(t)=\mathbf{y}(t)+\mathbf{x}_s$ înlocuită în ecuaţia de stare (137) dă

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = f(\mathbf{y}+\mathbf{x}_s, t) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{y},t). \tag{138}$$

Cum $\mathbf{y}$ şi $\mathbf{x}$ diferă între ele numai printr-un vector constant $\mathbf{x}_s$. oricare dintre ei determină starea circuitului. Dacă $\mathbf{y}$ este considerat un vector, de stare atunci (138)este ecuaţia de stare şi origina este un punctsingular. Astfel, fără pierdere de generalitate, vom presupune că (137) stabileşte origina ca punct singular.

În ceea ce urmează vom folosi norme, fără referinţă la o normă particulară; totuşi, exemplele se vor referi la norma Euclidiană. Prin S_ρ vom nota regiunea sferică $\|\mathbf{x}\| < \rho$ în spaţiul vectorilor şi prin B_ρ frontiera regiunii sferice S_ρ. Astfel, B_ρ este sfera $\|\mathbf{x}\| = \rho$.

Se presupune că în regiunea sferică S_E există o singură soluţie continuă a ecuaţiei de stare. Locul geometric al punctelor $\mathbf{x}(t)$ în spaţiul vectorilor, pentru $t \geqslant t_0$ este numit *semi-traiectoria pozitivă* sau, pe scurt, *traiectoria* şi se notează cu $\mathbf{x}^+$.

Fiecare din următoarele trei definiţii este ilustrată în fig. 10.14, pentru a da atît o interpretare vizuală, cît şi una verbală a stabilităţii.

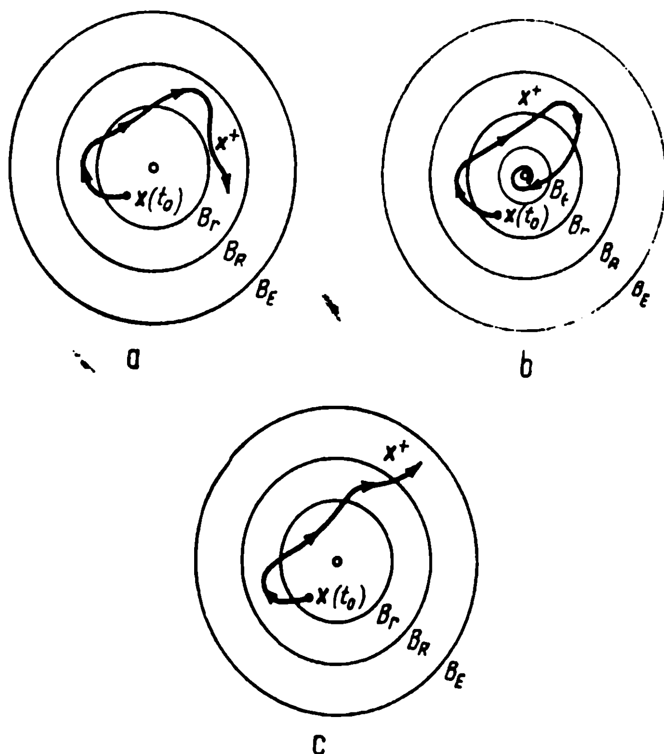


Fig. 10.14. Ilustraţii pentru definiţiile stabilităţii:
a – origină stabilă; b – origină asimptotic stabilă; c – origină instabilă.

Definiţie. *Originea este stabilă, dacă pentru orice $R<E$ există un $r \leqslant R$, astfel ca orice traiectorie $\mathbf{x}^+$ ce porneşte din S_r rămîne în S_R. [Punctul de unde începe traiectoria este $\mathbf{x}(t_0)$].*

Comportarea asimptotică a soluţiei la $t \to \infty$, este determinată de grupul de puncte de care se apropie traiectoria la $t \to \infty$. Dacă traiectoria tinde spre origină, timpul particular de stabilitate capătă un nume. Mai precis,

Definiţie. *Originea este stabilă asimptotic, dacă este stabilă şi dacă, pentru orice $\varepsilon>0$ există un t_ε astfel ca traiectoria să rămînă în S_ε pentru $t>t_\varepsilon$.*

Această definiţie stabileşte, în mod precis, că $\mathbf{x}(t)$ se apropie de zero cînd t tinde spre infinit, prin existenţa unei valori de timp, după care norma soluţiei rămîne mai mică decît orice număr arbitrar de mic. Se observă că atît stabilitatea, cît şi stabilitatea asimptotică, sînt „*locale*" sau „*în mic*", — proprietăţi prin care definiţiile lor permit ca $r>0$ să fie oricît de mic, pentru a satisface definiţia. Pe de altă parte, dacă origina este asimptotic stabilă pentru $r = +\infty$, cînd $R = +\infty$, atunci origina se spune că este *asimptotic stabilă în mare*, sau *global asimptotic stabilă*. Cu alte cuvinte $\mathbf{x}(t)$ se apropie de zero cînd t tinde spre infinit pentru orice $\mathbf{x}(t_0)$.

Cum nu toate circuitele sînt stabile, trebuie precizat şi conceptul de instabilitate; aceasta se face prin următoarea definiţie.

Definiţie. *Origina este instabilă, dacă, pentru vreun $R < E$ şi pentru orice $r \leqslant R$, există cel puţin o traiectorie cu origina în S_r, care traversează B_R.*

Condiţiile în care origina este stabilă sau asimptotic stabilă sînt enunţate în termeni de existenţa unor anumite clase de funcţii. Vom defini aici aceste funcţii.

Definiţie. *Funcţia scalară* $V(\mathbf{x})$ *se zice că este pozitiv definită, dacă*: 1) $V(x)$ *şi primele ei derivate parţiale sînt continue într-o regiune deschisă*[1] *D, ce conţine origina,* 2) $V(0)=0$ şi 3) $V(\mathbf{x})>0$ *pentru* $\mathbf{x} \neq 0$ *în D.*

Deoarece funcţia scalară V poate fi uneori o funcţie explicită de t şi de $\mathbf{x}$, noţiunea de pozitiv definită trebuie extinsă şi la astfel de cazuri.

Definiţie. *Funcţia scalară* $V(\mathbf{x}, t)$ *se zice că este pozitiv definită, dacă*: 1) $V(\mathbf{x}, t)$ *şi primele ei derivate sînt continue pentru* $t \geqslant t_0$ *într-o regiune deschisă* D, *ce conţine origina,* 2) $V(0, t) = 0$ *pentru* $t \geqslant t_0$ şi 3) $V(\mathbf{x}, t) \geqslant W(\mathbf{x})$ *pentru* $t \geqslant t_0$, *unde* $W(\mathbf{x})$ *este o funcţie pozitiv definită numai de* $\mathbf{x}$.

Continuitatea primelor derivate parţiale garantează existenţa lui $\nabla V(\mathbf{x}, t)$, gradientul lui $V(\mathbf{x}, t)$. De aceea se poate scrie

$$\frac{d}{dt} V(x, t) = \frac{\partial V}{\partial t}(x, t) + [\nabla V(x, t)]' \frac{d}{dt} x$$

$$= \frac{\partial V}{\partial t}(x, t) + [\nabla V(x, t)]' \mathbf{f}(x, t). \tag{139}$$

Ultima formă rezultă din faptul că $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ de-a lungul traiectoriei circuitului. De aceea este raţional să se vorbească despre viteza de schimbare a lui V în lungul traiectoriei circuitului. O foarte importantă clasă de funcţii este definită pe baza semnului acestei viteze de schimbare.

Definiţie. *O funcţie pozitiv definită $V(\mathbf{x}, t)$ se numeşte funcţie Liapunov, dacă $-dV/dt \geqslant 0$ în lungul traiectoriilor din D.*

Pe baza acestor definiţii se poate discuta acum chestiunea stabilităţii şi condiţiile în care este stabil un punct singular.

---

[1] O regiune se zice că este deschisă dacă nu conţine nici un punct din frontiera sa.

Teoreme de stabilitate

Pentru a face ca teoremele de stabilitate să fie mai pline de înțeles, vom analiza comportarea unei funcții Liapunov $V(\mathbf{x})$ deosebit de simplă, care este invariantă în timp și comportă un vector de stare cu numai două elemente, x_1 și x_2.

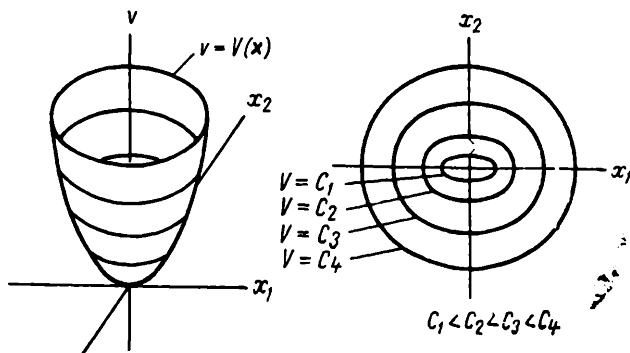


Fig. 10.15. Funcție Liapunov.

Deoarece $V(\mathbf{x}) > 0$ pentru $\mathbf{x} \neq 0$ și $V(\mathbf{x}) = 0$ pentru $\mathbf{x} = 0$, $v = V(\mathbf{x})$ poate fi imaginată ca o suprafață în formă de cupă, tangentă la planul $x_1 - x_2$ la origină, după cum se arată în fig. 10.15. Intersecția acestei suprafețe cu planurile orizontale $v = C_i$, unde $C_1 < C_2 < \ldots$, vor fi niște curbe închise. Dacă se proiectează aceste curbe vertical, pe planul $x_1 - x_2$, ele vor forma un grup de contururi V – constant concentrice, cu valoarea lui V descrescînd către zero, cînd contururile se strîng spre origină. Aceasta se vede în fig. 10.15.

Deoarece V este o funcție Liapunov, ea trebuie să fie necrescătoare în lungul traiectoriei. Deci, traiectoria care începe în interiorul conturului $V(\mathbf{x}) = C_i$, nu poate tăia niciodată acest contur. Traiectoria este astfel constrînsă să fie în vecinătatea originii. Aceasta este foarte aproape de condiția pusă pentru stabilitate. De aceea, putem anticipa că stabilitatea rezultă din existența unei funcții Liapunov invariantă în timp. Deși acest exemplu folosește un vector de stare cu numai două elemente, nu este greu să imaginăm o generalizare la un vector de stare cu n elemente.

Teoremele ce urmează vor face aceste noțiuni mai precise și vor permite ca funcția Liapunov să varieze în timp.

Teorema 17. *Origina este stabilă dacă, într-o regiune deschisă D, ce conține origina, există o funcție Liapunov, astfel ca $V(\mathbf{x}, t) \leq U(\mathbf{x})$, pentru orice $t \geq t_0$, unde $U(\mathbf{x})$ este o funcție pozitiv definită.*

Această teoremă se demonstrează după cum urmează. Fie dat un număr R, iar C să fie valoarea minimă [1] a lui $W(\mathbf{x})$ pentru orice $\mathbf{x}$, astfel ca $||\mathbf{x}|| = R$. Fie $\mathbf{x}_r$ un vector $\mathbf{x}$ avînd norma minimă, pentru care $U(\mathbf{x}) = C$. Acest vector există şi nu este vectorul zero, deoarece $U(\mathbf{x}) = 0$, dacă şi numai dacă $\mathbf{x} = 0$. Mai departe, deoarece $U(\mathbf{x}) \geqslant W(\mathbf{x})$ pentru orice $t \geqslant t_0$, atunci $||x_r|| \leqslant R$. Fie $r = ||\mathbf{x}_r||$. Rezultă că orice traiectorie care începe în S_r, nu părăseşte S_R. Aceasta se verifică astfel : prin continuitate, dacă $\mathbf{x}(t_0)$ este conţinut în S_r, atunci $\mathbf{x}(t)$ trebuie să fie conţinut în S_R, pentru valori mici a lui $t - t_0$. Presupunem că la momentul t_1 avem $||\mathbf{x}(t_1)|| = R$. Atunci

$$V[\mathbf{x}(t_1),\ t_1] \geqslant W[\mathbf{x}(t_1)] \geqslant C. \tag{140}$$

Deoarece $\mathbf{x}_r$ era un vector $\mathbf{x}$ de normă minimă, pentru care $U(\mathbf{x}) = C$ şi deoarece $V(\mathbf{x}, t) \leqslant U(\mathbf{x})$ pentru orice $t \geqslant t_0$, rezultă $V(\mathbf{x}, t_0) < C$, pentru orice $\mathbf{x}$ care satisface $||\mathbf{x}|| < ||x_r|| = r$. Astfel, pentru orice $\mathbf{x}(t_0)$ din S_r,

$$V[(\mathbf{x}(t_0),\ t_0] < C. \tag{141}$$

Apoi, deoarece $-dV/dt \geqslant 0$,

$$V[\mathbf{x}(t_1), t_1] \leqslant V[\mathbf{x}(t_0), t_0]. \tag{142}$$

Este clar că (140) e în contradicţie cu (142). Astfel t_1 nu există şi $\mathbf{x}^+$ este conţinut în S_R.

Această demonstraţie poate fi interpretată geometric, cînd $\mathbf{x}$ este un vector — 2, ca în fig. 10.16. Relaţia $W(\mathbf{x}) = C$ defineşte un contur închis K_1,

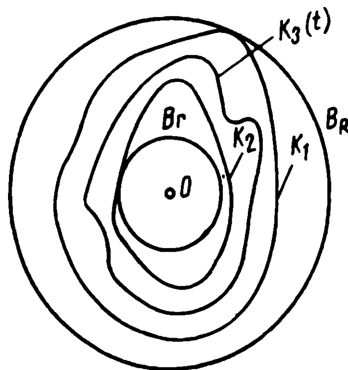


Fig. 10.16. Conturul $K_3(t)$ al funcţiei Liapunov pentru origină stabilă.

[1] Se reaminteşte din definiţia unei funcţii $V(\mathbf{x}, t)$ pozitiv definită şi variabilă în timp, că $W(t)$ este o funcţie pozitiv definită invariantă în timp, astfel ca $V(\mathbf{x}, t) \geqslant W(\mathbf{x})$, pentru orice $t \geqslant t_0$.

conţinut în S_R, plus frontiera ei, B_R. Relaţia $U(\mathbf{x})=C$ defineşte un contur închis K_2, conţinut în regiunea închisă [1]. mărginită de K_1. Regiunea sferică S_r este cea mai mare în regiunea deschisă mărginită de K_2. Cum $W(\mathbf{x})\leqslant V(\mathbf{x},t)\leqslant U(\mathbf{x})$ pentru orice $t\geqslant t_0$, $V(\mathbf{x},t)=C$ va defini conturul închis $K_3(t)$, conţinut în regiunea inelară mărginită între K_1 şi K_2. Acum, deoarece $V[\mathbf{x}(t_0),t_0]<C$ pentru orice $\mathbf{x}(t_0)$ în S_r şi $-dV/dt\geqslant 0$, o traiectorie ce începe în S_r nu poate tăia $K_3(t)$ pentru $t\geqslant t_0$. Aceasta înseamnă că $\mathbf{x}^+$ nu poate tăia K_1 de asemenea şi trebuie să rămînă în S_R.

Acum să ne întoarcem la stabilitatea asimptotică. Pentru a lămuri stabilitatea asimptotică, trebuie introdusă o ipoteză suplimentară.

Teorema 18. *Origina este asimptotic stabilă dacă, într-o regiune deschisă* D *ce conţine origina, există o funcţie Liapunov, astfel ca* $V(\mathbf{x},t)\leqslant U(\mathbf{x})$ *pentru orice* $t\geqslant t_0$, *unde* $U(\mathbf{x})$ *este o funcţie pozitiv definită, şi astfel ca* $-dV/dt$ *să fie pozitiv definită.*

Condiţia suplimentară pentru stabilitatea asimptotică este că $-dV/dt$ trebuie să fie pozitiv definită. Demonstraţia acestei teoreme începe acolo unde se termină demonstraţia teoremei precedente. Se alege orice e care satisface condiţia $0\leqslant e\leqslant r$. Trebuie arătat că există un t_e astfel ca $\mathbf{x}^+$ să fie conţinut în S_e pentru orice $t\geqslant t_e$. În demonstraţiea teoremei anterioare, valoarea lui r depindea numai de R şi nu de t_0. De aceea putem admite existenţa unui δ dependent numai de e, astfel ca o traiectorie ce trece printr-un punct al S_δ la momentul t_e, să rămînă în S_e pentru $t>t_e$. Pentru a completa demonstraţia, trebuie să arătăm că $\mathbf{x}^+$ care începe în S_r la momentul t_0, trece printr-un punct din S_δ. Fie w valoarea minimă a lui $W(\mathbf{x})$ pentru $\mathbf{x}$ astfel ca $\delta\leqslant||\mathbf{x}||\leqslant R$. Atunci, cum $V(\mathbf{x},t)\geqslant W(\mathbf{x})$ pentru $t\geqslant t_0$, $V[\mathbf{x}(t),t]<w$ numai dacă $\mathbf{x}(t)$, — care rămîne în S_R pentru orice $t\geqslant t_0$, — este şi în S_δ. Vom folosi acest fapt pentru a arăta, prin contradicţie, că $\mathbf{x}(t)$ este conţinut în S_δ pentru unele $t\geqslant t_0$. Deoarece $-dV/dt$ este pozitiv definită, o funcţie $\hat{W}(\mathbf{x})$ pozitiv definită există, astfel ca $-dV/dt\geqslant\hat{W}$ pentru orice $t>t_0$. Fie $\hat{w}$ valoarea minimă a lui $\hat{W}(\mathbf{x})$ pentru $\mathbf{x}$ astfel ca $\delta/2\leqslant||\mathbf{x}||\leqslant R$. Atunci, cu restricţia $\delta/2\leqslant||\mathbf{x}||\leqslant R$, avem

$$V[\mathbf{x}(t),t]=V[\mathbf{x}(t_0),t_0]+\int_{t_0}^{t}\frac{dV[\mathbf{x}(\tau),\tau}{d\tau}\,d\tau.$$

Cum $dV/dt\leqslant-\hat{w}$, din această relaţie rezultă inegalitatea

$$V[\mathbf{x}(t),t]\leqslant V[\mathbf{x}(t_0),t_0]-(t-t_0)\hat{w}, \tag{143}$$

---

[1] O regiune se zice că este închisă, dacă include toate punctele frontierei sale.

valabilă pentru $\delta/2 \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant R$. Acum, să presupunem că $\mathbf{x}(t)$ nu se găseşte în S_δ pentru orice $t \geqslant t_0$; adică $\delta \leqslant \|\mathbf{x}(t)\| \leqslant R$ pentru orice $t \geqslant t_0$. Atunci, din (143),

$$V[\mathbf{x}(t),t] < w \text{ pentru } t > t_0 + \{V[\mathbf{x}(t_0),t_0)] - w\}/\hat{w}.$$

Aceasta este o contradicţie, deoarece $V[\mathbf{x}(t),t] < w$ numai dacă $\mathbf{x}(t)$ este în S. Demonstraţia este acum completă.

Rămîne chestiunea stabilităţii asimptotice „în -mare", pe care o vom atinge cu ajutorul unei teoreme. Condiţia suplimentară în această teoremă impune utilizarea unui tip particular de funcţie pozitiv definită, pe care o vom defini acum. Exprimat aproximativ, o funcţie este *nemărginită radial* dacă $V(\mathbf{x},t)$ creşte fără limite, independent de valoarea lui $t \geqslant t_0$, cînd $\mathbf{x}$ se depărtează de origină sau, în mod alternativ cînd $\|\mathbf{x}\|$ creşte. În termeni mai precişi, $V(\mathbf{x},t)$ este *nemărginită radial* dacă, dat fiind orice $M > 0$, există un m astfel ca $V(\mathbf{x},t) > M$ pentru orice $t > t_0$, ori de cîte ori $\|\mathbf{x}\| > m$. Cu aceasta, se poate enunţa acum teorema.

Teorema 19. *Origina este asimptotic stabilă „în-mare", dacă există o funcţie Liapunov definită oriunde (ecuaţia de stare are o soluţie), astfel ca $V(\mathbf{x},t) \leqslant U(\mathbf{x})$ pentru orice $t \geqslant t_0$, unde $U(\mathbf{x})$ este o funcţie pozitivă definită, astfel ca $W(\mathbf{x})$ să fie radial nemărginită*[1] *şi ca $-dV/dt$ să fie pozitiv definită.*

Demonstraţia nu diferă mult de cele date pentru cele două teoreme anterioare. De aceea este lăsată ca un exerciţiu.

Exemple. Să ilustrăm unele din teoriile precedente prin exemple. Se consideră circuitul arătat în fig. 10.17. El este descris de ecuaţia de stare,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 - x_2 \\ x_1 - 4x_2 - \operatorname{th} x_2 \end{bmatrix}.$$

Deşi nu vom proceda aşa, se poate arăta că soluţia acestei ecuaţii de stare există şi este unică pentru toţi vectorii de stare iniţială $\mathbf{x}(t_0)$; adică scalarul E care apare în definiţiile de stabilitate este infinit.

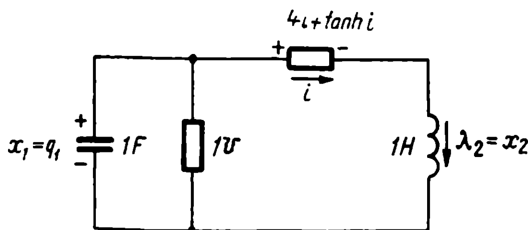


Fig. 10.17. Circuit neliniar.

[1] Vezi nota de subsol la pag. 731.

O decizie în privința stabilității impune să descoperim mai întîi o funcție Liapunov. Nu există vreun algoritm pentru aceasta. Ghidul este experiența; astfel, ca să cîștigăm ceva experiență, să vedem dacă funcția pozitiv definită

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$$

este o funcție Liapunov. Pentru a determina aceasta trebuie să examinăm dV/dt, adică

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}) = x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_2 \operatorname{th} x_2.$$

Ultimul membru se obține substituind dx_1/dt și dx_2/dt din ecuația de stare. Este clar că $-dV/dt$ este pozitiv definită. Astfel, V este o funcție Liapunov, care, de asemenea, satisface și restricțiile suplimentare ale teoremei de stabilitate asimptotică „în-mare". S-ar părea că s-a uitat să se considere problema de alegere a lui $U(\mathbf{x})$; totuși, un moment de reflexie ne poate convinge că, atunci cînd V este invariant în timp, condiția suplimentară care cere să existe un $U(\mathbf{x})$, cu proprietățile indicate, este banal satisfăcută dacă punem $U(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})$. Acum este evident că originea este asimptotic stabilă „în-mare".

Nu este totdeauna posibil să se stabilească stabilitatea asimptotică „în-mare". Adeseori numai stabilitatea locală poate fi certificată. Ca exemplu, să considerăm circuitul din fig. 10.18.

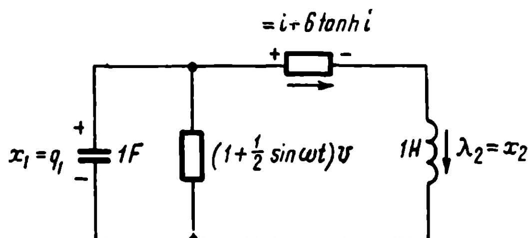


Fig. 10.18. Circuit variabil în timp, neliniar.

Ecuația de stare a acestui circuit este următoarea:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1 + \frac{1}{2}\sin\omega t)x_1 - x_2 \\ x_1 - 6 \operatorname{th} x_2 + x_2 \end{bmatrix},$$

la care se poate arăta că există o soluție unică pentru toți vectorii de stare inițială. Vom folosi aceeași funcție pozitiv-definită ca mai sus, pentru a încerca funcția Liapunov, adică,

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$$

Spre a verifica dacă aceasta este o funcție Liapunov, trebuie evaluat dV/dt, ceea ce dă

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}) = x_1 \frac{d}{dt} x_1 + x_2 \frac{d}{dt} x_2$$

$$= -\left(1 + \frac{1}{2}\sin\omega t\right) x_1^2 - 6x_2 \operatorname{th} x_2 + x_2^2.$$

Rîndul al doilea rezultă prin substituirea lui dx_1/dt şi dx_2/dt din ecuaţia de stare. Se observă că $-dV/dt$ este pozitiv definită dacă $6x_2\text{th}x_2 - x_2^2$ este pozitivă pentru $x_2 \neq 0$. Aceasta este aproximativ echivalent cu $|x_2|<5{,}99999$. Acum, în regiunea deschisă $|x_2|<5{,}99999$ (toate valorile lui x_1 sînt permise), $-dV/dt$ este mărginită în jos, de funcţia pozitiv-definită

$$\frac{1}{2}x_1^2 + 6x_2\text{th}x_2 - x_2^2,$$

care se poate considera a fi $\hat{W}(x)$. Aceasta este tocmai o funcţie $\hat{W}(x)$; mai pot fi găsite şi alte funcţii pozitiv-definite, care să fie $\hat{W}(x)$.

Toate condiţiile teoremei despre stabilitatea asimptotică au fost satisfăcute; prin urmare origina este stabilă asimptotic local. De fapt, se poate arăta că, deşi nu vom face asta, toate traiectoriile ce încep din interiorul cercului cu raza 5,99999, în planul $x_1 - x_2$, se apropie asimptotic de origină.

Teorema instabilităţii

Teoremele de stabilitate dau numai condiţii suficiente pentru stabilitate, dar *nu condiţii necesare*. De aceea, dacă condiţiile din teoremă nu sînt satisfăcute, tot mai este posibil pentru origină sau alt punct singular cercetat, să fie stabil într-unul din cele trei sensuri considerate. O altă cale prin care chestiunea stabilităţii poate fi lămurită cert, este găsirea condiţiilor suficiente pentru *instabilitate*. Astfel, dacă se poate arăta că toate condiţiile de suficienţă a vre-unei teoreme de instabilitate sînt satisfăcute, atunci origina nu poate fi stabilă. Următoarea teoremă de instabilitate, datorită lui Şetaev, îmbrăţişează două teoreme de instabilitate, formulate iniţial de Liapunov :

Teorema 20. *Fie D o regiune deschisă, conţinînd origina şi fie $\tilde{D}$ o regiune deschisă în D, astfel ca :* 1) *origina să fie un punct de frontieră în $\tilde{D}$*; 2) *pentru orice $t \geqslant t_0$, funcţia $V(\mathbf{x},t)$ să fie pozitivă şi, împreună cu primele ei derivate parţiale, să fie continuă în D*; 3) $dV(\mathbf{x},t)/dt \geqslant \hat{W}(x)$ *pentru $t>t_0$, unde $\hat{W}(x)$ este pozitivă şi continuă în $\tilde{D}$*; 4) $V(\mathbf{x},t) \leqslant U(\mathbf{x})$ *pentru $t>t_0$, unde $U(\mathbf{x})$ este continuă în $\tilde{D}$ şi* 5) $U(\mathbf{x})=0$ *la punctele de frontieră ale lui $\tilde{D}$ în D. — Atunci origina este instabilă.*

Demonstraţia e scurtă şi se înţelege uşor cu ajutorul fig. 10.19.
Se alege R astfel ca $\tilde{D}$ să nu fie plasată complet în interiorul lui S_R. Pentru orice număr pozitiv, oricît de mic $r \leqslant R$, este posibil să se găsească un punct situat atît în S_r, cît şi în . Fie $\mathbf{x}(t_0)$ un astfel de punct. Prin condiţiile 4) şi 5), există o regiune conţinută întreagă în , astfel ca $U(\mathbf{x})$ să fie mai mare decît $V[\mathbf{x}(t_0),t_0]>0$; notăm aceasta prin $\tilde{D}_r$. Fie $\hat{w}>0$. cea mai mare

limită inferioară atribuită lui $\hat{W}(x)$ la punctele comune lui $\tilde{D}_r$ şi S_R. Atunci

$$V[\mathbf{x}(t),t] = V[\mathbf{x}(t_0),t_0] + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau} V[\mathbf{x}(\tau),\tau]d\tau$$

duce la inegalitatea

$$V[\mathbf{x}(t),t] \geqslant V[\mathbf{x}(t_0),t_0] + (t-t_0)\hat{w},$$

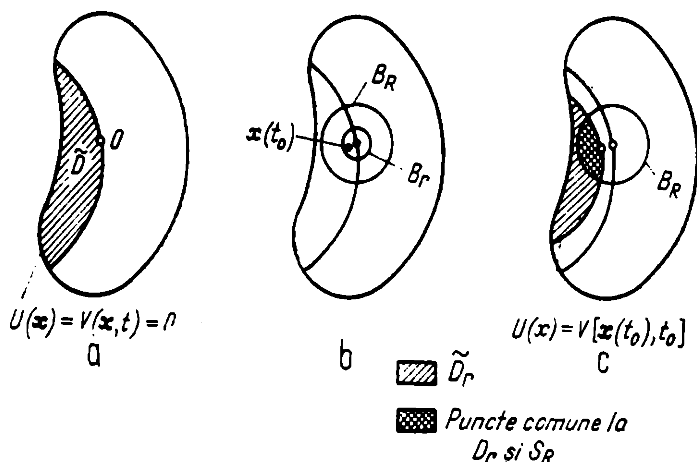


Fig. 10.19. Origină instabilă.

deoarece $V(\mathbf{x},t) \geqslant V[\mathbf{x}(t_0),t_0]$ şi $dV/dt \geqslant \hat{w}$ în aceleaşi puncte. Prin condiţia 4), $V(\mathbf{x},t)$ este mărginită în sus, la acele puncte care sînt comune lui $\tilde{D}_r$ şi S_R. Prin modul cum s-a construit $\tilde{D}_r$, traiectoria trebuie să atingă de fapt un punct de pe B_R, frontiera lui S_R.

Pentru a ilustra această teoremă de instabilitate, să considerăm circuitul arătat în fig. 10.12.

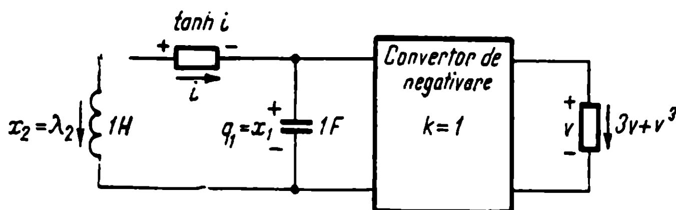


Fig. 10.20. Circuit neliniar instabil.

El are ecuaţia de stare,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_1^3 - x_2 \\ x_1 - \text{th}\, x_2. \end{bmatrix}.$$

Este posibil să se arate, deşi nu vom face aceasta, că există o soluţie unică pentru orice $\mathbf{x}(t_0)$. Funcţie a

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2$$

este pozitivă pentru $|x_2| < |x_1|$. Dacă trebuie să fie satisfăcute condiţiile teoremei de instabilitate, atunci trebuie să arătăm că $dV/dt > 0$. pentru $|x_2| < |x_1|$ într-o vecinătate oarecare a originei. Pentru a începe, avem

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}) = x_1\frac{d}{dt}x_1 - x_2\frac{d}{dt}x_2.$$

Substituind dx_1/dt şi dx_2/dt, se obţine

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + x_1^4 - 2x_1x_2 + x_2\text{th}x_2$$

$$= 2x_1^2 + x_1^4 + (x_1 - x_2)^2 + x_2(\text{th}x_2 - x_2).$$

Rîndul al doilea s-a obţinut din primul, adunînd şi scăzînd pe x_2^2. Este evident că

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}) > 2x_1^2 + x_1^4 + (x_1 - x_2)^2 - x_2^2$$

$$> x_1^2 + x_1^4 + (x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - x_2^2).$$

Ultima expresie este clar pozitivă pentru $|x_2| < |x_1|$ în orice vecinătate a originei. Astfel origina este instabilă.

Construcţia funcţiei Liapunov

Să analizăm care este natura teoremelor de stabilitate. Nu vom da o regulă precisă de urmat ; adică, nu există o serie definită de paşi, la capătul cărora să se poată obţine o concluzie neîndoielnică, dacă sau nu circuitul

este stabil. Mai de grabă teoremele ne indică modul de a „vîna" rezultatul. Ele cer să căutăm o funcţie Liapunov, a cărei valoare să rămînă mărginită de o funcţie pozitiv-definită, invariantă în timp. Găsirea unei funcţii Lipunov este o acţiune creatoare, inductivă, nu o acţiune deductivă.

Forma funcţională a funcţiei Liapunov nu este fixată rigid. Pe de o parte, aceasta este un avantaj, deoarece procură o mai mare flexibilitate în găsirea stabilităţii, prin încercarea mai multor funcţii Liapunov posibile. Pe de altă parte, este un dezavantaj,deoarece nu există linii directoare pentru găsirea unei funcţii Liapunov posibile, din nenumăratele funcţii pozitiv-definite ce le avem la îndemînă. Vom discuta acum o funcţie Liapunov particulară, pentru circuite invariate în timp, şi vom stabili, în consecinţă, un grup alternativ de condiţii pentru stabilitate. În continuare, vom discuta o metodă de generare a funcţiilor Liapunov.

Să presupunem că circuitul considerat este descris de următoarea ecuaţie de stare, invariantă în timp :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{144}$$

Să notăm în mod explicit că $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ este o funcţie vectorială cu valori reale, de $\mathbf{x}$. În căutarea unei funcţii posibile Liapunov, să considerăm

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{145}$$

Aceasta este, în primul rînd, o funcţie pozitiv-definită. Trebuie deci să examinăm derivata dV/dt. Derivata în timp a lui $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ este

$$\frac{d}{dt}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x})\,; \tag{146}$$

unde $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ este matricea Jacobiană a lui $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, adică

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{147}$$

Apoi, diferenţiind pe (145) şi substituind apoi pe (146), se obţine

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}) = \left[\frac{d}{dt}\mathbf{f}'(\mathbf{x})\right]\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}'(\mathbf{x})\left[\frac{d}{dt}\mathbf{f}(\mathbf{x})\right]$$

$$= \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{F}'(\mathbf{x}) + \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$$= \mathbf{f}'(\mathbf{x})[\mathbf{F}'(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x})]\mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (148)$$

Matricea $-[\mathbf{F}'(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x})]$ este simetrică şi reală ; dacă este de asemenea şi pozitiv semidefinită în vreo vecinătate a originei, atunci $-dV/dt > 0$ şi teorema de stabilitate este verificată. Alte relativ evidente condiţii, pot duce la stabilitatea asimptotică locală sau globală. Aceste rezultate, obţinute de Krasovski, sînt enunţate precis în următoarea teoremă :

Teorema 21. *Fie* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *diferenţiabilă în raport cu* $\mathbf{x}$ *şi fie* $\mathbf{f}(0)=0$; *atunci origina este* : 1) *stabilă, dacă* $-[\mathbf{F}'(\mathbf{x})+\mathbf{F}(\mathbf{x})]$ *este pozitiv semidefinită în vreo vecinătate a originei*, 2) *asimptotic stabilă, dacă* $-[\mathbf{F}'(\mathbf{x})+\mathbf{F}(\mathbf{x})]$ *este pozitiv definită în vreo vecinătate a originei sau* 3) *asimptotic stabilă „în-mare", dacă* $-[\mathbf{F}'(\mathbf{x})+\mathbf{F}(\mathbf{x})]$ *este pozitiv definită pentru orice* $\mathbf{x}$ *şi* $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *este nelimitată radial.*

Exemplu. Pentru a ilustra această teoremă, să considerăm circuitul din fig. 10.21. Ecuaţia de stare a acestui circuit este

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x x_2 \\ x_1 - 3x_2 + x_2^3 - x_3 \\ x_2 - 4x_3 - \text{th}\, x_3 \end{bmatrix}$$

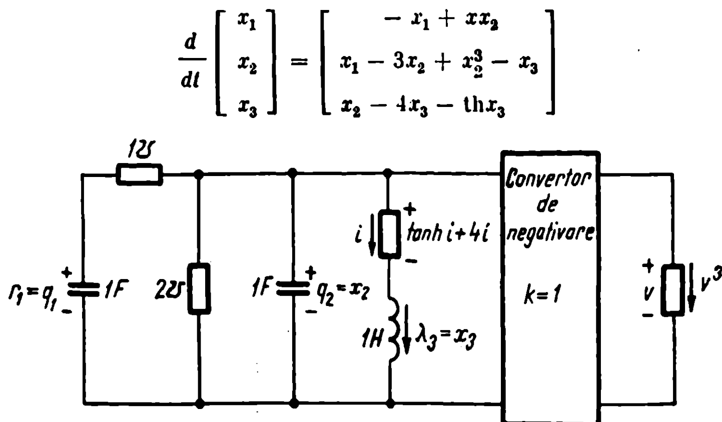


Fig. 10.21. Circuit neliniar asimptotic stabil.

şi are o soluţie unică pentru orice $\mathbf{x}(t_0)$. Matricea Jacobiană este

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3+3x_2^2 & -1 \\ 0 & 1 & -4-\text{sch}^2 x_3 \end{bmatrix}.$$

Adunînd pe $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ cu $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ şi luînd negativa matricei rezultante, se găseşte

$$-[\mathrm{F}'(\mathrm{x}) + \mathrm{F}(\mathrm{x})] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6-6x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8+2\mathrm{sch}^2 x_3 \end{bmatrix}.$$

Cofactorii principali ascendenţi sînt

$$2,\ 8 - 12x_2^2,\ \text{şi}\ (8 - 12x_2^2)\,(8 + 2\mathrm{sch}^2 x_3).$$

Este clar că aceşti cofactori sînt pozitivi şi, deci, $-[\mathbf{F}'(\mathbf{x})+\mathbf{F}(\mathbf{x})]$ este pozitiv definită pentru toţi x_1, $x_2^2 < \frac{2}{3}$ şi pentru toţi x^3 [1]. Astfel, origina este asimptotic stabilă. Stabilitatea asimptotică nu este globală, deoarece x_2, care face ca $-[\mathbf{F}'(\mathbf{x}) + \mathbf{E}(\mathbf{x})]$ să fie pozitiv definită, este mărginit de sus şi de jos.

Această ultimă teoremă, deşi utilă, este oarecum restrictivă, deoarece funcţia Liapunov este complet specificată odată ce a fost dată ecuaţia de stare. Pentru a utiliza în întregime teoremele de stabilitate, trebuie să dispunem de o oarecare libertate în alegere a diferitelor funcţii Liapunov posibile. Este evident totuşi, că e preferabil să avem ceva mai mult decît o metodă de tatonare succesivă. Sînt necesare unele linii directoare pentru generarea funcţiilor Liapunov. Vom discuta acum o astfel de procedură.

În cele ce urmează, ecuaţia de stare poate fi considerată şi variabilă în timp; totuşi, funcţia Liapunov se cere să fie invariantă în timp. Derivata în timp a lui V în lungul traiectoriei ecuaţiei de stare este

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}) = [\nabla V(\mathbf{x})]'\, f(\mathbf{x},t) \tag{149}$$

unde

$$\nabla V = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \\ \vdots \\ \nabla V_n \end{bmatrix}$$

---

[1] Vezi par. 7.2. pentru condiţiile de „pozitiv-definit" ale unei matrice. Apoi, vezi Problema 18, în Cap. 7, pentru criteriul particular de pozitiv-definit, folosit aici.

este gradientul lui V. Din (149) este clar că semnul lui dV/dt este determinat de semnul gradientului lui V, deoarece $\mathbf{f}(\mathbf{x}),t)$ este cunoscut. Deci, în loc de a căuta o funcţie Liapunov V, a cărei derivată să aibe semnul dorit, putem căuta o funcţie gradient ∇V, care face ca dV/dt să aibe semnul dorit în (149). Atunci, funcţia Liapunov V propriu-zisă se poate determina prin integrala de linie a gradientului, de la 0 la $\mathbf{x}$:

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} [\nabla V(\mathbf{y})]' \, d\mathbf{y} \tag{150}$$

Dacă funcţia scalară V trebuie să fie unic determinată prin această integrală de linie a gradientului ei, atunci matricea Jacobiană a lui ∇V, în raport cu $\mathbf{x}$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \nabla V_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \nabla V_n}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial \nabla V_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{151}$$

trebuie să fie simetrică [1]. Presupunem că $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ este simetrică şi deci $V(\mathbf{x})$ este unică. Aceasta înseamnă că integrala este independentă de drumul de integrare. Astfel, putem folosi drumul cel mai convenabil. Un astfel de drum se poate întinde în lungul axelor de coordonate sau paralel cu ele, ca în următoarea formă dezvoltată a lui (150):

$$\begin{aligned} Vx() = & \int_0^{x_1} \nabla V(y)_1 \, dy_1 \Big|_{y_2=0,\, y_3=0,\, \cdots,\, y_n=0} \\ & + \int_0^{x_2} \nabla V(y)_2 \, dy_2 \Big|_{y_1=x_1,\, y_3=0,\, \cdots,\, y_n=0} \\ & + \cdots\cdots \\ & + \int_0^{x_n} \nabla V(y)_n dy_n \Big|_{y_1=x_1,\, y_2=x_2,\, \cdots,\, y_{n-1}=x_{n-1}} \end{aligned} \tag{152}$$

[1] Condiţia ca $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ să fie simetrică este echivalentă cu condiţia ca rot $\nabla V(\mathbf{x})$ să fie zero. După o teoremă cunoscută din analiza vectorială, cînd rotorul unui vector este zero, vectorul este gradientul unei funcţii scalare. Pentru detalii a se vedea H. Lass, *Vector and Tenser Analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1950, p. 297.

După cum se vede, problema găsirii unei funcţii Liapunov prin alegerea unei funcţii pozitiv definite $V(\mathbf{x})$ şi apoi asigurarea că $-dV/dt$ este non-negativ sau pozitiv definită, a fost înlocuită prin alegerea unei funcţii $\nabla V(\mathbf{x})$, astfel ca $-dV/dt$ să fie non negativ sau pozitiv definită, determinată din (149), şi $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ să fie simetrică, iar apoi prin asigurarea că $V(\mathbf{x})$ este pozitiv definită. De obicei, această ultimă metodă, denumită metoda gradientului variabil, comportă mai puţină operaţie de ghicire decît altele. Totuşi, această metodă de găsire a unei funcţii Liapunov nu este efectiv decisivă; dacă $V(\mathbf{x})$ găsită din funcţia de gradient aleasă, nu rezultă a fi pozitiv definită — , nu se poate conchide că origina nu este stabilă în vreun sens. Înseamnă numai că nu s-a găsit încă o funcţie Liapunov convenabilă.

Se obişnuieşte să se înceapă prin alegerea unui gradient de V avînd forma

$$\nabla V(x) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n \end{bmatrix} \tag{153}$$

Scalarii α_{ij} pot fi funcţii de $\mathbf{x}$, deşi pentru uşurinţa evaluării ulterioare a integralei de linie (152) este de dorit ca ei să fie constanţi.

Metoda gradientului variabil poate fi rezumată printr-un simplu set de reguli : 1) se determină dV/dt după cum e specificat în (149), folosind $\nabla V(\mathbf{x})$ din (153) ; 2) se aleg coeficienţii α_{ij}, astfel ca $-dV/dt$ să fie non-negativ sau pozitiv definită şi $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ să fie simetrică ; 3) se evaluează $V(\mathbf{x})$, utilizînd integrala de linie din (152) şi 4) se determină dacă da sau nu $V(\mathbf{x})$ este pozitiv definită.

Exemplu. Pentru a ilustra metoda cu gradientul variabil, să considerăm circuitul din fig. 10.22.

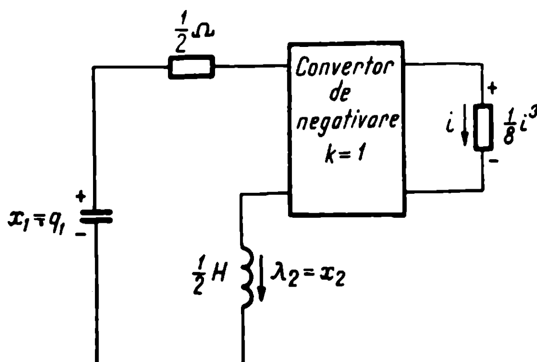


Fig. 10.22. Circuit neliniar.

Ecuaţia de stare este

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_1 - x_2 + x_2^3 \end{bmatrix}.$$

Mai întîi calculăm pe dV/dt din (149) după cum urmează :

$$\frac{d}{dt} V(x) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}x_1 + x_{12}\alpha_2 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_1 - x_2 + x_2^3 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_{21}x_1^2 + [-2\alpha_{11} - \alpha_{21}(1 - x_2^2) + \alpha_{22}]x_1x_2$$

$$+ [-2\alpha_{12} - \alpha_{22}(1 - x_2^2)]x_2^2.$$

Să alegem pe α_{11} aşa ca să se anuleze coeficientul lui x_1x_2, adică

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2}[\alpha_{22} - \alpha_{21}(1 - x_2^2)].$$

Apoi, dacă $-dV/dt$ trebuie să fie pozitiv definită, trebuie să avem :

$$-\alpha_{21} > 0$$

$$2\alpha_{12} + \alpha_{22}(1 - x_2^2) > 0.$$

Fie $\alpha_{21} = -b$ şi $\alpha_{22} = a$, unde a şi b sînt constante pozitive
Atunci

$$\nabla V(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} \frac{a}{2}x_1 + \frac{b}{2}(1 - x_2^2)x_1 + \alpha_{12}x_2 \\ -bx_1 + ax_2 \end{bmatrix}$$

şi

$$\mathbf{D}(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} + \frac{b}{2}(1 - x_2^2) + \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial x_1}x_2 & -bx_2x_1 + \alpha_{22} + \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial x_2}x_2 \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Dacă $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ trebuie să fie simetrică, atunci α_{12} trebuie să satisfacă ecuaţia diferenţială parţială

$$x_2\frac{\partial \alpha_{12}}{\partial x_2} + \alpha_{12} = -b + bx_1x_2.$$

După cum se poate verifica uşor, soluţia acestei ecuaţii este:

$$\alpha_{12} = -b + \frac{b}{2} x_1 x_2.$$

Deci, substituind această expresie pentru α_{12} în relaţia lui $\nabla V(\mathbf{x})$, se obţine:

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{a+b}{2} x_1 - b x_2 \\ -b x_1 + a x_2 \end{bmatrix}.$$

Înainte de a aplica integrala de linie gradientului $\nabla V(\mathbf{x})$, trebuie să verificăm dacă $-dV/dt$ este pozitiv definită pentru coeficienţii aleşi α_{21} şi α_{22}, precum şi pentru α_{12} rezultat din condiţia de simetrie a lui $\mathbf{D}(\mathbf{x})$. Pentru a verifica dacă $-V dt$ este sau nu pozitiv definită, trebuie să dovedim că cele două inegalităţi enunţate anterior sînt sau nu satisfăcute. Mai întîi $\alpha_{21} = -b$, deci $-\alpha_{21}$ este pozitiv. Apoi

$$2\alpha_{12} + \alpha_{22}(1 - x_2^2) = (a - 2b) + (bx_1 - ax_2)x_2;$$

aşadar, pentru $a > 2b$, iar x_1 şi x_2 suficient de mici, $2\alpha_{12} + \alpha_{22}(1 - x_2^2)$ este pozitivă. Integrala de linie a lui $\nabla V(\mathbf{x})$, conform cu (152) este

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} \frac{a+b}{2} y_1\, dy_1 + \int_0^{x_2} (-bx_1 + ay_2)\, dy_2$$

$$= \frac{a+b}{4} x_1^2 - bx_1x_2 + \frac{a}{2} x_2^2.$$

Această funcţie poate fi exprimată ca forma pătratică

$$V(\mathbf{x}) = [x_1\ x_2] \begin{bmatrix} \frac{a+b}{4} & -\frac{b}{2} \\ -\frac{b}{2} & \frac{a}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

care se poate verifica uşor că este pozitiv definită, cu condiţia ca $a > 0$, – o condiţie deja impusă, şi $a^2 + ab > 2b^2$. Această ultimă inegalitate este satisfăcută cînd este satifăcută condiţia anterioară, $a > 2b$. Astfel, pentru $a > 2b$, s-a construit o funcţie Liapunov astfel că $-dV/dt$ este pozitiv definită, într-o vecinătate potrivit de mică faţă de origină. Aceasta înseamnă că origina este asimptotic stabilă.

În acest paragraf s-au introdus conceptele fundamentale de stabilitate în sens Liapunov, relativ la un punct singular, s-au demonstrat unele teoreme de bază asupra stabilităţii şi s-au dat două metode, prin care să se ghideze cercetarea pentru găsirea unei funcţii Liapunov. Este puţin faţă de ceea ce se cunoaşte în acest domeniu. Conceptul de stabilitate poate fi

extins, într-un mod util, la stabilitatea în raport cu un grup de puncte. De asemenea, se mai cunosc şi alte linii directoare (ghidaje) pentru alegerea unei funcţii Liapunov, în anumite clase de probleme. Aceste chestiuni avansate sînt tratate, între altele, în cărţile despre stabilitate citate în bibliografie.

PROBLEME

P1. Să se stabilească ecuaţiile de stare pentru circuitele variabile în timp arătate în fig. 10.P1, folosind vectorul de stare din (5). Se va repeta cu vectorul de stare din (10). Parametrii elementelor sînt daţi în F, Ω sau H.

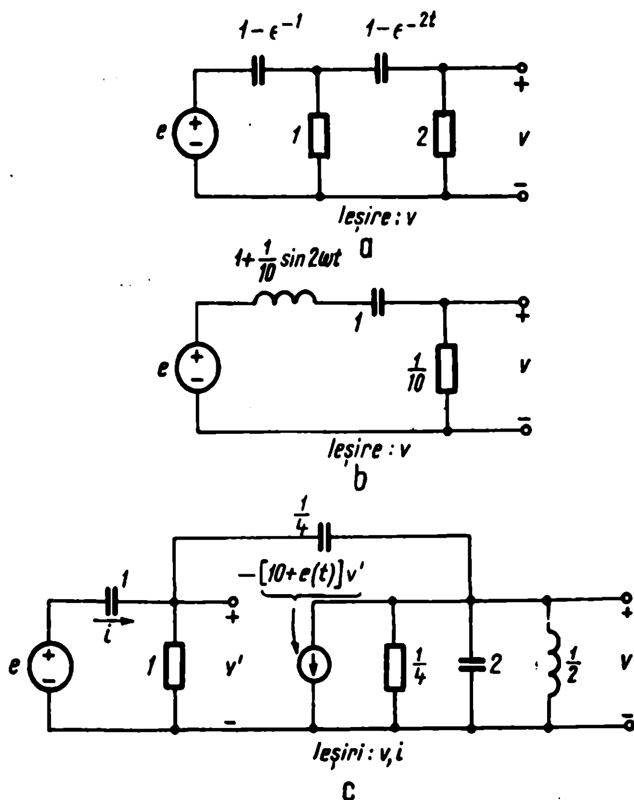


Fig. 10.P.1.

P2. Se presupune că avem

$$\mathscr{A}(t)\mathscr{A}(i) = \mathscr{A}(i)\mathscr{A}(t)$$

pentru orice t, $i \geqslant t_0$. Să se demonstreze că

$$\mathscr{A}(t)\left(\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau)d\tau\right) = \left(\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau)d\tau\right)\mathscr{A}(t)$$

pentru orice $t \geqslant t_0$.

P3. Folosind condiţia din P2, să se determine care din următoarele matrice $\mathscr{A}(t)$ se comută cu integrala ei $\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau)\, d\tau$

pentru orice $t \geqslant t_0$:

$$(a)\ \mathscr{A}(t) = \begin{bmatrix} 1+t & -2 \\ 2 & 3t^2 \end{bmatrix}, \quad (b)\ \mathscr{A}(t) = \begin{bmatrix} -(2+t) & -3 \\ 3 & -(2+t) \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \mathscr{A}(t) = \begin{bmatrix} -(1+2t) & 4t \\ 4t & -(1+2t) \end{bmatrix}, \quad (d)\ \mathscr{A}(t) = \begin{bmatrix} 2+\sin t & -t \\ t & 3+\sin t \end{bmatrix}.$$

P4. Pentru acele matrice din P3, care se comută cu integrala lor $\int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau)\, d\tau$, pentru orice $\geqslant t_0$, să se exprime $\exp \int_{t_0}^{t} \mathscr{A}(\tau) d\tau$, soluţia lui (21), ca o matrice.

P5. Care din următoarele ecuaţii de stare, cu $t_0 = 0$, au o soluţie în sens larg? Dintre acestea din urmă, care au o soluţie în sens obişnuit? Dintre acelea care au o soluţie numai în sens larg, să se arate dacă ecuaţia omogenă asociată are sau nu o soluţie în sens obişnuit.

$$(a)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\operatorname{th} t & 2 & -4 \\ -2 & -u(t) & 2 \\ 4 & 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) - u(t-1) \\ 2t\, \varepsilon^{-t} \end{bmatrix}$$

$$(b)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-5}{t^{1/3}} & -1 \\ 1 & \dfrac{-3}{(1-t)^{1/3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} [tu(t) - 2tu(t-1)]$$

$$(c)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} r_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2t) & -1 \\ 2 & -2+t\,\varepsilon^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -(t-1)u(t-1) \end{bmatrix}$$

(d) $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-2t^2}{1+t^2} & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -1+\varepsilon^{-t} \\ 2t & -1+\varepsilon^{-t} & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\left[\frac{-2}{(2-t)^{1/3}}\right]$$

(e) $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -8+t\varepsilon^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{(t-1)^2} \\ \sin t \end{bmatrix}$$

P. 6. Să se determine $\mathbf{Y}(t)$ şi apoi $\mathbf{Q}(t)$ şi $\mathbf{P}$ în $\mathbf{Y}(t)=\mathbf{Q}(t)\varepsilon^{\mathbf{P}t}$, cînd

(a) $$\mathscr{A}(t) = \begin{bmatrix} -2+\sin t & +1 \\ -1 & -4+\sin t \end{bmatrix}$$

(b) $$\mathscr{A}(t) = \begin{bmatrix} -3+\frac{\cos t}{[2+\sin t]^{1/2}} & +2 \\ -2 & -2+\frac{\cos t}{(2+\sin t)^{1/2}} \end{bmatrix}$$

(c) $$\mathscr{A}(t) = \begin{bmatrix} -6+\sin t(\varepsilon^{\cos t}) & -1 \\ +1 & -2-\sin t\,(\varepsilon^{\cos t}) \end{bmatrix}.$$

(*Indicaţie*: În toate cazurile $\mathscr{A}(t)$ se comută cu $\int_t^t \mathscr{A}(\tau)d\tau$; de aceea (28) este valabilă).

P. 7. După Teorema 5, cu $t_0=0$, la care din următoarele ecuaţii de stare toate soluţiile sînt mărginite cînd $t\to\infty$?

(a) $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\varepsilon^{-t} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2-\varepsilon^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon^{-3t}\cos t \\ \varepsilon^{-3t}\sin t \end{bmatrix}$$

$$(b)\quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-\varepsilon^{-t} & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2+2t\varepsilon^{-t} \\ 6+\varepsilon^{-2t} & 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}[u(t)-u(t-1)]$$

$$(c)\quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos t}{1+t^2} & 1 & -1 & 2 \\ -1 & \frac{\varepsilon^{-2t}}{t^{1/2}} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \varepsilon^{-t} \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-t} & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}[t\,\varepsilon^{-t^2}]$$

$$(d)\quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+\frac{1}{t^{1/2}} & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon^{-t^2} \\ (1-t)\varepsilon^{-2t} \end{bmatrix}$$

P. 8. Dacă toate valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$ au partea reală negativă, să se aleagă α şi δ astfel încît

$$||\varepsilon^{\mathscr{A}t}|| \leqslant \delta\varepsilon^{-\alpha t}.$$

(*Indicaţie*: Se porneşte cu $\varepsilon^{\mathscr{A}t}$ exprimată în termeni de matrice constituante şi valori proprii a lui $\mathscr{A}$).

P. 9. După Teorema 6, cu $t_0=0$, pentru care din următoarele ecuaţii de stare, toate soluţiile sînt mărginite cînd $t\to\infty$?

$$(a)\quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+t\varepsilon^{-t} & 4 \\ -3 & 2-\frac{1}{1+t^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}[\sin 2t]$$

$$(b)\quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t^2}{1+t^4} & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3+t^2\varepsilon^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon^{-t} \\ u(t) \end{bmatrix}$$

(c) $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+\sin^2 t + \frac{2}{t^3} & -1+\varepsilon^{-t} \\ 1 & -2+\sin^2 t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4-\varepsilon^{-t} \\ \varepsilon^{-t}\cos t \end{bmatrix}$$

(d) $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+\sin t\cos t & -1+\mu\sin t \\ 1+\mu\sin t & -2+\sin t\cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(e) $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\varepsilon^{-t}\sin t & \mu(1-\varepsilon^{-t}) & t \\ \mu & -3+\cos t & 3 \\ -\mu & -3+\mu\varepsilon^{-t} & -3+\cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(f) $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t^3}+\cos 3t & -3\cos t + t\varepsilon^{-t} \\ 3\cos t - t\varepsilon^{-t} & \frac{t^2}{1+t^4}+\cos 3t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}[\varepsilon^{-t}-2\varepsilon^{-2t}]$$

P. 15. Să se verifice că circuitul din fig. 10.8 are ecuaţia de stare dată în pag 719.

P. 16. Se consideră următoarele ecuaţii de stare:

(a) $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\varepsilon^{-t} & (1+t) \\ -(1+t) & t^2\varepsilon^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon^{-t}-2\varepsilon^{-2t} \\ -u(t)+u(t-1) \end{bmatrix}$$

(b) $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & t\sin t \\ -t\sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}[t^2\varepsilon^{-t}].$$

Se va lua $t_0=0$. După Teorema 11, pentru care, din ecuaţiile de stare, toate soluţiile se apropie de zero cînd $t\to\infty$?

P. 17. Fie $Y(t)\,Y(\tau)^{-1}$ matricea stării de tranziţie asociată cu (71). Să se demonstreze teorema ce se obţine, cînd se înlocuieşte condiţia (72*a*) din Teorema 11, prin

$$\|Y(t)\,Y(\tau)^{-1}\| \leqslant \delta < \infty \text{ cu } t_0 \leqslant \tau \leqslant t, \text{ pentru } t \geqslant t_0.$$

Se aplică această nouă teoremă la exemplul ce urmează, Teoremei 11? Dacă da, să se găsească valoarea lui δ. Această nouă teoremă este mai puţin restrictivă decît Teorema 11, dar poate fi mai greu de aplicat. Să se explice de ce?

P. 18. Să se arate că ecuaţiile de stare din exemplele din par. 10.7 sînt acelea pentru circuitele din fig. 10.17, 10.18, 10.20, 10.21 şi 10.22.

P. 19. Să se stabilească ecuaţiile de stare pentru fiecare din circuitele din fig. 10. P. 19.

P. 20. Să se stabilească ecuaţiile de stare pentru amplificatorul reprezentat în fig. 10. P. 20*a*. Se va utiliza modelul de tranzistor arătat în fig. 10. P. 20*b*.

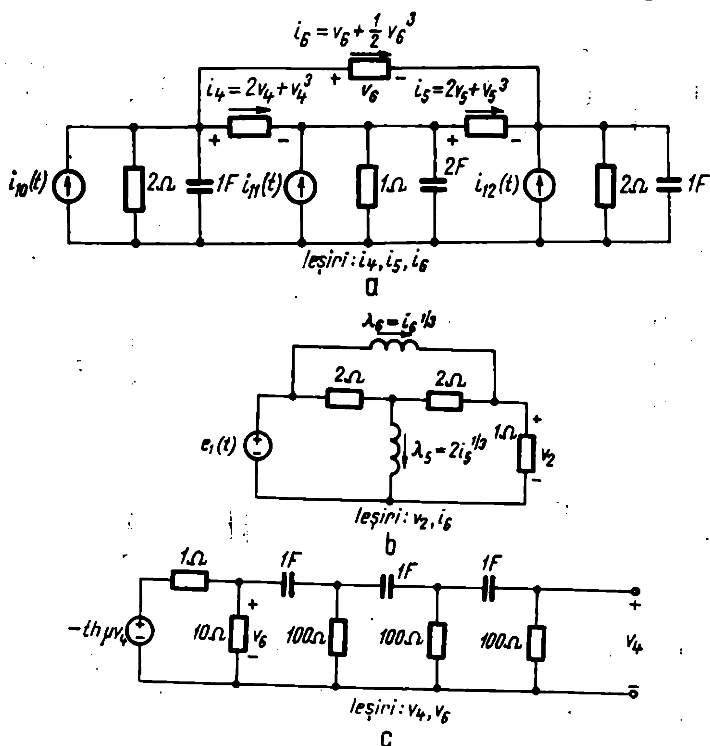
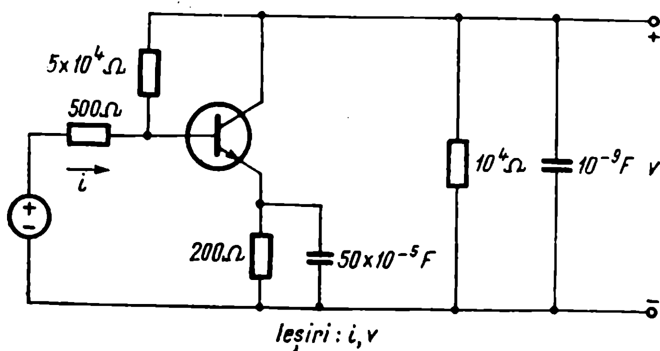


Fig. 10.P.19.



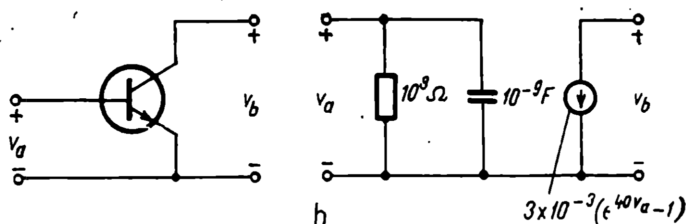


Fig. 10.P.20

P. 21. Să se stabilească ecuaţiile de stare ale amplificatorului din fig. 10. P. 21, cu modelul de tranzistor din fig. 10. P. 20*b*.

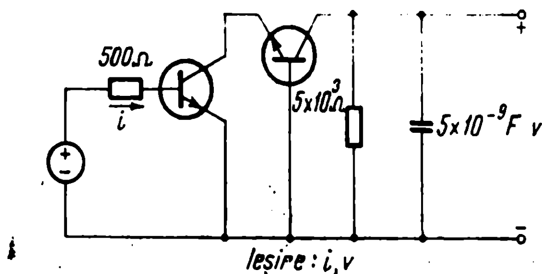


Fig 10.P.21

P. 22. Idem, pentru amplificatorul din fig. 10. P. 22, cu acelaşi model de tranzistor.

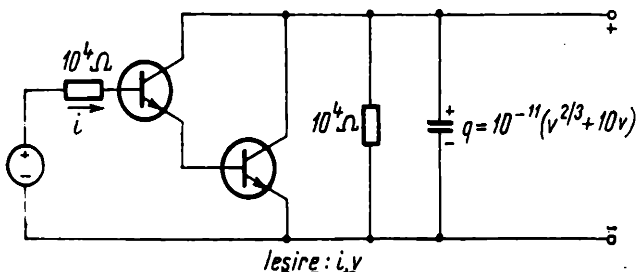


Fig. 10.P.22.

P. 23. Idem, pentru amplificatorul din fig. 10. P. 23, cu acelaşi model de tranzistor.

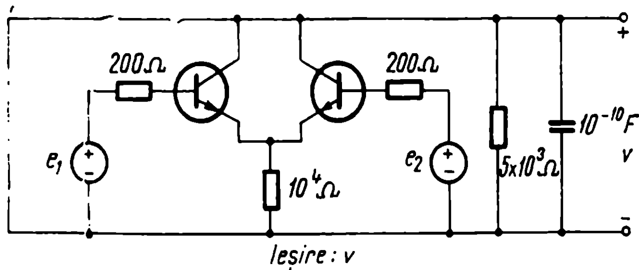


Fig. 10.P.23

P. 24. a) Să se arate că f_{Lt} din (81*a*) trebuie să fie identic zero sau f_{Lt} şi g_{Lt} din (85) trebuie să fie funcţii diferenţiabile, pentru ca să se exprime v_{Lt} şi v_{Lt} ca funcţii de **x**, **e** şi *d***e**/*dt*.

b) Să se arate că f_{Ct} din (75b) trebuie să fie identic zero sau că f_{Ct} şi g_{Ct} din (79) trebuie să fie funcţii diferenţiabile, pentru ca să se exprime i_{Ct} şi i_{Ct} ca funcţii de **x**, **e** şi *d***e**/*dt*.

P. 25. Se consideră circuitele (reţelele) care pot fi reprezentate ca interconexiunea unui subcircuit (subreţea) de capacităţi, a unuia de inductanţe şi a unuia de rezistenţe şi de surse independente, ca în fig. 10. P. 25*a*. Să se formuleze ecuaţia de stare în funcţie de parametrii de la porţile fiecărui subcircuit (uniport sau diport), cînd vectorul de stare este înlănţuirea unui set de variabile de sarcini q_C, de la porţi, liniar independente, pentru subcircuitul cu capacităţi şi a unui set de variabile de flux λ_L, de la porţi, liniar independente, pentru subcircuitul cu inductanţe. Să se aplice rezultatul pentru stabilirea ecuaţiei de stare la circuitul din fig. 10. P. 25*b*.

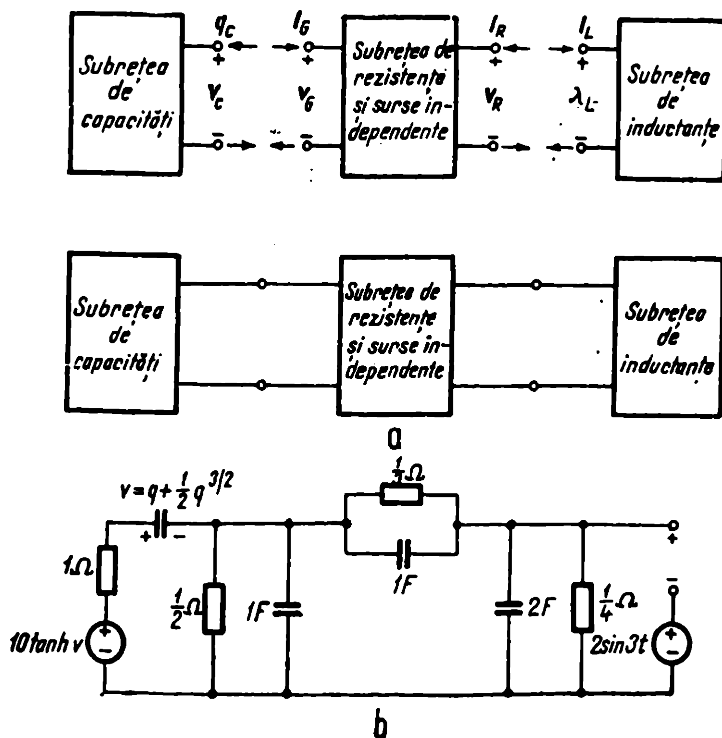


Fig. 10.P.25.

P. 26. Folosind Teorema 13, să se determine care dintre următoarele ecuaţii de stare are o soluţie pentru orice $t \geqslant 2$.

$$(a)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1+x_2-t\varepsilon^{-t} \\ -x_1-\dfrac{x_2^3}{1+x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$(b)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1+(x_2-x_1)\text{th}^2(x_2-x_1)+x_3 \\ (x_2-x_1)\,\text{th}^2(x_2-x_1)-\dfrac{x_2}{1+x_2^2} \\ -x_1-3x_3 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{t^2}{1+t^4}x_1+(x_2-x_1)^3+x_3-2\sin t \\ (x_2-x_1)^3-2(x_3-x_2)^3+2\cos t \\ x_1-2(x_3-x_2)^3-8\dfrac{x_3-x_3^3}{1+x_3^2} \end{bmatrix}$$

$$(d)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2-\varepsilon^{-t})x_1\text{th}^2x_1+\dfrac{x_2^3}{1+x_2^2} \\ -x_1+2\text{th}x_2+(1-\varepsilon^{-t}) \end{bmatrix}.$$

$$(e)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{x_1^3}{1+x_1^2}+x_2^2\,\text{th}x_2 \\ -(1-t\varepsilon^{-t})x_1-x_2 \end{bmatrix}.$$

P. 27. Să se demonstreze următoarea teoremă: *Se presupune că toate condițiile de existență din Teorema 12 sînt satisfăcute; atunci orice soluție a lui (98) în sens larg, egală cu* $\mathbf{x}(t_0)$ *la timpul* t_0, *poate fi extinsă să dea o soluție determinată pentru orice* $t>t_0$, dacă $\mathbf{x}'\,\mathbf{f}(\mathbf{x},t)\leqslant 0$, pentru $t\geqslant t_0$.

(*Indicație*: Se începe prin a scrie ecuația diferențială care este satisfăcută de scalarul $\mathbf{x}'\mathbf{x}$)

P. 28. Folosind teorema demonstrată în Problema 27, să se determine care din următoarele ecuații de stare are o soluție determinată pentru orice $t\geqslant 1$:

$$(a)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1+x_2 \\ -x_1-x_2^3 \end{bmatrix}, \qquad (b)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -6x_1-11x_2-6x_3^5 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x_1-1250x_1^3-10(x_2+2x_3)^3 \\ -12x_2+x_3 \\ 2x_2-11x_3 \end{bmatrix}$$

$$(d)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(-\varepsilon^{-t})x_1-x_1^3-x_2 \\ -x_1-x_2 \end{bmatrix}$$

$$(e)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^3+x_2-x_3 \\ -x_1-3x_2 \\ x_1-2(2+\sin t)\,x_3^3 \end{bmatrix}.$$

Teorema 13 ar fi putut stabili și ea existența acestor soluții?

P. 29. a) Să se demonstreze că teorema stabilită în Problema 27 rămîne valabilă cînd condiția $\mathbf{x}'\mathbf{f}(\mathbf{x},t)\leqslant 0$ este înlocuită prin $\mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{f}(\mathbf{x},t)\leqslant 0$, unde $\mathbf{P}$ este o matrice pozitiv-definită, simetrică.

b) Dacă este posibil, să se aplice rezultatul din *a*) la următoarele ecuaţii de stare :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ -x_1-4x_2-6x_3-4x_4^3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^5-x_2+x_3 \\ 2x_1-4x_2-2x_3 \\ -3x_1-3x_2-6x_3-x_3^5 \end{bmatrix}.$$

P. 30. Să se demonstreze că $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ satisface condiţia Lipschitz, dacă derivatele parţiale $\partial f_i(\mathbf{x},t)/\partial \mathbf{x}_j$ există, sînt continue în $\mathbf{x}$ pentru aproape toţi $t \geqslant t_0$ şi sînt mărginite în modul, în vreo vecinătate a oricărui punct, de funcţii de $t \geqslant t_0$, local integrabile, ne-negative. Să se arate, prin contra-exemplu, că aceste condiţii nu sînt necesare şi deci sînt numai suficiente.

P. 31. Să se verifice că fiecare din funcţiile $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ din Problemele 28 şi 29 satisfac o condiţie Lipschitz în vecinătatea $\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\|<1$ a punctului arbitrar $\hat{\mathbf{x}}$, prin găsirea unei $\gamma(t)$ care să satisfacă setul de condiţii din Teorema 14.

P. 32. Pentru fiecare din următoarele ecuaţii de stare, să se verifice care din condiţiile Teoremei 15 şi (sau) 17 sînt satisfăcute. Se va pune $t_0=1$.

$$(a)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1+x_2+t\varepsilon^{-t} \\ -x_1-x_2^3 \end{bmatrix}$$

$$(b)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(-\varepsilon^{-t})x_1-\dfrac{x_1^3}{1+x_1^2}-x_2 \\ -x_1-x_2+\varepsilon^{-t/2} \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x_1-1250x_1^3-10(x_2+2x_3)^3 \\ -12x_2+x_3 \\ 2x_2-11x_3 \end{bmatrix}$$

$$(d)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t\varepsilon^{-t}x_1+x_2 \\ -x_1-\dfrac{x_2^3}{1+2x_2^2}-2t\varepsilon^{-3t} \\ x_1-2x_3 \end{bmatrix}$$

$$(e)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1+\dfrac{2x_1^5}{2+x_1^4}-x_2 \\ -x_1-2x_2+\dfrac{t^2}{1+t^4} \end{bmatrix}.$$

În fiecare caz se va specifica limita superioară pe $\|\mathbf{x}(t_0)\|$.

P. 33. Să se demonstreze Teoremele 15 şi 16, după ce s-au înlocuit **A** prin $\mathbf{A}(t)$, unde $\mathbf{A}(t)$ este o matrice periodică.

P. 34. Să se demonstreze Teorema 16, după ce s-a înlocuit (103*c*) prin condiţia $\|\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x},t)\| \leqslant \mu\|\mathbf{x}\|$, pentru $\|\mathbf{x}\| \leqslant \zeta$ şi μ suficient de mic.

P. 35. Să se demonstreze următoarea teoremă: *Presupunem că toate soluţiile ecuaţiei de referinţă*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}$$

sînt mărginite cînd t tinde către infinit. Apoi se presupune că $\mathbf{f}(\mathbf{x},t) = \mathbf{A}(t) + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x},t) + \mathbf{g}(t)$. *Atunci toate soluţiile din*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x},t),$$

cu un vector iniţial $\mathbf{x}(t_0)$ *astfel că* $\|\mathbf{x}(t_0)\| \leqslant \delta$, *care este o constantă depinzînd de* $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$, — *sînt mărginite cînd* $t \to \infty$, *dacă*

$$\|\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(\tau)^{-1}\| \leqslant \alpha \text{ cu } t_0 \leqslant \tau \leqslant t, \text{ pentru toţi } t \geqslant t_0,$$

unde $\mathbf{Y}(t)\,\mathbf{Y}(\tau)^{-1}$ *este matricea stării de tranziţie asociată cu ecuaţia de referinţă*, *şi dacă*

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x},t)\| \leqslant \beta(t)\,\|\mathbf{x}\| \text{ pentru } \|\mathbf{x}\| \leqslant \zeta$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \beta(t)dt < \infty$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \|\mathbf{g}(t)\|\,dt \leqslant \gamma\delta,$$

unde γ *este o constantă pozitivă aleasă convenabil.*

P. 36. Se consideră sistemul de ordinul doi

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Fie $\mathbf{x}_s$ un punct singular, Presupunem că $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_s) = \mathbf{A} \neq 0$. Dacă valorile proprii ale lui **A** nu sînt imaginare, se ştie[1] că comportarea soluţiei în vecinătatea lui $\mathbf{x}_s$ este aceeaşi ca a expresiei $\mathbf{y} + \mathbf{x}_s$, unde **y** satisface ecuaţia primei aproximaţii la $\mathbf{x}_s$; adică

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

---

[1] Solomon Lefschetz, *Differential Equations: Geometric Theory*, 2 nd ed., Interscience, New York, p. 188—195.

le $\mathbf{y} = \mathbf{Pz}$, unde $\mathbf{P}$ este o matrice 2×2 nesingulară. Atunci $\mathbf{z}$ este soluția ecuației

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APz} = \mathbf{Bz}.$$

a) Cînd $\mathbf{A}$ are valori proprii reale și distincte, și uneori valori proprii reale și egale, — există un $\mathbf{P}$ astfel că

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Să se rezolve pentru elementele din $\mathbf{P}$, în funcție de elementele lui $\mathbf{A}$ și de valorile proprii λ_1 și λ_2.

b) Să se rezolve pentru $\mathbf{z}$ și să se traseze (schițeze) un set tipic de traiectorii în planul $z_1 - z_2$, cînd 1) ambele valori proprii sînt pozitive, 2) ambele valori sînt negative și 3) valorile proprii au semne opuse.

c) În cazul 3) de mai sus, traiectoriile corespunzătoare la $z_1(t_0)=0$ sau $z_2(t_0)=0$ se termină la origină și se numesc *separatrice*. Deoarece termenul indică o separare, despre ce separare este vorba, la aceste traiectorii particulare?

P. 37. Cu referire la Problema 36 și pentru fiecare din matricele $\mathbf{A}$ următoare, se cere: 1) să se determine valorile proprii λ_1 și λ_2; 2) să se determine transformarea $\mathbf{P}$; 3) să se traseze schițeze) un set tipic de traiectorii în planul $z_1 - z_2$ și 4) folosind rezultatele de la 3) și transformarea $\mathbf{y}=\mathbf{Pz}$, să se traseze un set tipic de traiectorii în planul $y_1 - y_2$.

$$(a)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad (b)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (d)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

P. 38. Cu referire la Problema 36:

a) Cînd $\mathbf{A}$ are valori proprii reale și egale $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda)$ și nu este o matrice diagonală, atunci există un $\mathbf{P}$ astfel că

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Să se rezolve elementele lui $\mathbf{P}$ în funcție de elementele lui $\mathbf{A}$ și de valoarea proprie λ.

b) Să se rezolve pentru $\mathbf{z}$ și să se traseze un set tipic de traiectorii în planul $z_1 - z_2$, cînd 1) λ este pozitiv și 2) λ este negativ.

c) Pentru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1) să se determine λ, 2) să se determine $\mathbf{P}$, 3) să se traseze un set tipic de traiectorii în planul $z_1 - z_2$, și 4) folosind rezultatul din 3) și transformarea $\mathbf{y}=\mathbf{Pz}$, să se traseze un set tipic de traiectorii în planul $y_1 - y_2$.

P. 39. Cu referire la Problema 36:

a) Cînd **A** are valori proprii complex conjugate ($\lambda_1 = \lambda_2 = \sigma + j\omega$), există un **P** astfel că

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}.$$

Să se rezolve pentru elementele lui **P**, în funcție de elementele lui **A** și de părțile reale și imaginare, σ și ω, ale valorilor proprii.

b) Coordonatele polare în planul $z_1 - z_2$ sînt r și θ, unde $r^2 = z_1^2 + z_2^2$ și $\operatorname{tg}\theta = z_2/z_1$. Să se verifice că

$$\frac{dr}{dt} = \sigma r, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega.$$

c) Să se rezolve r și θ și să se traseze un set tipic de traiectorii în planul $z_1 - z_2$, cînd 1) σ este pozitiv și 2) cînd σ este negativ.

d) Pentru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 13 & -7 \end{bmatrix}$$

1) să se determine σ și ω, 2) să se determine **P**, 3) să se traseze un set tipic de traiectorii în planul $z_1 - z_2$ și 4) folosind rezultatul din 3) și transformarea $\mathbf{y} = \mathbf{Pz}$, să se traseze un set tipic de traiectorii în planul $y_1 - y_2$.

P. 40. Cu referire la Problema 36: Punctul singular $\mathbf{x}_s$ este numit 1) *nod*, dacă **A** are valori proprii reale, distincte, de același semn, 2) *log-nod*, dacă **A** are valori proprii reale și egale, 3) *șea*, dacă **A** are valori proprii de semne opuse și 4) *focar*, dacă **A** are valori proprii complex conjugate, cu partea reală ne-nulă. Punctul singular se zice că este *stabil*, dacă ambele valori proprii sînt reale și negative sau au partea reală negativă; altfel, punctul singular se zice că este *instabil*. Fie $\delta_1 = \det \mathbf{A}$ și $\delta_2 = \operatorname{tr}\mathbf{A}$. Să se împartă planul $\delta_1 - \delta_2$ în regiuni corespunzînd la diferitele clasificații pentru un punct singular cum este un nod stabil.

P. 41. Cu referire la Problema 36: Planul $x_1 - x_2$ este cunoscut ca *planul fazelor*, iar un set tipic de traiectorii din planul fazelor se numește *portretul fazelor*. Pentru fiecare din următoarele ecuații de stare, să se găsească punctele singulare și, folosind rezultatele Problemelor 36–40, să se traseze un portret al fazelor, în vecinătatea fiecărui punct singular, și să se clasifice punctul singular:

$$(a)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -2x_2 + x_1 - x_1^3 \end{bmatrix}, \quad (b)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_1^5 - 3x_2 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 - 3x_2 + 2x_2^3 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_2^3 \end{bmatrix} \quad (d)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 1 - 3x_2 - 2\sin x_1 \end{bmatrix}$$

$$(e)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_1x_2 \\ 2x_2 - 3x_1x_2 \end{bmatrix}.$$

Să se schiţeze un portret al fazelor valabile în tot planul fazelor, folosind portretele locale de faze completate mai sus. Este bine să se ştie că x_i, pentru $i=1$ şi 2, creşte în lungul unei traiectorii, în acea regiune din planul fazelor unde $f_i(\mathbf{x})>0$ şi descreşte în lungul unei traiectorii, în acea regiune din planul fazelor, unde $f_i(\mathbf{x})<0$. Mai mult, traiectoria este verticală [orizontală] acolo unde taie curba $f_1(\mathbf{x})=0$ $[f_2(\mathbf{x})=0]$.

P. 42. Să se obţină o soluţie numerică a fiecărei din următoarele ecuaţii de stare, folosind metoda lui Euler. Se alege $h=0.1$ şi se calculează $\mathbf{x}(ih)$ pentru $i=1, 2, \ldots 10$.

$$(a)\ \frac{d}{dt}x=-\frac{x^3}{1+x^2}-1, \qquad x(0)=2$$

$$(b)\ \frac{d}{dt}x=-x(1+2\text{th}^2x)+t\varepsilon^{-t}, \qquad x(0)=0$$

$$(c)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\-2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$(d)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}[\varepsilon^{-t}], \qquad \begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$$

$$(e)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\-2x_2+x_1-x_1^3\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$(f)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\x_3\\-x_1^3-3x_2-3x_3+(1-\varepsilon^{-t})\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\\x_3(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Apoi, să se obţină soluţii folosind metoda Euler modificată. Se admite că o precizie de trei cifre zecimale este suficientă. Pentru ecuaţii de stare din (*c*) şi (*d*) să se compare cele două soluţii numerice cu soluţiile exacte, evaluate la ih.

P. 43. Să se repete Problema 42, folosind metoda Adams cu $j=3$ şi metoda Adams modificată cu $j=3$, în loc de, respectiv, metoda Euler şi Euler modificată. Se vor obţine valorile de pornire cu ajutorul seriei Taylor, trunchiată.

P 44. Să se obţină o soluţie numerică a următoarei ecuaţii de stare, folosind metoda Adams, cu $j=1, 2, 3, 4, 5$. Se va alege $h=0,1$ şi se va calcula $\mathbf{x}(ih)$ pentru $i=1, 2, \ldots, 15$. Valorile de pornire se vor obţine prin folosirea seriei Taylor, trunchiată. Se vor compara soluţiile numerice cu soluţia exactă evaluată la ih.

$$\frac{d}{dt}x=-x(1+x^2),\ x(0)=-5.$$

P 45. Să se obţină o soluţie numerică a fiecărei dintre ecuaţiile de stare din Problema 42, aplicînd metoda Milne. Se va alege $h=0,1$ şi se va calcula $\mathbf{x}(ih)$ pentru $i=1,2,\ldots,10$. Se admite o precizie de trei cifre zecimale.
Se vor obţine valorile de pornire prin metoda Runge-Kutta.

P 46. Să se obţină o soluţie numerică a următoarei ecuaţii de stare, folosind metoda Euler modificată. Se va alege $h = 0{,}1$ şi se va calcula $\mathbf{x}(ih)$ pentru $i = 1,2,\ldots,10$.
Se admite o precizie de trei cifre zecimale.

$$\frac{d}{dt}x = -x(1+x^2), \quad x(0) = -5.$$

Apoi se va obţine soluţia folosind corectorul în metoda Euler modificată şi (122), cu $j=1$ şi $l=1$ drept predictor. Se vor obţine valorile de pornire folosind soluţia numerică precedentă. Să se compare numărul de cîte ori s-a aplicat corectorul la fiecare pas, în fiecare din cele două metode.

P 47. Să se formeze trei perechi de predictor-corector din (122) şi (126) şi să se aplice la obţinerea soluţiei numerice a următoarelor ecuaţii de stare.
Se alege $h=0{,}1$ şi se va calcula $\mathbf{x}(ih)$ pentru $i=1,2,\ldots,10$. Se admite o precizie de trei cifre zecimale. Valorile de pornire se vor obţine folosind seria Taylor, trunchiată

$$(a)\quad \frac{d}{dt}x = -x(1-x^2), \quad x(0) = -5$$

$$(b)\quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t & -1 \\ 1 & -2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{t}{1+t^2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

P 48. Fie $\mathcal{M}$ un set de m întregi ne-negativi şi $\mathcal{N}$ un set de n întregi ne-negativi. Fie

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2(t-t_i) + \mathbf{C}_3(t-t_i)^2 + \ldots + \mathbf{C}_{m+n}(t-t_i)^{m+n-1};$$

atunci

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{C}_2 + 2\mathbf{C}_3(t-t_i) + \ldots + (m+n-1)\,\mathbf{C}_{m+n}(t-t_i)^{m+n-2}.$$

Mărimile $\mathbf{C}_l$ vor fi rezolvate în funcţie de $\mathbf{x}(t_{i-j})$, pentru fiecare j din $\mathcal{M}$ şi $\mathbf{x}(t_{i-k})$ pentru fiecare k din $\mathcal{N}$. Dacă se substituie rezultatele în expresia lui $\mathbf{x}(t)$ şi se pune t egal cu t_{i+1}, se obţine un predictor de următoarea formă generală :

$$\mathbf{x}(t_{i+1}) = \sum_{j \text{ in } \mathcal{M}} a_j\,\mathbf{x}(t_{i-j}) + \sum_{k \text{ in } \mathcal{N}} b_k\,\dot{\mathbf{x}}(t_{i-k}).$$

Fie $t_{i+1} = t_i + h$ pentru orice valoare a lui i. Apoi, să se determine a_j şi b_k, cînd avem :

(a) $\mathcal{M} = \{0, 1\}$; $\mathcal{N} = \{0, 1\}$
(b) $\mathcal{M} = \{0, 1, 2\}$; $\mathcal{N} = \{0, 1\}$
(c) $\mathcal{M} = \{0, 1\}$; $\mathcal{N} = \{0, 1, 2\}$
(d) $\mathcal{M} = \{0, 1, 2\}$; $\mathcal{N} = \{0, 1, 2\}$
(e) $\mathcal{M} = \{0, 2\}$; $\mathcal{N} = \{0, 1\}$
(f) $\mathcal{M} = \{0, 1\}$; $\mathcal{N} = \{0, 2\}$
(g) $\mathcal{M} = \{0, 2\}$; $\mathcal{N} = \{1\}$
(h) $\mathcal{M} = \{1, 2\}$; $\mathcal{N} = \{0, 1, 2\}$

P 49. Utilizînd fiecare dintre predictorii din Problema 48, să se obţină o soluţie numerică a următoarelor ecuaţii de stare. Se va alege $h=0{,}2$ şi se va calcula $\mathbf{x}(ih)$ pentru $i=1,2,\ldots,10$. Se admite o precizie de trei cifre zecimale. Se vor obţine valorile de pornire folosind seria Taylor trunchiată.

$$(a)\quad \frac{d}{dt}x = -x(1-x^2), \quad x(0) = -5$$

$$(b)\quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t & -1 \\ -1 & -2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\left[\frac{t}{1+t^2}\right], \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

P 50. Fie $\hat{\mathcal{M}}$ un set de $\hat{m}$ întregi ne-negatici şi $\hat{\mathcal{N}}$ un set de $\hat{n}$ întregi, unul dintre ei fiind egal cu -1 şi restul fiind ne-negativi. Fie

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{C}}_1 + \hat{\mathbf{C}}_2(t-t_i) + \ldots + \hat{\mathbf{C}}_{\hat{m}+\hat{n}}(t-t_i)^{\hat{m}+\hat{n}-1};$$

apoi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{C}}_2 + 2\hat{\mathbf{C}}_3(t-t_i) + \ldots + (\hat{m}+\hat{n}-1)\hat{\mathbf{C}}_{\hat{m}+n}(t-t_i)^{\hat{m}+\hat{n}-2}.$$

Mărimile $\hat{\mathbf{C}}_l$ vor fi rezolvate în funcţie de $\mathbf{x}(t_{i-j})$ pentru fiecare j din $\hat{\mathcal{M}}$, şi $\dot{\mathbf{x}}(t_{i-k})$ pentru fiecare k din $\hat{\mathcal{N}}$. Dacă se substituie rezultatele în expresia lui $\mathbf{x}(t)$ şi se pune t egal cu t_{i+1}, se obţine un corector de următoarea formă generală

$$\mathbf{x}\,t_{i+1}) = \sum_{j \text{ in } \hat{\mathcal{M}}} \hat{a}_j \mathbf{x}(t_{i-j}) + \sum_{k \text{ in } \hat{\mathcal{N}}} \hat{b}_k \dot{\mathbf{x}}(t_{i-k}).$$

Fie $t_{i+1}=t_i+h$ pentru fiecare valoare a lui i. Apoi, să se determine $\hat{a}_j$ şi $\hat{b}_k$, cînd avem :

(a) $\hat{\mathcal{M}} = \{0, 1\}$; $\hat{\mathcal{N}} = \{-1, 0\}$

(b) $\hat{\mathcal{M}} = \{0, 1\}$; $\hat{\mathcal{N}} = \{-1, 1\}$

(c) $\hat{\mathcal{M}} = \{0, 1, 2\}$; $\hat{\mathcal{N}} = \{-1, 0\}$

(d) $\hat{\mathcal{M}} = \{0, 1, 2\}$; $\hat{\mathcal{N}} = \{-1, 1\}$

(e) $\hat{\mathcal{M}} = \{0, 1, 2\}$; $\hat{\mathcal{N}} = \{-1, 0, 1\}$

(f) $\hat{\mathcal{M}} = \{0, 2\}$ $\hat{\mathcal{N}} = \{-1, 0, 1\}$

(g) $\hat{\mathcal{M}} = \{0, 2\}$; $\hat{\mathcal{N}} = \{-1, 1\}$

(h) $\hat{\mathcal{M}} = \{1\}$; $\hat{\mathcal{N}} = \{-1, 1\}$

P 51. Să se formeze trei perechi de predictor-corector din rezultatele Problemelor 48 şi 50. În fiecare caz se va alege $\hat{m}+\hat{n}=m+n$, astfel ca predictorul şi corectorul să aibe aceeaşi precizie.

Folosind fiecare din aceste perechi de predictor-corector, să se obţină soluţiile numerice cerute în Problema 49.

P 52. Corectorii obţinuţi din (126), pentru j şi l specifici, combinaţi cu ecuaţia de stare (104), dau ecuaţii implicite de forma

$$\mathbf{x}(t_{i+1}) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t_{i+1})].$$

S-a propus în paragraful 10.6, ca soluţia unui corector să fie realizată prin interaţia

$$\mathbf{x}(t_{i+1})^{(n)} = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_{i+1})^{(n-1)}),$$

unde $\mathbf{x}(t_{i+1})^{(n)}$ înseamnă iteraţia n-a; iteraţia zero, $\mathbf{x}(t_{i+1})^{(0)}$ este soluţia unui predictor. O variantă a acestei metode, pentru rezolvarea corectorului, se bazează pe cunoscuta iteraţie Newton-Raphson; în acest caz expresiile iterate sînt date de

$$\mathbf{x}(t_{i+1})^{(n)} = \mathbf{x}(t_{i+1})^{(n-1)} - \{\mathbf{U} - \mathbf{g}_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}(t_{i+1})^{(n-1)}]\}^{-1}[\mathbf{x}(t_{i+1})^{(n-1)} - \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_{i+1})^{(n-1)})]$$

unde $\mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_{i+1})^{(n-1)}$ este matricea Jacobiană a lui $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, evaluată ca iteraţie a $(n-1)$, pentru $\mathbf{x}(t_{i+1})$[1]. Această ultimă metodă pentru rezolvarea corectorului necesită în general mai puţine iteraţii pentru obţinerea unui anumit nivel de precizie; totuşi, ea necesită evaluarea derivatei Jacobiane $\mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$.

a) Se consideră corectorii obţinuţi din (126), cu:

1) $j = 0$ şi $l = 1$, 2) $j = 1$ şi $l = 1$

3) $j = 2$ şi $l = 1$, 4) $j = 2$ şi $l = 2$

Fie $\mathbf{x}(t_{i+1})^{(0)} = \mathbf{x}(t_i)^{(1)}$ şi să se determine $\mathbf{x}(t_{i+1})^{(1)}$ în funcţie de $\mathbf{x}(t_i)^{(1)}$, folosind iteraţia Newton-Raphson. Dacă iteraţia Newton-Raphson se termină în acest punct şi $\mathbf{x}(t_{i+1})^{(1)}$ este privit ca soluţia (aproximativă) corectorului, atunci ecuaţiile rezultate sînt expresii explicite pentru $\mathbf{x}(t_{i+1})^{(1)}$ în funcţie de $\mathbf{x}(t_i)^{(1)}$; ele sînt predictorii deduşi prin trunchierea iteraţiilor folosite la rezolvarea corectorilor.

b) Se va repeta a), folosind o proiecţie liniară a celor două puncte precedente de soluţie, pentru a obţine $\mathbf{x}(t_{i+1})^{(0)}$; adică

$$\mathbf{x}(t_{i+1})^{(0)} = \mathbf{x}(t_i)^{(1)} + h\,\frac{\mathbf{x}(t_i)^{(1)} - \mathbf{x}(t_{i-1})^{(1)}}{h} = 2\mathbf{x}(t_i)^{(1)} - \mathbf{x}(t_{i-1})^{(1)}$$

Notă: S-ar fi putut folosi polinoame de un ordin mai înalt, potrivite punctelor soluţiei precedente, pentru a da o proiecţie mai bună în vederea obţinerii lui $\mathbf{x}(t_{i+1})^{(0)}$].

c) Să se repete a), folosind soluţia predictorului Euler pentru $\mathbf{x}(t_{+i})^{(0)}$; adică

$$\mathbf{x}(t_{i+1})^{(0)} = \mathbf{x}(t_i)^{(1)} + h\,\dot{\mathbf{x}}(t_i)^{(1)}.$$

Notă: Se pot folosi şi alţi predictori pentru găsirea lui $\mathbf{x}(t_{i+1})^{(0)}$.]

---

[1] Această aplicaţie a unei ecuaţii diferenţiale la soluţia numerică a fost propusă de L. W. Sandberg, "**Numerical Integration of Systems of Stiff Nonlinear Differential Equations**," Bell Syst. Techn. Journ., Vol. 47, nr. 4, apr. 1968, p. 511—528.

d) Să se obţină o soluţie numerică a fiecărei din următoarele ecuaţii, folosind predictorii formaţi în *a*)–*c*). Se alege $h=0{,}2$ şi se calculează $\mathbf{x}(ih)$ pentru $i=1,2,\ldots 10$.

1) $$\frac{dx}{dt} = -x(1+x^2), \quad x(0) = -5$$

2) $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3) $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t & -1 \\ 1 & -2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4) $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -2x_2 + x_1 - x_1^3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Să se obţină valori de pornire folosind seria Taylor trunchiată. Pentru 1)–3), să se compare cei trei predictori diferiţi, prin considerarea preciziei soluţiilor numerice faţă de soluţiile exacte.

P 53. Pentru multe tipuri de circuite, vectorul de stare variază rapid în anumite intervale de timp şi încet în altele. În primul caz, intervalul de timp dintre punctele soluţiei trebuie să fie mai mic decît cel permis în al doilea caz, dacă precizia trebuie să aproximativ aceeaşi în ambele cazuri. De aceea, este de dorit, în interesul eficienţei de calcul, să posedăm un criteriu cu care să reglăm mărimea intervalului de integrare, pe măsură ce evaluarea numerică a soluţiei înaintează. O formulă de integrare folosită în legătură cu un astfel de criteriu, ar trebui să posede proprietatea că, pentru o precizie aritmetică infinită, diferenţa dintre soluţia numerică şi soluţia reală (la momentele pentru care se evaluează soluţia numerică), se anulează cînd timpul creşte mult, indiferent de intervalul de integrare. Un studiu al formulelor de integrare, relativ la această proprietate, nu face parte din obiectul acestei cărţi. De aceea se va considera formula de integrare particulară, stabilită în partea a) a Problemei 52, care posedă această proprietate pentru ecuaţii de stare liniare, invariante în timp, stabile, şi toate valorile intervalului de integrare. Eroarea la corector este $-(1/2)h^2_{i+1}\,\ddot{\mathbf{x}}(\theta)$, pentru un θ astfel că $t_i \leqslant \theta \leqslant t_{i+1} = t_i + h_{i+1}$. Acum, dacă eroarea este prea mare, h_{i+1} trebuie să fie făcută mai mică şi calculul lui $\mathbf{x}(t_{i+1})$ trebuie refăcut; dacă eroarea este suficient de mică, valoarea intervalului de integrare h_{i+2} pentru pasul următor, trebuie să fie mai mare decît h_{i+1}. Aceasta serveşte ca justificare pentru următorul criteriu:

Se pune $h_{i+2} = 2h_{i+1}$ dacă	$\frac{1}{2}h^2_{i+1}\left\Vert\ddot{\mathbf{x}}(t_{i+1})\right\Vert_\infty \leqslant \frac{1}{4}\times 10^{-3}$
Se pune $h_{i+2} = h_{i+1}$ dacă	$\frac{1}{4}\times 10^{-3} < \frac{1}{2}h^2_{i+1}\left\Vert\ddot{\mathbf{x}}(t_{i+1})\right\Vert_\infty < 10^{-3}$
Se recalculează $\mathbf{x}(t_{i+1})$ cu h_{i+1} pe jumătate dacă	$10^{-3} \leqslant \frac{1}{2}h^2_{i+1}\left\Vert\ddot{\mathbf{x}}(t_{i+1})\right\Vert_\infty$

Să se aplice formula de integrare indicată şi acest criteriu, pentru determinarea lui h_i pentru obţinerea soluţiei numerice a ecuaţiei

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

în 25 puncte de timp. Se va lua ca valoare inițială pentru h_{i+1}, valoarea $0{,}5 . 10^{-2}$. Să se indice gama de valori h_{i+1} luate. Pentru determinarea lui $\ddot{\mathbf{x}}(t_{i+1})$ se poate folosi relația

$$\ddot{\mathbf{x}}(t_{i+1}) = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_{i+1}), t_{i+1})\, \dot{\mathbf{x}}(t_i) =$$

$$= \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_{i+1}), t_{i+1})\, \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_{i+1}), t_{i+1}).$$

P. 54 Care din următoarele funcții scalare sînt pozitiv-definite pentru orice $\mathbf{x}$? Se va considera $t_0 = 1$

(a) $V(\mathbf{x}) = 6x_1^4 + 6x_2^2 - 8x_3 + 3x_4$

(b) $V(\mathbf{x}) = \dfrac{2x_1^2}{1 + x_1^2} + \dfrac{x_2^4}{1 + x_2^2} + x_1^2 x_3^4 + \dfrac{x_3^2}{1 + x_1^2}$

(c) $V(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^4 - 2x_2^4 + x_1^6 + x_2^6$

(d) $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2\varepsilon^{-t} x_2^4 + (2 + \cos t)\, x_3^2$

(e) $V(\mathbf{x}) = \dfrac{2 + t}{1 + t} x_1^6 + (x_1 - x_2)^2 + x_3^4 + (x_1 - x_3 - x_4)^2$

(f) $V(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2 - 2x_3)^2 + x_3^4$.

P 55. Să se considere un circuit *RLC*, liniar, variabil în timp, fără excitație din exterior. Ecuația de stare (nu în forma normală) este

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \mathscr{C} & 0 \\ 0 & \mathscr{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{v}_{Ct} \\ \mathrm{i}_{Lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathscr{G} & \mathscr{K} \\ \mathscr{G} & -\mathscr{R} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{v}_{Ct} \\ \mathrm{i}_{Lt} \end{bmatrix}$$

și energia înmagazinată este:

$$V = [\mathrm{v}'_{Ct}\ \mathrm{i}'_{Lt}]\begin{bmatrix} \mathscr{C} & 0 \\ 0 & \mathscr{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{v}_{Ct} \\ \mathrm{i}_{Lt} \end{bmatrix}.$$

În ce condiții va fi V o funcție Liapunov?

P 56. Să se determine o regiune deschisă D, ce conține originea, în interiorul căreia următoarele funcții scalare sînt pozitiv definite. Se va lua $t_0 = 0$.

(a) $V(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2)^2 - (x_1 - x_2)^4 + x_2^2 - x_2^3$

(b) $V(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2)^2 - (x_1 - x_2)^4 + 4(x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2)^4$

(c) $V(\mathbf{x}) = 2\dfrac{2 + t}{1 + t}\, \mathrm{th}^2 x_1 - x_1^2 + 2\, \dfrac{x_2^2 - x_2^4}{1 + x_1^2}$

P 57. Să se demonstreze Teorema 19.

P 58. Fiecare din următoarele ecuaţii de stare este în pereche cu o funcţie pozitiv definită. Să se determine dacă funcţia pozitiv definită este o funcţie Liapunov pentru ecuaţia de stare şi, în caz afirmativ, care din Teoremele 17,18 şi (sau) 19 este satisfăcută. Se va lua $t_0 = 1$

$$(a)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 - x_2^3 \\ x_1 - \operatorname{th} x_3 \end{bmatrix}$$

$$V(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]$$

$$(b)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{(x_1 - x_2)}{1 + (x_1 - x_2)^2} \\ -\dfrac{(x_2 - x_1)}{1 + (x_1 - x_2)^2} - x_2 - x_2^3] \end{bmatrix}$$

$$V(\mathrm{x}) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$$

$$(c)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon^{-t} x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$V(\mathrm{x}) = (x_1 + x_2)^2 + (\varepsilon^{-t} x_1^2 + x_2^2)^2$$

$$(d)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t\varepsilon^{-t} x_1 - x_2 \\ -2x_1 + \dfrac{x_2}{1 + x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$V(\mathrm{x}) = \frac{1}{2} x_1^1 + \frac{1}{4} x_2^4$$

P 59. Să se explice cum rezultă din teoremele de stabilitate 17, 18 şi 19 că o soluţie a ecuaţiei de stare (98), egală cu $\mathrm{x}(t_0)$ la momentul t_0, poate fi extinsă ca să dea o soluţie definită pentru orice $t \geqslant t_0$. Să se indice unele restricţii asupra lui $\mathrm{x}(t_0)$. Să se găsească o ecuaţie de stare, de ordin mai mare decît 1, la care se aplică aceste rezultate şi la care Teorema 13 nu se aplică.

P 60. Fiecare din următoarele ecuaţii de stare este în pereche cu o funcţie scalară a vectorului de stare. Fie funcţia scalară $V(\mathrm{x}, t)$ în Teorema 20; atunci, pe baza acestei teoreme, să se determine dacă origina este instabilă. Se alege $t_0 = 1$

$$(a)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon^{-t} x_1 - x_2 \\ -x_1 + th\, x_2 \end{bmatrix}$$

$$V(\mathrm{x}) = -x_1x_2$$

$$(b)\ \frac{dt}{d}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 \\ x_1 - 3x_2 + x_2^5 - x_3 \\ x_2 - 5x_3 - x_3 \operatorname{th}^2 x_3 \end{bmatrix}$$

$$V(\mathbf{x}) = (x_1^2 - x_2^2)\, x_3$$

$$(c)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\dfrac{x_1}{1 + 2x_1^2} + 5x_2 \\ -x_1 + 4\dfrac{x_2 + 2x_2^3}{1 + x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$V(\mathbf{x}) = x_1(2x_2 - x_1)$$

P 61. Să se aplice Teorema 21 la fiecare din ecuaţiile de stare din Problema 58. Cum se compară rezultatele obţinute astfel cu Teorema 21, cu cele obţinute în Problema 58?

P 62. Să se folosească Teorema 21 pentru a arăta că origina este asimptotic stabilă „în-mare", cînd

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

unde **A** este o matrice constantă $n \times n$, cu valori proprii negative.

P 63. Utilizînd metoda gradientului variabil, să se caute funcţia Liapunov pentru fiecare din următoarele ecuaţii de stare:

$$(a)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 - x_2^3 \\ x_1 - \operatorname{th} x_3 \end{bmatrix}$$

$$(b)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^3 \\ -x_2 + \frac{1}{3}x_2^3 - x_1 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{x_1}{1 + x_1^2} + x_2 \\ x_1 - 2x_2 - x_2^3 \end{bmatrix}$$

P64. Să se prepare o diagramă de program şi un set de instrucţiuni program, într-un limbaj potrivit, astfel de exemplu ca FORTRAN IV, pentru un calculator numeric, pentru obţinerea unei soluţii numerice a ecuaţiei de stare (104), prin

a) metoda Euler
b) metoda Euler modificată
c) metoda Adams ($j = 4$)
d) metoda Adams modificată ($j = 4$)
e) metoda Milne
f) perechile de predictori-corectori din Problema 47
g) predictorii din Problema 48
h) perechile de predictori-corectori din Problema 50.

Metoda Runge-Kutta va fi folosită pentru a genera valorile de pornire. Se presupune că $\mathbf{x}(t_0)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, h, şi numărul total de paşi în timp, vor fi specificate de cel care utilizează programul. Se va include cîte un set de instrucţiuni de utilizare, pentru fiecare program.

ANEXA 1

Funcţii generalizate

Analiza sistemelor fizice este adesea uşurată prin folosirea funcţiei impuls unitate şi / sau a derivatelor sale. Dar funcţia impuls unitate nu este o funcţie în sensul obişnuit al cuvîntului; deci strict vorbind, atunci cînd se aplică unor relaţii care conţin funcţia impuls teoreme deduse pentru funcţii avînd puncte ordinare, se încalcă rigurozitatea matematică. Astfel, din 1927 cînd Dirac a făcut cunoscută folosirea funcţiei impuls ca un instrument al fizicii matematice [1] şi pînă în 1950, cînd Schwartz a publicat o bază completă şi riguroasă pentru aceasta, funcţia impuls nu a fost folosită în matematici; cu toate acestea a fost frecvent utilizată de fizicieni şi ingineri.

Teoria distribuţiilor dezvoltată de Schwartz [2], oferă baza pentru folosirea funcţiei impuls în analiza matematică, funcţia impuls fiind în această teorie, o *distribuţie.* Ulterior au fost publicate şi alte lucrări dezvoltînd teoria distribuţiilor editată în 1950[3], şi în alte direcţii (exemplu — lucrarea lui J. Mikusinski — vezi nota [4]). În special, trebuie menţionată o nouă abordare a teoriei distribuţiilor, introdusă de Mikusinski în această perioadă.

---

[1] P.A.M. Dirac, „The Phisical Interpretation of the Quantum Mechanics", *Proc. Roy. Soc.*, Seria A, vol. 113, 1926—1927, pag. 62 —641.

P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, London, 1930.

[2] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, vol. I şi II, Herman, Paris 1950 şi 1951.

[3] I.M. Ghelfand şi G.E. Shilov, *Generalized functions*, vol. I, „Properties and Operations", Academic Press, New Nek, 1964.

V. Dolezal, *Dynamics of Linear Systems*, Publishing House of the Czechslovak Academy of Science, Prague 1964.

A.H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis*, Mc. Graw-Hill, New York, 1965.

[4] J. Mikusinski, *Operational Calculus*, a 5-a ediţie (în l. engleză) Macmillan, New York, 1959.

G. Temple, „Theories and Applications of Generalized Functions", *J. London Math. Soc.*, vol. 28, 1953 pag. 134—148.

M.J. Lightill, *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1958.

Convoluţia în mulţimea funcţiilor continue este analoagă înmulţirii în mulţimea numerelor întregi. Cînd se defineşte împărţirea — ca operaţie inversă înmulţirii a două numere întregi — mulţimea rezultantă a numerelor raţionale conţine mulţimea numerelor întregi ca o submulţime proprie. S-a făcut ipoteza că o împărţire de convoluţie — operaţie inversă produsului de convoluţie — va defini în mod analog o mulţime de cîturi de convoluţie sau funcţii generalizate, conţinînd ca submulţime proprie mulţimea funcţiilor continue. Mikusinski a descoperit că această ipoteză se verifică. În particular, funcţia impuls şi toate derivatele sale aparţin mulţimii funcţiilor generalizate.

În această anexă vom da o scurtă descriere a teoriei funcţiilor generalizate, bazată pe împărţirea de convoluţie. Pentru simplitate ne vom ocupa numai de funcţii avînd valori scalare. Extinderea conceptelor pentru funcţii cu valori vectoriale va fi lăsată cititorului. Tratarea dată aici nu este completă, dar este potrivită pentru a pune folosirea funcţiei impuls în cap. 5 pe o bază fermă, riguroasă.

Pentru a exclude confuzia notaţiilor, posibilă atunci cînd se introduc concepte noi, vom folosi aici în mod consecvent cîteva convenţii. Se vor nota mărimile scalare cu litere greceşti mici, cu excepţia lui δ. O funcţie de timp privită în ansamblul ei, pentru valori nenegative ale lui t se va nota printr-o literă cursivă mică; nu se vor folosi literele s şi t. Dacă f este o funcţie arbitrară de timp, atunci $f(t)$ va fi valoarea lui f la momentul t[1]. Există situaţii în care o funcţie va fi dată printr-o expresie explicită; de exemplu $t\varepsilon^{-t}$. Pentru a nota această funcţie în ansamblul ei, vom folosi notaţia $\{t\varepsilon^{-t}\}$. Observăm că $\{\alpha\}$ nu este un scalar ci funcţia care are valoarea constantă şi egală cu α pentru $t \geqslant 0$. Produsul a două mărimi scalare, sau al unui scalar cu o funcţie şi produsul a două funcţii va fi notat în mod obişnuit; de exemplu, $\alpha\beta$, αf sau $\{\alpha f(t)\}$, şi $f.g$ sau $\{f(t)g(t)\}$. Pentru repetarea unui produs, se va aplica convenţia obişnuită de folosire a exponentului; de exemplu $\alpha\alpha\alpha\alpha = \alpha^4$ şi $fff = f^3$. Analog notaţiei folosite în cea mai mare parte a lucrării produsul de convoluţie se va nota

$$f*g = \left\{\int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau\right\},$$

Pentru a nota o convoluţie repetată vom folosi un exponent pozitiv scris cu literă aldină; de exemplu $f*f*f = f^{\mathbf{3}}$.

J.D. Weston, „Operational Calculus and Generalized Functions”, *Proc. Roy. Soc.*, seria A, vol. 250, 1959, pag. 460–471.

J.D. Weston, „Characterization of Laplace Transforms and Perfect Operators”, *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, vol. 3, 1959, pag. 348–354.

A. Erdélyi, *Operational Calculus and Generalized Functions*, Holt Rinehart & Winston, New York 1962. Aceasta este o descriere clară a cîturilor de convoluţie introduse de Mikusinski ca bază a teoriei funcţiilor generalizate.

[1] Se va face deci distincţia între f care reprezintă funcţia ca lege de corespondenţă între două mulţimi şi $f(t)$ care este un element al mulţimii valorilor funcţiei (*N.T.*)

A. 1.1. CÎTURI DE CONVOLUŢIE ŞI FUNCŢII GENERALIZATE

Pentru rezolvarea unei ecuaţii scalare ca de exemplu

$$\alpha\zeta = \beta, \tag{1}$$

în care $\alpha \neq 0$ şi β sînt scalari cunoscuţi, exprimăm soluţia ca fiind $\zeta = \beta/\alpha$; adică, cîtul lui β prin α. Acest lucru este posibil deoarece înmulţirea scalarilor are o operaţie inversă unică — împărţirea scalarilor.

Considerăm acum ecuaţia de convoluţie

$$a * z = b, \tag{2}$$

unde a diferită de $\{0\}$ şi b sînt funcţii cunoscute. Deoarece convoluţia funcţiilor are aceleaşi proprietăţi algebrice ca înmulţirea scalară — adică asociativitate, comutativitate, etc. — sîntem tentaţi să presupunem că există o operaţie inversă convoluţiei, unic definită, care ne permite să exprimăm soluţia ca fiind $z = b//a$; adică, *cîtul de convoluţie* al lui b prin a (a se observa folosirea liniei duble pentru simbolul cîtului de convoluţie). Vom arăta că noţiunea de cît de convoluţie are sens.

Pentru a pune baza pentru definirea cîturilor de convoluţie, să ne reîntoarcem la ecuaţia algebrică (1) în care α şi β sînt întregi cunoscuţi şi să considerăm soluţia ei. Tocmai unicitatea acestei soluţii este aceea care dă sens cîtului β/α prin care este exprimată soluţia. Presupunem că (1) are mai multe soluţii; fie atunci ζ_1 şi $\theta\zeta_2$ două soluţii distincte. Deoarece $\alpha\zeta_1 = \beta$ şi $\alpha\zeta_2 = \beta$, rezultă că $\alpha(\zeta_1 - \zeta_2) = 0$. Dar α este presupus un întreg diferit de 0; deci $\zeta_1 - \zeta_2 = 0$, ceea ce contrazice ipoteza şi deci soluţia lui (1) trebuie să fie unică. Dacă soluţia ζ este un întreg, atunci aceasta va fi valoarea ce i se va atribui lui β/α. Desigur, (1) poate să nu aibe o soluţie întreagă. Totuşi, datorită faptului că soluţia este unică, putem spune că β/α este o cantitate numită cît, care exprimă soluţia unică; în acest fel β/α capătă sens.

Istoric vorbind, s-a dat numele de număr raţional cîtului a două numere întregi. Dar β/α este o soluţie număr raţional a lui $\alpha\zeta = \beta$, care este unică pînă la o echivalenţă $\beta/\alpha = \nu\beta/\gamma\alpha$, unde ν este orice număr întreg diferit de zero.

Să considerăm acum într-un mod analog ecuaţia de convoluţie (2), $a * z = b$, pentru a şi b funcţii continue şi $a \neq \{0\}$. Dacă putem arăta că aceasta are o soluţie unică, atunci această soluţie atribuie un sens cîtului de convoluţie $b//a$, care exprimă soluţia. Presupunem că (2) are mai multe soluţii; fie z_1 şi z_2 două soluţii distincte. Deoarece $a*z_1 = b$ şi $a*z_2 = b$, rezultă că $a*(z_1 - z_2) = \{0\}$. Vom folosi aici o teoremă a lui Titchmarsh [1] care afirmă următoarele:

[1]) Această teoremă este un caz special al teoremei 152 în *Introduction to the-Theory of Fourier Integrals*, a lui E.C. Titchmarsh, ediţia a 2-a, Oxford University Press, London, 1948.

Teorema 1. *Dacă f şi g sînt funcţii continue şi* $f*g=\{0\}$, *atunci cel puţin una din funcţiile f sau g este egală cu* $\{0\}$. Deoarece funcţia $a\neq\{0\}$, din rezultatul precedent $a*(z_1-z_2)=\{0\}$, rezultă că z_1-z_2 trebuie să fie identică cu funcţia zero $\{0\}$. Dar aceasta contrazice faptul că z_1 şi z_2 sînt distincte. Prin urmare soluţia ecuaţiei (2) este unică.

Dacă soluţia lui (2) este o funcţie continuă, atunci $b//a$ se identifică cu această funcţie. Desigur este posibil să nu existe nici o funcţie continuă care satisface (2), analog cu cazul în care $\alpha\zeta=\beta$ nu avea soluţie întreagă; de exemplu dacă $b(0)\neq 0$, atunci soluţia nu poate fi o funcţie continuă[1]. Totuşi, deoarece soluţia este unică, putem extinde sensul termenului de „funcţie" spunînd că $b//a$ este un element numit *cît de convoluţie* care exprimă soluţia unică. În acest fel, $b//a$ capătă sens.

Presupunem acum funcţia $c\neq\{0\}$ şi considerăm ecuaţia de convoluţie.

$$c*a*z=c*b,$$

sau echivalent (3)

$$c*(a*z-b)=\{0\}.$$

Conform Teoremei 1, $a*z-b=\{0\}$. Astfel (3) are soluţie dacă şi numai dacă (2) are soluţie; în plus, o soluţie a lui (2) este şi o soluţie a lui (3). Deoarece fiecare are o soluţie unică şi pentru că $b//a$ este soluţia lui (2) şi $c*b//c*a$ soluţia lui (3), va trebui să avem $b//a=c*b//c*a$. Deci $b//a$ este soluţia unică a lui (2) pînă la o echivalenţă $c*b//c*a$, unde $c\neq\{0\}$.

Vom spune că două cîturi de convoluţie sînt echivalente — adică, $b//a=d//c$ — dacă $b*c=a*d$. Mulţimea tuturor cîturilor de convoluţie echivalente unui cît de convoluţie oarecare se numeşte clasă de echivalenţă; adică mulţimea cîturilor de convoluţie este împărţită în clase de echivalenţă în mod unic. Astfel, fiecare clasă de echivalenţă este identificată prin oricare din cîturile de convoluţie ce le conţine. Aşadar, tocmai această clasă de echivalenţă care conţine $b//a$, trebuie privită ca soluţie unică a ecuaţiei $a*z=b$ şi va fi numită *funcţie generalizată*.

A. 1.2. ALGEBRA FUNCŢIILOR GENERALIZATE

Să notăm în mod temporar o funcţie generalizată prin paranteze patrate puse în jurul oricărui cît de convoluţie din clasa sa de echivalenţă; de exemplu, $[b//a]$. Prima relaţie ce trebuie stabilită este aceea de egalitate. Acest lucru îl vom face observînd că

$$\left[\frac{b}{a}\right]=\left[\frac{d}{c}\right] \text{ dacă şi numai dacă } b*c=a*d \tag{4}$$

[1] Se observă scriind explicit ecuaţia (2) şi considerînd $t=0$. (*N.T.*)

Aceasta este o consecinţă imediată a următoarelor afirmaţii : (1) Dacă $b*c=a*d$ atunci $b//a$ şi $d//c$ sînt echivalente, deci determină aceeaşi clasă de echivalenţă. (2) Dacă $[b//a]=[d//c]$, atunci $b//a$ şi $d//c$ aparţin aceleiaşi clase de echivalenţă, deci, $b*c=a*d$.

Vom defini acum adunarea a două funcţii generalizate, convoluţia a două funcţii generalizate şi produsul unei funcţii generalizate cu un scalar, după cum urmează :

$$\left[\frac{b}{a}\right]+\left[\frac{d}{c}\right]=\left[\frac{b*c+a*d}{a*c}\right] \tag{5a}$$

$$\left[\frac{b}{a}\right]*\left[\frac{d}{c}\right]=\left[\frac{b*d}{a*c}\right] \tag{5b}$$

$$\alpha\left[\frac{b}{a}\right]=\left[\frac{\alpha b}{a}\right]. \tag{5c}$$

Trebuie să verificăm că funcţiile generalizate care se obţin în partea dreaptă a ecuaţiilor anterioare, nu depind de alegerea reprezentanţilor din clasele de echivalenţă, adică de alegerea cîturilor de convoluţie particulare ce caracterizează fiecare din funcţiile generalizate din stînga ; presupunem de exemplu că $b//a=b'//a'$ şi $d//c=d'//c'$; atunci

$$\left[\frac{b*d}{a*c}\right]=\left[\frac{b}{a}\right]*\left[\frac{d}{c}\right]$$

şi

$$\left[\frac{b'*d'}{a'*c'}\right]=\left[\frac{b'}{a'}\right]*\left[\frac{d'}{c'}\right]$$

vor fi egale dacă $b*d*a'*c'=a*c*b'*d'$. Această egalitate este o consecinţă evidentă a egalităţilor $b*a'=a*b'$ şi $d*c'=c*d'$, şi a proprietăţii de comutativitate a produsului de convoluţie. Aşadar, datorită faptului că operaţiile definite în (5) sînt independente de alegerea cîturilor de convoluţie particulare ce caracterizează funcţia generalizată corespunzătoare, nu vom mai folosi paranteze pentru notarea funcţiei generalizate ci o vom nota cu $b//a$. Aceasta nu va produce nici o confuzie.

Avînd relaţia de egalitate stabilită în (4) şi operaţiile de bază definite în (5), este uşor de arătat că regulile obişnuite ale algebrei, date în (6) rămîn valabile, Verificarea acestui lucru o poate face cititorul.

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{d}{c}+\frac{b}{a} \tag{6a}$$

$$\frac{b}{a}+\left(\frac{d}{c}+\frac{f}{e}\right)=\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)+\frac{f}{e} \tag{6b}$$

$$\alpha\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)=\alpha\frac{b}{a}+\alpha\frac{d}{c} \tag{6c}$$

$$(\alpha+\beta)\frac{b}{a}=\alpha\frac{b}{a}+\beta\frac{b}{a} \tag{6d}$$

$$\alpha\left(\frac{b}{a}\ast\frac{d}{c}\right)=\left(\alpha\frac{b}{a}\right)\ast\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\ast\left(\alpha\frac{d}{c}\right) \tag{6e}$$

$$(\alpha\beta)\frac{b}{a}=\alpha\left(\beta\frac{b}{a}\right) \tag{6f}$$

$$\frac{b}{a}\ast\frac{d}{c}=\frac{d}{c}\ast\frac{b}{a} \tag{6g}$$

$$\frac{b}{a}\ast\left(\frac{d}{c}\ast\frac{f}{e}\right)=\left(\frac{b}{a}\ast\frac{d}{c}\right)\ast\frac{f}{e} \tag{6h}$$

$$\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)\ast\frac{f}{e}=\frac{b}{a}\ast\frac{f}{e}+\frac{d}{c}\ast\frac{f}{e}. \tag{6i}$$

Regula de simplificare rămîne de asemenea valabilă; adică dacă $e \neq \{0\}$ şi $f \neq \{0\}$, atunci

$$\frac{b}{a}\ast\frac{f}{e}=\frac{d}{c}\ast\frac{f}{e} \quad \text{dacă şi numai dacă} \quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c}. \tag{7}$$

Regula de simplificare se poate demonstra folosind Teorema 1.

În continuare observăm că dacă $a \neq \{0\}$, atunci $\{0\}//a$ este funcţia generalizată „zero", iar $a//a$ este funcţia generalizată „unitate". Acest lucru rezultă arătînd că amîndouă sînt unice şi verificînd că

$$\frac{\{0\}}{a}+\frac{d}{c}=\frac{d}{c} \tag{8a}$$

$$\frac{\{0\}}{a}\ast\frac{d}{c}=\frac{\{0\}}{a} \tag{8b}$$

$$\frac{a}{a}\ast\frac{d}{c}=\frac{d}{c}. \tag{8c}$$

Lăsăm cititorului această sarcină.

Cîtul de convoluţie al funcţiilor generalizate

Împărţirea de convoluţie pentru două funcţii obişnuite a fost definită ca operaţia inversă produsului de convoluţie. Este natural să ne întrebăm dacă o astfel de operaţie inversă poate fi definită şi pentru funcţiile generalizate. Răspunsul îl vom găsi procedînd în acelaşi mod ca la introducerea cîtului de convoluţie pentru două funcţii obişnuite. Aceasta s-a făcut arătînd că ecuaţia de convoluţie (2) are o soluţie unică. Analog, trebuie să arătăm că următoarea ecuaţie de convoluţie a funcţiilor generalizate

$$\frac{b}{a} * \frac{x}{y} = \frac{d}{c}, \tag{9}$$

unde $b//a \neq \{0\}//a$, admite ca soluţie unică o funcţie generalizată. În mod evident, prin aplicarea lui (8c) în (9) rezultă că $x//y = a*d//b*c$ este o soluţie a lui (9); deci trebuie să arătăm numai faptul că aceasta este unică. Fie $x'//y'$ o altă soluţie. Atunci $(b//a)*(x'//y') = d//c$ combinată cu (9) ne va da $(b//a)*(x//y - x'//y') = \{0\}//a$ sau $x//y = x'//y'$, deoarece $b//a \neq \{0\}//a$. Astfel, $a*d//b*c$ este o funcţie generalizată, soluţia unică a lui (9).

Soluţia ecuaţiei (9) arată că cîtul de convoluţie al funcţiei generalizate $d//c$ prin funcţia generalizată $b//a$, adică $(d//c)//(b//a)$ are următorul sens

$$\frac{(d//c)}{(b//a)} = \frac{a*d}{b*c}. \tag{10}$$

Reamintim că o convoluţie repetată se notează cu un exponent scris cu literă groasă. Fie în mod arbitrar $(b//a)^{\mathbf{0}} = a//a$, funcţia generalizată unitate. În continuare, vom nota cîtul de convoluţie al lui $a//a$ prin $(b//a)^{\mathbf{n}}$ cu

$$\frac{(a//a)}{(b//a)^{\mathbf{n}}} = (b//a)^{-\mathbf{n}}. \tag{11}$$

Folosind (10) se arată uşor că $(b//a)^{-\mathbf{n}} = (a//b)^{\mathbf{n}}$

Avînd această bază se pot verifica uşor următoarele operaţii cu exponenţi

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\mathbf{m}}\left(\frac{b}{a}\right)^{\mathbf{n}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\mathbf{m}+\mathbf{n}} \tag{12a}$$

$$\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\mathbf{m}}\right)^{\mathbf{n}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\mathbf{nm}} \tag{12b}$$

$$\left(\frac{b}{a}*\frac{d}{c}\right)^{\mathbf{n}} = \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\mathbf{n}}\right)*\left(\left(\frac{d}{c}\right)^{\mathbf{n}}\right), \tag{12c}$$

în care $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$ sînt numere întregi pozitive, zero sau negative.

A.1.3. FUNCŢII GENERALIZATE PARTICULARE

Pentru cea mai mare parte a sistemelor dinamice, ecuaţiile se referă la scalari, funcţii avînd puncte ordinare – de obicei continue, continue pe porţiuni şi local integrabile; se referă de asemenea la operatori – în mod obişnuit derivarea, integrarea, întîrzierea. În acest paragraf şi în cel următor vom arăta că toţi aceşti scalari, funcţii şi operatori pot fi identificaţi ca funcţii generalizate. În acest mod ecuaţiile pentru un sistem dinamic vor avea sens ca ecuaţii asupra unei mulţimi de funcţii generalizate.

Să începem cu mulţimea scalarilor. Această mulţime poate fi inclusă în mulţimea funcţiilor generalizate dacă sînt satisfăcute următoarele două condiţii:

1. Există o corespondenţă biunivocă între mulţimea scalarilor şi o submulţime a mulţimii funcţiilor generalizate.

2. Orice operaţie algebrică definită pe mulţimea de scalari are corespondentul său definit pe mulţimea funcţiilor generalizate.

Dacă a este o funcţie continuă *oarecare* diferită de $\{0\}$, atunci funcţia generalizată $\alpha a//a$ se află într-o corespondenţă unu la unu cu scalarul α; Astfel, condiţia 1 este satisfăcută. Relaţia este simbolic notată astfel

$$\alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha a}{\overline{\overline{a}}}. \tag{13}$$

Verificarea condiţiei (2) este lăsată cititorului; totuşi pentru a ilustra cum se face aceasta, vom verifica că adunarea scalarilor are corespondentul său în mulţimea operaţiunilor definite asupra funcţiilor generalizate. Dacă $\alpha \Leftrightarrow \alpha a//a$ şi $\beta \Leftrightarrow \beta a//a$ atunci

$$\alpha + \beta \Leftrightarrow \frac{(\alpha+\beta)a}{\overline{\overline{a}}} = (\alpha+\beta)\frac{a}{\overline{\overline{a}}} = \frac{\alpha a}{\overline{\overline{a}}} + \frac{\beta a}{\overline{\overline{a}}}.$$

S-au folosit în aceste egalităţi, relaţiile (5c) şi (6a)

În continuare considerăm mulţimea funcţiilor continue. Această mulţime poate fi de asemenea inclusă în mulţimea funcţiilor generalizate dacă se satisfac aceleaşi condiţii 1) şi 2) ca pentru scalari, înlocuind cuvîntul „scalar" prin „funcţie continuă". Pentru a verifica (1), fie a o funcţie continuă *oarecare* diferită de $\{0\{$; atunci funcţia continuă c se află în corespondenţă unu la unu cu funcţia generalizată $c * a//a$; această relaţie se notează simbolic

$$c \Leftrightarrow \frac{c * a}{\overline{\overline{a}}}. \tag{14}$$

Vom lăsa verificarea condiţiei (2), cititorului; totuşi vom arăta cum se face aceasta. Dacă $b \Leftrightarrow b*a//a$ şi $c \Leftrightarrow c*a//a$, atunci

$$b * c \Leftrightarrow \frac{(b*c)*a}{a} = \frac{b*a*c*a}{a*a} = \frac{b*a}{a} * \frac{c*a}{a}.$$

Pentru scrierea egalităţilor de mai sus s-au folosit relaţiile (5b) şi (8c).

Aceste includeri dau justificarea faptului că putem schimba între ei a şi $aa//a$ şi în mod analog c şi $c*a//a$. În plus, identificarea lui c cu $c*a//a$ ne permite a atribui lui $c*a//a$ o valoare la timpul t. În general acest lucru nu este posibil; o funcţie generalizată este o entitate pentru care valoarea la momentul t nu are sens. Vom arăta mai tîrziu că anumite funcţii generalizate, altele decît acele identificate cu funcţiile continue, pot primi o valoare în momentul t.

Exemple de funcţii continue

O funcţie des utilizată este funcţia constantă $\{1\}$ pe care o vom nota cu u, adică

$$u = \{1\}. \tag{15}$$

Aceasta este bine cunoscuta funcţie treaptă unitate a cărei valoare este 1 pentru $t \geqslant 0$. Convoluţia repetată a lui u cu ea însăşi va da naştere unei mulţimi de funcţii des întîlnite. Astfel

$$\begin{aligned}
u^2 &= u * u = \left\{\frac{t}{1}\right\} \\
u^3 &= u * u^2 = \left\{\frac{t^2}{1\cdot 2}\right\} \\
u^4 &= u * u^3 = \left\{\frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}\right\} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u^{n+1} &= u * u^{n} = \left\{\frac{t^n}{n!}\right\},
\end{aligned} \tag{16}$$

după cum se poate verifica efectuînd convoluţiile de mai sus. Funcţia generalizată identificată cu funcţia continuă u^n poate fi exprimată ca $u^n * a // a$, unde $a \neq \{0\}$. Punînd $a=u$ obţinem rezultatul interesant

$$u^n \Leftrightarrow \frac{u^{n+1}}{u}. \tag{17}$$

Multe alte funcţii continue întîlnite în mod obişnuit în analiză pot fi identificate cu funcţii generalizate, fiecare fiind exprimată ca un cît de convoluţie al unor polinoame în u; de exemplu

$$\{\varepsilon^{-\alpha t}\} \Leftrightarrow \frac{\{\varepsilon^{-\alpha t}\} * u}{u} = \frac{u^2}{u + \alpha u^2} \tag{18a}$$

$$\{\sin \omega t\} \Leftrightarrow \frac{\{\sin \omega t\} * u}{u} = \frac{\omega u^3}{u + \omega^2 u^3} \tag{18b}$$

$$\{\cos \omega t\} \Leftrightarrow \frac{\{\cos \omega t\} * u}{u} = \frac{u^2}{u + \omega^2 u^3}. \tag{18c}$$

Fiecare din aceste egalităţi poate fi verificată conform relaţiei generale de egalitate (4). De exemplu, considerăm (18*b*). Cele două expresii sînt egale dacă şi numai dacă

$$\{\sin \omega t\} * (u^2 + \omega^2 u^4) = \omega u^4.$$

Conform Teoremei 1, u poate fi simplificat. Deci va trebui să verificăm

$$\{\sin \omega t\} * (u + \omega^2 u^3) = \omega u^3,$$

sau echivalent

$$\int_0^t \sin \omega(t-\tau)\left[1 + \frac{\omega^2}{2}\tau^2\right] d\tau = \frac{\omega}{2} t^2. \tag{19}$$

Cititorul poate verifica această relaţie integrală, verificînd astfel relaţia (18.*b*) Corespondenţa biunivocă între funcţii continue şi anumite funcţii generalizate ca cele date în (18), este utilă pentru rezolvarea aumitor ecuaţii de convoluţie. De exemplu considerăm

$$(u + \omega^2 u^3) * z = u^2.$$

Funcția generalizată soluție este

$$z = \frac{u^2}{u + \omega^2 u^3}.$$

Dar din (18c) știm că aceasta este aceeași cu funcția continuă $\{\cos\omega t\}$.

Funcții local integrabile

O clasă de funcții care are o comportare „mai puțin bună" decît funcțiile continue este clasa funcțiilor local integrabile. Prin funcție local integrabilă înțelegem o funcție care 1) este continuă cu excepția unui număr finit de puncte în orice interval finit și 2) admite o integrală Riemann proprie și absolut convergentă în orice interval finit în interiorul căruia funcția este continuă. În aceste condiții, integrala pe intervalul $0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$ pentru orice $\hat{t} > 0$, este definită ca sumă a integralelor Riemann efectuate pe subintervalele în interiorul cărora funcția este continuă. Este interesant să observăm că produsul de convoluție a două funcții local integrabile este o funcție local integrabilă iar produsul de convoluție al unei funcții local integrabile cu una continuă este o funcție continuă.

Este clar din definiția unei funcții local integrabile că două astfel de funcții vor avea aceeași integrală pe intervalul $0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$ pentru orice $\hat{t} > 0$, dacă ele diferă numai într-un număr finit de puncte în orice interval finit sau, echivalent, dacă au aceeași valoare în punctele de continuitate. Vom urma practica obișnuită de a privi aceste două funcții ca fiind echivalente.

Să vedem dacă funcțiile integrabile local pot fi identificate cu anumite funcții generalizate. Această mulțime poate fi inclusă în mulțimea funcțiilor generalizate dacă se satisfac aceleași două condiții anterioare. Cuvîntul „scalar" va fi înlocuit desigur cu cuvîntul „local integrabilă". Pentru a vedea dacă condițiile sînt satisfăcute, observăm că dacă a este o funcție continuă oarecare diferită de $\{0\}$ iar b este o funcție local integrabilă, atunci funcția generalizată $b*a//a$ corespunde biunivoc cu b; astfel condiția 1) este satisfăcută.

Această relație se exprimă simbolic astfel

$$b \Leftrightarrow \frac{b * a}{a}, \tag{20}$$

care este de același tip cu relația (14) pentru funcțiile continue. Lăsăm cititorului verificarea condiției 2).

Mulțimea funcțiilor local integrabile conține în mod evident mulțimea funcțiilor continue. Mai semnificativ este faptul că ea conține de asemenea

şi mulţimea funcţiilor *continue pe porţiuni*. Observăm că orice funcţie continuă pe porţiuni poate fi exprimată ca suma unor funcţii continue şi a unei sume ponderate de funcţii treaptă deplasate[1]. Funcţia treaptă deplasată notată cu u_α este definită astfel

$$u_\alpha = \{u_\alpha(t)\}, \tag{21}$$

unde

$$u_\alpha(t) = 0 \qquad (0 \leqslant t < \alpha)$$

$$= 1 \qquad (\alpha \leqslant t).$$

Funcţia generalizată identificată cu u_α este desigur $u * a // a$. Vom considera din nou această funcţie generalizată, în paragraful următor.

Pînă acum o literă cursivă mică a desemnat o funcţie în general local integrabilă. Dar există o corespondenţă biunivocă între mulţimea acestor funcţii şi o submulţime a funcţiilor generalizate. Deci este posibil a nota funcţiile generalizate cu o literă mică cursivă. Astfel dacă b este o funcţie local integrabilă, funcţia generalizată corespunzătoare va fi $b * a // a$. Pentru comoditate, de acum înainte, vom nota această funcţie generalizată pur şi simplu cu b. Acest lucru nu va produce dificultăţi, deoarece fiecare operaţie asupra funcţiilor obişnuite incluzînd operaţia împărţirii de convoluţie îşi are corespondent în mulţimea operaţiilor diferite pe funcţii generalizate.

În afară de simplificarea notaţiei, noua notaţie poate da mai mult sens relaţiilor. De exemplu u^n în membrul stîng al lui (17) era o funcţie ordinară. Cu noua notaţie ea poate fi privită ca funcţie generalizată, şi (17) devine

$$u^n = \frac{u^{n+1}}{u}. \tag{22}$$

Deşi cînd s-a introdus pentru prima dată în (17), n era un întreg pozitiv, putem acum lua $n=0$ şi găsim

$$u^0 = \frac{u}{u}. \tag{23}$$

Semnificaţia acestei relaţii o vom discuta în paragraful următor.

---

[1]) Această afirmaţie este uşor de verificat cu condiţia să se ţină seama de echivalenţa a două funcţii local integrabile.

În lumina celor de mai sus, relațiile (18) pot fi înlocuite cu

$$\{\varepsilon^{-\alpha t}\} \Leftrightarrow \frac{u}{u^{0} + \alpha u} \tag{24a}$$

$$\{\sin \omega t\} \Leftrightarrow \frac{\omega u^{2}}{u^{0} + \omega^{2} u^{2}} \tag{24b}$$

$$\{\cos \omega t\} \Leftrightarrow \frac{u}{u^{0} + \omega^{2} u^{2}}. \tag{24c}$$

Vom dicuta una din acestea și vom lăsa cititorului examinarea celorlalte. Considerăm (24c). Aceasta este funcția generalizată soluție a ecuației de convoluție

$$(u^{0} + \omega^{2} u^{2}) * z = u. \tag{25}$$

În această ecuație există un termen deosebit, $u^{0} * z$. Din (23) observăm că $u^{0} * z$ este mai precis $u * z // u$. Dar dacă z este o funcție continuă sau local integrabilă, $u * z\beta // u$ este conform lui (14) sau (20), chiar z[1]. Avînd în vedere acest lucru, ecuația de convoluție definită pe mulțimea funcțiilor continue sau local integrabile, corespunzătoare lui (25) este

$$z(t) + \omega^{2} \int_{0}^{t} (t - \tau) z(\tau) d\tau = 1. \tag{26}$$

Din (24c) știm că $z(t) = \cos \omega t$ este soluția lui (26). Celelalte relații din (24) pot fi examinate într-o manieră similară.

A.1.4. FUNCȚIILE GENERALIZATE CA OPERATORI

Am discutat pînă acum relațiile între diverse funcții și funcțiile generalizate. În continuare ne vom ocupa de operatorii de derivare și integrare și vom discuta relațiile în care se află cu funcțiile generalizate.

Considerăm din nou funcția u. Produsul de convoluție al acesteia cu funcția a este

$$u * a = \left\{ \int_{0}^{t} a(\tau) \, d\tau \right\}. \tag{27}$$

---

[1]) A se observa că acesta este același rezultat cu cel obținut atunci cînd se face convoluția unei funcții impuls cu z. Vom discuta identificarea lui u^{0} cu funcția impuls unitate în paragraful următor.

Astfel, în afară de faptul că poate fi privită ca funcţie continuă $\{1\}$, u poate fi considerată ca un operator integral. Analog, u^{n+1} pentru n pozitiv, care este conform celor menţionate anterior $t^n/n!$, poate fi privită ca un operator de integrare aplicat de $n+1$ ori. Ca o ilustrare a acestei interpretări a lui u^{n+1} ca operator de integrare, observăm că aceasta indică faptul că ecuaţia integrală corespunzătoare lui (25), în spaţiul funcţiilor continue sau local integrabile este

$$z(t)+\omega^2\int_0^t\int_0^\tau z(\nu)d\nu\, d\tau=1. \tag{28}$$

Observăm că (28) are aceeaşi soluţie, $z(t)=\cos\omega t$ ca ecuaţia de convoluţie (26) ce corespunde lui (25).

Înainte de a merge mai departe, să folosim interpretarea lui u^n ca o integrare de n ori, pentru a atribui o valoare unei funcţii generalizate la timpul t. Fie a o funcţie generalizată arbitrară. Presupunem că $u^n * a$ se află în corespondenţă unu la unu cu funcţia ordinară b, care admite derivată de ordin n pentru $\tau_1<t<\tau_2$. Atunci, pentru $\tau_1<t<\tau_2$ vom atribui valoarea $b^{(n)}(t)$ lui a la timpul t. Valoarea atribuită lui a în acest mod este unică [1].

Ca un exemplu fie $a=u^0$ şi să determinăm o valoare ce o vom atribui pentru această funcţie. Dar $u*u^0=u^2/|u$ este conform lui (14) aceeaşi cu funcţia continuă u, care este derivabilă pentru $t>0$. Deoarece $du(t)/dt=0$ pentru $t>0$, atribuim valoarea zero lui u^0 pentru $t>0$.

Să dăm acum o interpretare lui u^n pentru n negativ. Astfel spus, vom examina u^{-n} pentru n pozitiv. Pentru uşurinţă vom nota $p^n=u^{-n}$. Presupunem apoi că a este o funcţie care este derivabilă de $n-1$ ori avînd derivatele continue iar derivata n-a, fiind o funcţie local integrabilă. Atunci

$$p^n*a=a^{(n)}+a^{(n-1)}(0)\,p^0+a^{(n-2)}(0)\,p+\ldots+a(0)\,p^{n-1}, \tag{29}$$

în care $a^{(k)}$ este derivata de ordin k a lui a în raport cu t. Această relaţie se stabileşte uşor prin inducţie. Vom începe aici demonstraţia, lăsînd terminarea ei cititorului. Fie $n=1$ atunci (29) devine

$$p*a=a^{(1)}+a(0)p^0,$$

care într-o notaţie mai precisă este

$$\frac{u}{u*u}*\frac{a*u}{u}=\frac{a^{(1)}*u}{u}+\frac{a(0)\,u}{u}.$$

---

[1]) Unicitatea este stabilită prin Teorema 6 în *Operational Calculus and Generalized Functions*, Arthur Erdelyi, Holt Rinehart & Winston, New York, 1962.

Conform relaţiilor (5), (6), (8) ecuaţia devine

$$\frac{u*a}{u*u}=\frac{a^{(1)}*u+a(0)\,u}{u}.$$

Dacă aceasta este o relaţie valabilă, atunci din (4), rezultă

$$u*u*a=u*u*u*a^{(1)}+a(0)u*u*u,$$

sau echivalent

$$u*u*u*a^{(1)}=u*u*(a-a(0)u).$$

Conform Teoremei 1, aceasta devine

$$u*a^{(1)}=a-a(0)u,$$

sau

$$\int_0^t a^{(1)}(\tau)d\tau=a(t)-a(0),$$

care este adevărată dacă $a^{(1)}$ este integrabilă local. Astfel (29) este adevărată pentru $n=1$; demonstraţia se completează prin inducţie.

Dacă a este derivabilă de n ori iar $a(0)=a^{(1)}(0)=\ldots=a^{(n-1)}(0)=0$, atunci (29) arată că funcţia generalizată p^n*a se află în corespondenţă unu la unu cu funcţia $a^{(n)}$.
Deci funcţia generalizată p^n trebuie privită ca un operator diferenţial. Dacă a nu este derivabilă de un număr suficient de ori, sau dacă una sau mai multe din $a^{(k)}(0)$, $k=1,\ldots n-1$, nu sînt zero, atunci p^n*a nu se află în corespondenţă biunivocă cu funcţia ordinară. În acest caz p^n*a există numai ca funcţia generalizată; vom numi p^n*a, derivata generalizată a n-a a lui a.

Să aplicăm unele din rezultatele de mai sus în cazul unui exemplu. Ecuaţia diferenţială ordinară

$$\frac{d}{dt}z(t)+\alpha z(t)=0 \tag{30}$$

îşi are corespondentul în mulţimea funcţiilor generalizate

$$p*z-z(0)p^{0}+\alpha p^{0}*z=0.$$

Pentru $z(0)=2$, funcţia generalizată soluţie este

$$z=2\frac{p^{0}}{p+\alpha p^{0}}. \tag{31}$$

Reamintind că $p = u^{-1}$ şi că $p^0 = u^0$ obţinem

$$z = 2\frac{u}{u^0 + \alpha u},$$

care conform lui (24a) este aceeaşi cu 2 $\{\varepsilon^{-\alpha t}\}$. Aceasta concordă cu faptul că soluţia ecuaţiei diferenţiale (30) este 2 $\{\varepsilon^{-\alpha t}\}$ pentru $z(0)=2$, fapt cunoscut din teoria ecuaţiilor diferenţiale.

Pentru găsirea funcţiei ordinare care se află în corespondenţă unu la unu cu funcţia generalizată din (31), a fost utilă relaţia (24a). Pentru rezolvarea altor ecuaţii diferenţiale, care vor fi considerate în paragraful următor va fi util a avea relaţii între funcţii generalizate exprimate în raport cu p şi funcţiile ordinare corespunzătoare.

Aceste relaţii sînt arătate în Tabelul A.1.1.

Tabelul A.1.1.

Funcţia ordinară — Funcţia generalizată (Perechi)

Funcţia ordinară	Funcţia generalizată	Funcţia ordinară	Funcţia generalizată
$\{1\}$	$\frac{p^0}{p}$	$\{\sin \omega t\}$	$\frac{\omega p^0}{p^2 + \omega^2 p^0}$
$\{t\}$	$\frac{p^0}{p^2}$	$\{\cos \omega t\}$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2 p^0}$
$\left\{\frac{t^2}{2}\right\}$	$\frac{p^0}{p^3}$	$\{\varepsilon^{-\alpha t} \sin \omega t\}$	$\frac{\omega p^0}{(p+\alpha p^0)^2 + \omega^2 p^0}$
$\left\{\frac{t^n}{n!}\right\}$	$\frac{p^0}{p^{n+1}}$	$\{\varepsilon^{-\alpha t} \cos \omega t\}$	$\frac{p + \alpha p^0}{(p + \alpha p^0)^2 + \omega^2 p^0}$
$\{\varepsilon^{-\alpha t}\}$	$\frac{p^0}{p + \alpha p^0}$	$\{t\, \varepsilon^{-\alpha t} \sin \omega t\}$	$\frac{2\omega(p + \alpha p^0)}{[(p + \alpha p^0)^2 + \omega^2 p^0]^2}$
$\{t\varepsilon^{-\alpha t}\}$	$\frac{p^0}{(p + \alpha p^0)^2}$	$\{t\, \varepsilon^{-\alpha t} \cos \omega t\}$	$\frac{(p + \alpha p^0)^2 - \omega^2 p^0}{[(p + \alpha p^0)^2 + \omega^2 p^0]^2}$
$\left\{\frac{t^n \varepsilon^{-\alpha t}}{n!}\right\}$	$\frac{p^0}{(p + \alpha p^0)^{n+1}}$		

Funcţia impuls unitate

Cea mai mare parte a paragrafelor precedente a fost consacrată funcţiilor generalizate care sînt în corespondenţă unu la unu cu funcţii ordinare sau cu proprietăţi ale operatorilor definiţi asupra funcţiilor ordinare. Vom considera acum relaţia funcţiilor generalizate cu funcţia impuls şi derivatele sale. Vom arăta că $p^{\bullet} = u^{\bullet}$ este în mod potrivit interpretată ca funcţie impuls. Pentru a verifica acest lucru, fie a o funcţie continuă, atunci

$$a = \frac{a * u}{u} = a * p^{\bullet}. \tag{32}$$

Dacă, urmînd obiceiul, vom nota cu δ o funcţie simbolică ce corespunde cu $p^{\bullet}$, atunci (32) este echivalentă în sens formal cu următoarele :

$$a(t) = \int_0^t a(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau. \tag{33}$$

Aceasta este ceea ce se numeşte *proprietatea de filtrare sau selecţie* a funcţiei impus unitate δ.

Funcţia generalizată p este în mod adecvat interpretată ca prima derivată a funcţiei impuls. Pentru a arăta aceasta, presupunem că funcţia a are o derivată de ordinul întîi continuă. Atunci folosind (29) avem

$$p * a = a^{(1)} + a(0)\, p^{\bullet}. \tag{34}$$

Dacă $a(0) \neq 0$, $p * a$ este o funcţie generalizată care nu se află în corespondenţă unu la unu cu o funcţie ordinară. Totuşi, după cum s-a arătat anterior, lui $p^{\bullet}$ i se poate atribui valoarea 0 pentru orice $t > 0$. Acest lucru este util. Deoarece p este derivata generalizată de ordinul întîi al lui $p^{\bullet}$, care a fost interpretat ca funcţie impuls unitate, fie $\delta^{(1)}$ notaţia pentru o funcţie simbolică ce corespunde lui p; atunci pentru $t > 0$, (34) este echivalent în sens formal cu

$$a^{(1)}(t) = \int_0^t a(\tau)\, \delta^{(1)}(t-\tau)\, d\tau. \tag{35}$$

Putem continua în acest mod şi să intepretăm p^{n} ca derivata de ordin n a funcţiei impuls unitate. Justificarea în detaliu a acestui fapt este lăsată pentru cititor.

Considerăm acum funcţia generalizată $p * u_\alpha$ ca un operator, unde u_α este treapta deplasată dată în (21). Presupunem că funcţia generalizată a este de asemenea o funcţie continuă; atunci

$$p * u_\alpha * a = p * \left\{ \int_0^t u_\alpha (t - \tau) a(\tau)\, d\tau \right\}$$

$$= p * \begin{Bmatrix} 0 & (0 \leqslant t < \alpha) \\ \int_0^{t-\alpha} a(\tau) d\tau & (\alpha \leqslant t) \end{Bmatrix}.$$

Aplicînd (34), obţinem din această relaţie

$$p * u_\alpha * a = \begin{Bmatrix} 0 & (0 \leqslant t < \alpha) \\ a(t - \alpha) & (\alpha < t) \end{Bmatrix}. \tag{36}$$

Astfel funcţia generalizată $p * u_\alpha$ are proprietatea unui operator de deplasare sau întîrziere. Această proprietate face ca $p * u_\alpha$ să fie folositoare pentru rezolvarea ecuaţiilor cu diferenţe finite. Deoarece în această lucrare nu se folosesc aceste ecuaţii, nu vom continua dezvoltarea altor consideraţii pentru $p * u_\alpha$.

A.1.5. ECUAŢII INTEGRODIFERENŢIALE

În studiul reţelelor liniare invariante în timp, cu parametri concentraţi, subiect de bază al acestei lucrări, ecuaţiile dinamice întîlnite sînt ecuaţii integrodiferenţiale. (În formularea prin ecuaţii de stare ele sînt ecuaţii diferenţiale pure). Aceste ecuaţii considerate ca ecuaţii asupra mulţimii funcţiilor generalizate, au ca soluţii funcţii generalizate. Este de dorit, atunci cînd este posibil, să identificăm aceste funcţii generalizate cu funcţii ordinare. Vom arăta cum se face acest lucru extinzînd conceptul de dezvoltare în fracţii parţiale la funcţiile generalizate.

Soluţia funcţie generalizată a unei ecuaţii integrodiferenţiale liniare se poate exprima ca suma: 1) a unui cît de convoluţie al unor polinoame în p şi 2) a unui cît de convoluţie al unor polinoame în p, în produs de convoluţie cu o altă funcţie generalizată. Ca exemplu, fie ecuaţia

$$\frac{dz(t)}{dt} + 3z(t) + 2 \int_0^t z(\tau) d\tau + 1 = 2\varepsilon^{-t}, \tag{37}$$

cu $z(0)=-1$. Ecuația corespunzătoare pe mulțimea funcțiilor generalizate este

$$p*z+p^0+3p^0*z+2p^{-1}*z+p^0=\{2\varepsilon^{-t}\}*p^0 .$$

Funcția generalizată soluție pentru z este

$$z=\frac{-2p^0}{p+3p^0+2p^{-1}}+\frac{p^0}{p+3p^0+2p^{-1}}*\{2\varepsilon^{-t}\},$$

sau echivalent

$$z=\frac{-2p}{p^2+3p+2p^0}+\frac{p}{p^2+3p+2p^0}*\{2\varepsilon^{-t}\}. \qquad (38)$$

Evident, dacă putem identifica $p//(p^2+3p+2p^0)$ cu o funcție ordinară, atunci z va putea fi de asemenea identificat cu o funcție ordinară.

În cazul general pe care îl vom lăsa cititorului spre verificare, soluția unei ecuații integrodiferențiale liniare se exprimă după cum urmează:

$$z=\frac{\alpha_m p^m+\alpha_{m-1}p^{m-1}+\ldots+\alpha_0 p^0}{p^n+\gamma_{n-1}p^{n-1}+\ldots+\gamma_0 p^0}+\frac{\beta_l p^l+\beta_{l-1}p^{l-1}+\ldots+\beta_0 p^0}{p^n+\gamma_{n-1}p^{n-1}+\ldots+\gamma_0 p^0}*f. \qquad (39)$$

Dacă fiecare din aceste cîturi de convoluție poate fi identificat cu o funcție ordinară și dacă funcția generalizată f este de asemenea o funcție ordinară, atunci funcția generalizată soluție z va fi o funcție ordinară.

Deoarece ambele cîturi de convoluție în (39) sînt de aceași formă, vom examina numai pe cel de al doilea:

$$\frac{\beta_l p^l+\beta_{l-1}p^{l-1}+\ldots+\beta_0 p^0}{p^n+\gamma_{n-1}p^{n-1}+\ldots+\gamma_0 p^0}.$$

În eventualitatea $l>n$, este ușor de verificat că există niște scalari $\xi_0\ldots\xi_{l-n}$

și $\nu_0,\ldots \nu_{n-1}$ există astfel încît

$$\frac{\beta_l p^l+\ldots+\beta_0 p^0}{p^n+\ldots+\gamma_0 p^0}=\xi_{l-n}p^{l-n}+\ldots+\xi_0 p^0+\frac{\nu_{n-1}p^{n-1}+\ldots+\nu_0 p^0}{p^n+\ldots+\gamma_0 p^0}. \qquad (40)$$

Numitorul $p^n + \dots \nu_0 p^{\bullet}$ se poate descompune în factori

$$p^n + \dots + \gamma_0 p^{\bullet} = (p + \lambda_1 p^{\bullet}) \dots (p + \lambda_n p^{\bullet}), \tag{41}$$

unde λ_i sînt zerourile lui $\lambda^n + \nu_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots \nu_0 \lambda^0$. Acest lucru se poate verifica conform lui (4) după ce am notat $p = u//u^2$ și $p^{\bullet} = u//u$. Astfel

$$\frac{\nu_{n-1} p^{n-1} + \dots + \nu_0 p^{\bullet}}{p^n + \dots + \gamma_0 p^{\bullet}} = \frac{\nu_{n-1} p^{n-1} + \dots + \nu_0 p^{\bullet}}{(p + \lambda_1 p^{\bullet}) \dots (p + \lambda_n p^{\bullet})}. \tag{42}$$

Presupunem că λ_i sînt distincți; membrul drept se poate atunci exprima ca o sumă de cîturi de convoluție. Astfel,

$$\frac{\nu_{n-1} p^{n-1} + \dots + \nu_0 p^{\bullet}}{(p + \lambda_1 p^{\bullet}) \dots (p + \lambda_n p^{\bullet})} = \frac{\mu_1 p^{\bullet}}{p + \lambda_1 p^{\bullet}} + \dots + \frac{\mu_n p^{\bullet}}{p + \lambda_n p^{\bullet}}, \tag{43}$$

unde

$$\mu_i = \left[(\lambda - \lambda_i) \frac{\nu_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \nu_0}{\lambda^n + \dots + \gamma_0} \right]_{\lambda = \lambda_i}. \tag{44}$$

Membrul drept al lui (43) este dezvoltarea în funcții parțiale a membrului stîng atunci cînd λ_i sînt valori distincte. Relația (44) se poate verifica de către cititor. Dacă λ_i nu sînt distincte dezvoltarea în fracții parțiale este mai complicată și notația mai incomodă. Cu toate acestea ea este analoagă întrutotul cu cazul variabilelor obișnuite. Nu vom considera însă, acest caz în detaliu. Pentru a completa cazul în care λ_i sînt distincte, vom substitui (43) în (42) și rezultatul în (40). Se obține :

$$\frac{\beta_l p^l + \dots + \beta_0 p^{\bullet}}{p^n + \dots + \gamma_0 p^{\bullet}} = \xi_{l-n} p^{l-n} + \dots + \zeta_0 p^{\bullet}$$
$$+ \frac{\mu_1 p^{\bullet}}{p + \lambda_1 p^{\bullet}} + \dots + \frac{\mu_n p^{\bullet}}{p + \lambda_n p^{\bullet}}. \tag{45}$$

Vom numi cîtul de convoluție din stînga *cît de convoluție rațional în p* și vom spune că el este propriu dacă $l < n$ sau, echivalent, dacă $\xi_0 = \dots = \xi_{1-n} = 0$.

Fiecare din termenii $\mu_i p^{\bullet} //(p + \lambda_i p^{\bullet})$ din (45) se află în corespondență biunivocă cu o funcție continuă așa cum se vede din Tabelul A.1.1. : $\mu_i p^{\bullet} //(p + \lambda_i p^{\bullet}) \Leftrightarrow \{\mu_i e^{-\lambda_i t}\}$ și fiecăruia dintre termenii $\xi_i p^i$ i se poate atribui valoarea zero pentru $t > 0$. Astfel, putem face următoarea afirmație despre funcția generalizată z din (39) :

1. Dacă $m<n$, $l<n$ și f este o funcție local integrabilă, atunci z este o funcție continuă.

2. Dacă $m\geqslant n$, $l<n$ și f este o funcție local integrabilă, atunci lui z i se poate atribui o valoare pentru $t>0$.

3. Dacă $m<n$, $l\geqslant n$ și f are derivata de ordin $(l-n)$ continuă, atunci lui z i se poate atribui o valoare pentru $t>0$.

4. Dacă $m\geq n$, $l\geq n$ și f are derivata de ordin $(l-n)$ continuă, atunci lui z i se poate atribui o valoare pentru $t>0$.

Pentru a exemplifica (45), considerăm cazul particular al lui z dat de (38). Avem

$$\frac{p}{p^2+3p+2p^{\bullet}}=\frac{p}{(p+p^{\bullet})(p+2p^{\bullet})}=\frac{-p^{\bullet}}{p+p^{\bullet}}+\frac{2p^{\bullet}}{p+2p^{\bullet}}=$$

$$=\{-\varepsilon^{-t}\}+\{2\varepsilon^{-2t}\}.$$

Rîndul de jos din relația anterioară se obține din Tabelul A.1.1. Substituind acest rezultat în (38) obținem

$$z(t)=2\varepsilon^{-t}-4\varepsilon^{2t}+\int_0^t[-\varepsilon^{-(t-\tau)}+2\varepsilon^{-2(t-\tau)}]\,2\varepsilon^{-\tau}\,d\tau$$

ca soluție pentru (38).

A.1.6. TRANSFORMATA LAPLACE A UNEI FUNCȚII GENERALIZATE

În analiza rețelelor liniare invariate în timp, se utilizează frecvent metoda transformatei Laplace și pentru a aplica această transformare se introduce transformata Laplace a funcției impuls unitate și a derivatelor sale. Pentru a justifica acest lucru trebuie să se extindă definiția transformatei Laplace astfel încît să se includă și funcțiile generalizate, sau cel puțin, funcțiile generalizate particulare p^n, $n\geqslant 0$, care sînt asociate cu funcția impuls și derivatele sale.

Transformata Laplace a unei submulțimi mari de funcții generalizate se poate defini cu ajutorul unei teoreme a lui Krabble[1)]. Înainte de enunțarea acestei teoreme folositoare trebuie să definim mai multe mulțimi

[1)] G. Krabbe „Ratios of Laplace Transforms, Mikusinski Operational Calculus" *Math. Annalen*, vol. 162 pag. 237–245. Acest articol este retipărit în *Contributions to Functional Analysis*, Springer Verlag, New York, 1966.

de funcţii. Fie $\mathscr{M}$ mulţimea tuturor funcţiilor de variabilă complexă s care sînt regulate (olomorfe) cu excepţia unui număr finit de poli în semiplanul drept dat de $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\hat{s})$ pentru anumite valori ale lui s. Fie $\hat{\mathscr{M}}$ submulţimea funcţiilor din $\mathscr{M}$, avînd proprietatea că fiecare din ele este egală într-un anumit semiplan drept cu raportul a două funcţii mărginite şi regulate în acel semiplan drept, de exemplu, $1/(s+2)$ şi $(s+1)/(s+3)$ sînt funcţii de s mărginite, regulate pentru $\mathrm{Re}(s) > -2$; raportul lor $[1/(s+2)]/ /[(s+1)(s+3)] = (s+3/(s+2)(s+1)$ este o funcţie regulată pentru $\mathrm{Re}(s) > -2$, cu excepţia polului $s = -1$. Astfel, funcţia $(s+3)/(s+1)(s+2)$ aparţine lui $\hat{\mathscr{M}}$. Vom nota $\hat{\mathscr{C}}$, mulţimea tuturor funcţiilor c astfel încît să existe pentru o anumită valoare $s = \hat{s}$,

$$\mathscr{L}\{c\} = \left\{\int_0^\infty c(t)\,\varepsilon^{-st}\,dt\right\}. \tag{46}$$

Atunci $\mathscr{L}\{c\}$ este regulată în semiplanul drept $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\hat{s})$. În sfîrşit vom nota cu $\hat{\mathscr{G}}$ o submulţime a mulţimii funcţiilor generalizate $b//a$ astfel încît a şi b să fie funcţii în $\hat{\mathscr{C}}$ iar $\mathscr{L}\{b\}/\mathscr{L}\{a\}$ să fie o funcţie în $\hat{\mathscr{M}}$. Cu aceste definiţii, teorema lui Krabbe se enunţă astfel:

Teorema 2. *Există o aplicaţie bijectivă notată* $\hat{\mathscr{L}}^{-1}$, *a mulţimii funcţiilor* $\hat{\mathscr{M}}$ *pe mulţimea funcţiilor generalizate* $\hat{\mathscr{G}}$. Aplicaţia $\hat{\mathscr{L}}^{-1}$ posedă o inversă $\hat{\mathscr{L}}$ care este liniară şi satisface

$$\hat{\mathscr{L}}\{g_1 * g_2\} = \hat{\mathscr{L}}\{g_1\}\,\hat{\mathscr{L}}\{g_2\}. \tag{47}$$

unde g_1 şi g_2 sînt două funcţii generalizate din $\hat{\mathscr{G}}$. În plus, dacă $a//b$ este o funcţie generalizată în $\hat{\mathscr{G}}$ atunci

$$\hat{\mathscr{L}}\{b//a\} = \mathscr{L}\{b\}/\mathscr{L}\{a\}. \tag{48}$$

Considerăm acum o mulţime $\hat{\mathscr{F}}$ de funcţii local integrabile b astfel încît

$$\mathscr{L}\{b\} = \left\{\int_0^\infty b(t)\,\varepsilon^{-st}\,dt\right\}$$

să existe pentru o anumită valoare $s = \hat{s}$.

Considerăm apoi funcția generalizată $u*b//u$ identificată cu b. Funcția

$$u*b=\left\{\int_0^t b(\tau)\,d\tau\right\}$$

este continuă și transformata Laplace a sa există pentru $s=\hat{s}$, deoarece b aparține lui $\hat{\mathscr{F}}$. Deci $u*b$ aparține lui $\hat{\mathscr{C}}$. În plus, $\mathscr{L}\{u*b\}=L\{b\}/s$ este mărginită și regulată într-un anumit semiplan drept iar $\mathscr{L}\{u\}=1/s$ este mărginită și regulată în semiplanul drept dat de $\mathrm{Re}\,(s)>\varepsilon$ pentru orice $\varepsilon>0$. Astfel $u*b//u$ aparține lui $\hat{\mathscr{G}}$. Așadar

$$\hat{\mathscr{L}}\left\{\frac{u*b}{u}\right\}=\frac{\mathscr{L}\{u*b\}}{\mathscr{L}\{u\}}=\mathscr{L}\{b\}. \tag{49}$$

Aceasta arată că transformarea $\hat{\mathscr{L}}$, a unei funcții generalizate într-o funcție de variabilă complexă s, coincide cu transformarea Laplace, dacă funcția generalizată este de asemenea transformabilă Laplace și local integrabilă. Astfel, transformarea $\hat{\mathscr{L}}$ este o extensie a transformării Laplace $\mathscr{L}$. Aceasta fiind situația nu va rezulta nici o confuzie dacă de aici înainte vom omite notația corcumflexă din $\hat{\mathscr{L}}$.

Să ne îndreptăm atenția spre funcția generalizată $p^n=u//u^{n+1}$ Deoarece u și u^{n+1} aparțin amîndouă lui $\hat{\mathscr{C}}$ și deoarece $\mathscr{L}\{u\}=1/s$ iar $\mathscr{L}\{u^{n+1}\}=1/s^{n+1}$ aparțin lui M, $\mathscr{L}\{p^n\}$ există. Din (48) rezultă

$$\mathscr{L}\{p^n\}=s^n. \tag{50}$$

Reamintim că p^n este funcția generalizată asociată cu $\delta^{(n)}$, derivata a n-a a funcției impuls unitate. Transformata Laplace a lui $\delta^{(n)}$ în cărți sau aplicații asupra teoriei transformatei Laplace este dată ca fiind s^n; (50) concordă cu notația că $\mathscr{L}\{\delta^{(n)}\}=s^n$.

Nu vom merge mai departe cu considerațiile asupra transformatei Laplace a unei funcții generalizate. Este suficient faptul că ea reprezintă o extensie a transformatei Laplace obișnuite și concordă cu transformata Laplace euristică a funcției impuls unitate și a derivatelor sale.

ANEXA 2

Teoria funcţiilor de o variabilă complexă

Scopul acestei anexe referitoare la funcţii de o variabilă complexă este dublu. În primul rînd ea va servi acelora care sînt familiarizaţi cu acest subiect, dar care doresc să-şi reamintească anumite probleme specifice. În al doilea rînd, ea va servi ca o bază, care poate fi dezvoltată cu ajutorul demonstraţiilor, exemplelor, etc. Materialul este aproape în întregime prezentat sumar. Nu încercăm să prezentăm justificări, iar demonstraţiile sînt destul de puţine. Totuşi, rezultatele sînt prezentate exact.

A.2.1. FUNCŢII ANALITICE

Presupunem că sîntem familiarizaţi cu algebra numerelor complexe (adunare, scădere, înmulţire şi împărţire) şi cu reprezentarea numerelor complexe ca puncte în plan. Presupunem de asemenea că sîntem familiarizaţi cu elementele teoriei funcţiilor de o variabilă reală.

Fie $s=\sigma+j\omega$ notaţia unei variabile complexe. Spunem că o altă variabilă complexă $F=U+jX$ este o *funcţie* de o variabilă complexă s, dacă fiecărei valori a lui s (dintr-o mulţime) îi corespunde o valoare a lui F sau un set de valori pentru F. Vom scrie $F(s)$, unde $F(.)$ este operatorul care asociază valorile lui F cu valorile lui s. Dacă fiecărei valori a lui s (dintr-o mulţime) îi corespunde o singură valoare pentru F, spunem că este o funcţie *univocă* de s; altfel ea este *multiformă*.

Continuitatea pentru o funcţie de o variabilă complexă este formal definită în acelaşi fel ca pentru o funcţie de o variabilă reală; $F(s)$ este *continuă* în s_0 dacă ea este definită într-o vecinătate a lui s_0 şi dacă

$$\lim_{s\to s_0} F(s)=F(s_0)=F_0 \tag{1}$$

Această formulare poate fi interpretată în planul complex în felul următor. Fie un număr dat $\varepsilon>0$. Considerăm o vecinătate circulară a lui $F(s_0)$ ca în fig. A.2.1 unde toate punctele din interiorul cercului de rază ε și cu centrul în $F(s_0)$ aparțin acestei vecinătăți. Relația (1) este echivalentă următoarei formulări. Putem găsi o vecinătate suficient de mică a lui s_0, de rază $\delta>0$, astfel ca valorile lui $F(s)$ corespunzătoare tuturor punctelor din această vecinătate a lui s_0, să cadă în interiorul cercului de rază ε, cu centrul în $F(s_0)$.

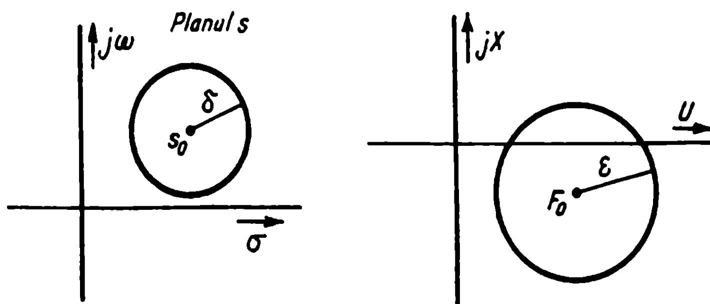


Fig. A.2.1. Vecinătăți în planul s și planul F.

Diferențiabilitatea în planul complex este definită de aceeași relație formală ca în cazul variabilei reale, dar este o noțiune cu semnificații mult mai largi.

$F(s)$ este diferențiabilă în s_0, cu derivata $F'(s)$, dacă

$$F'(s_0) = \lim_{s\to s_0} \frac{F(s) - F(s_0)}{s - s_0} \tag{2}$$

există și este finită.

Această definiție implică presupunerea că s poate tinde către s_0 în orice direcție, pe o spirală sau orice altă cale. Limita definită de (2) trebuie să existe (și să fie unică) independent de modul în care s tinde către s_0. Acesta este motivul pentru care diferențiabilitatea în planul complex este o cerință foarte stringentă.

Se poate arăta (aceasta este unul din multele „se poate arăta'' pe care le vom putea întîlni în această anexă) că putem aplica, fără nici o modificare, regulile obișnuite privind derivarea sumelor, produselor, cîturilor, etc., cunoscute de la funcții de variabilă reală.

În mod asemănător se procedează cu o funcție de funcție; toate funcțiile familiare au aceeași derivată ca în cazul real, cu deosebirea că acum variabila este complexă. Vom prezenta sumar, mai jos, aceste rezultate.

Fie $F_1(s)$ și $F_2(s)$ două funcții diferențiabile. Atunci

$$\frac{d}{ds}[F_1(s) + F_2(s)] = \frac{d}{ds}F_1(s) + \frac{d}{ds}F_2(s) \tag{3}$$

$$\frac{d}{ds}[F_1(s)F_2(s)] = F_1(s)\frac{d}{ds}F_2(s) + \left[\frac{d}{ds}F_1(s)\right]F_2(s) \tag{4}$$

$$\frac{d}{ds}\frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \frac{F_2(s)\,dF_1(s)/ds - F_1(s)\,dF_2(s)/ds}{F_2^2(s)}, \quad F_2(s) \neq 0 \tag{5}$$

$$\frac{d}{ds}F_1[F_2(s)] = \frac{dF_1}{dF_2}\frac{dF_2(s)}{ds} \tag{6}$$

$$\frac{d}{ds}(s^n) = n\,s^{n-1} \tag{7}$$

Dacă o funcție F de o variabilă complexă este diferențiabilă în punctul s_0 *și în toate punctele dintr-o vecinătate a lui* s_0, spunem că $F(s)$ este *regulată* în s_0.

Menționăm că această condiție „$F(s)$ este regulată în s_0" este mult mai restrictivă ca „$F(s)$ este diferențială în s_0'. O funcție $F(s)$ care are *cel puțin un punct regulat* (adică un punct în care funcția este regulată) în planul complex, se numește o *funcție analitică*. Un punct s_0 în care funcția analitică $F(s)$ *nu este regulată*, este un *punct singular* al funcției. Se spune că $F(s)$ are o singularitate în s_0. În particular, un punct pentru care nu există derivată este un punct singular.

Deși cerința de regularitate este o condiție foarte restrictivă, și deci clasa de funcții analitice este o submulțime foarte mică din mulțimea tuturor funcțiilor, aproape toate funcțiile pe care le întîlnim în aplicațiile fizice sînt funcții analitice. Un exemplu de funcție neanalitică este $|s|^2$. Această funcție are o derivată la $s=0$, dar numai în acest punct. Deci ea nu are puncte regulate. Funcția $F(s)=1/(s-1)$ este un exemplu simplu de funcție analitică. *Domeniul ei de regularitate* cuprinde întregul plan cu excepția punctului $s=1$. Punctul $s=1$ este un punct singular al acestei funcții.

Singularitățile unei funcții analitice sînt extrem de importante, așa cum se va vedea. Putem distinge două tipuri de singularități. Punctul s_0 este o *singularitate izolată* a lui $F(s)$, dacă s_0 este un punct singular, dar există o vecinătate a lui s_0 în care toate celelalte puncte (cu excepția lui s_0) sînt puncte în care funcția este regulată. Dacă o astfel de vecinătate nu există, s_0 este o *singularitate esențial neizolată*. Astfel, în orice vecinătate

a unei singularităţi neizolate există cel puţin un alt punct singular al funcţiei. Deci, o singularitate neizolată este un *punct limită* (sau un *punct de acumulare*) a singularităţilor şi reciproc.

Funcţiile raţionale (cîturi de polinoame) sînt exemple de funcţii care au numai singularităţi izolate. Pentru a da un exemplu de o funcţie care are singularităţi neizolate, putem considera funcţiile trigonometrice, pe care nu le-am definit încă. Totuşi un exemplu de o singularitate neizolată este punctul $s=0$ al funcţiei :

$$F(s) = \frac{1}{\sin 1/s} \tag{8}$$

Numitorul devine zero pentru

$$s = \frac{1}{k\pi} \tag{9}$$

şi astfel aceste puncte sînt puncte singulare ale lui $F(s)$. Originea este un punct limită pentru aceste singularităţi.

Marele matematician francez Augustin Cauchy (căruia îi aparţine aproape jumătate din teoria funcţiilor complexe) a dat următoarele condiţii necesare şi suficiente pentru diferenţiabilitatea unei funcţii de o variabilă complexă. Funcţia

$$F(s) = U(\sigma, \omega) + jX(\sigma, \omega)$$

este diferenţiabilă în s_0 dacă şi numai dacă derivatele parţiale $\partial U/\partial\sigma$, $\partial U/\partial\omega$, $\partial X/\partial\sigma$ şi $\partial X/\partial\omega$ *există, sînt continue în punctul* (σ_0, ω_0) *şi satisfac ecuaţiile*

$$\partial U/\partial\sigma = \partial X/\partial\omega \tag{10a}$$

$$\partial X/\partial\sigma = -\,\partial U/\partial\omega \tag{10b}$$

în acest punct.

Necesitatea este dovedită făcînd pe s să tindă către s_0 în (2), făcînd mai întîi pe σ să tindă către σ_0 şi apoi făcînd pe ω să tindă către ω_0 pentru un calcul, şi inversînd ordinea pentru celălalt calcul. Egalarea celor două derivate astfel obţinute ne conduce la (10). Suficienţa este dovedită folosind conceptul de diferenţială totală a funcţiei de două variabile şi definiţia derivatei.

Ecuaţiile (10) sînt cunoscute ca *ecuaţii Cauchy-Riemann* în cinstea matematicianului german Bernhard-Riemann (care a determinat aceste

ecuaţii fundamentale pentru toate funcţiile analitice) şi care completează teoria elaborată de Cauchy. Putem folosi ecuaţiile Cauchy -Riemann ca un test pentru regularitatea unei funcţii după cum urmează :

Dacă cele patru derivate parţiale sînt continue într-un domeniu al planului complex şi dacă ele satisfac ecuaţiile Cauchy-Riemann în fiecare punct al acestui domeniu, atunci $F(s)$ este regulată în acest domeniu.

Menţionăm că această condiţie implică vecinătatea lui s_0, tot aşa cum o face definiţia de regularitate a funcţiei. Demonstraţia acestui rezultat se poate face folosind conceptul de diferenţială totală pentru o funcţie de două variabile.

Diferenţiind una din cele două ecuaţii din (10) cu referire la σ şi cealaltă, cu referire la ω şi combinîndu-le, putem observa un fapt important şi anume că părţile reală şi imaginară ale unei funcţii analitice satisfac ecuaţiile Laplace în două dimensiuni, în interiorul domeniului de regularitate ; astfel :

$$\partial^2 U/\partial \sigma^2 + \partial^2 U/\partial \omega^2 = 0 \tag{11a}$$

$$\partial^2 X/\partial \sigma^2 + \partial^2 X/\partial \omega^2 = 0 \tag{11b}$$

Astfel, părţile reală şi imaginară ale unei funcţii analitice sînt *funcţii armonice*. Reciproca este de asemenea adevărată. Fiecare funcţie armonică (în două dimensiuni) este partea reală a unei funcţii analitice şi partea imaginară a unei alte funcţii analitice. Acest aspect face ca funcţiile analitice să prezinte un interes deosebit în teoria potenţialului cu două dimensiuni.

A.2.2. TRANSFORMAREA CONFORMĂ

O funcţie de o variabilă reală poate fi reprezentată geometric printr-un grafic. Totuşi, pentru o funcţie de o variabilă complexă, un „grafic” necesită patru dimensiuni, două pentru variabilă şi două pentru funcţie. Este deci imposibil de trasat un grafic pentru o funcţie analitică. Cu toate acestea, conceptul de reprezentare geometrică poate fi utilizat pentru funcţiile analitice, şi aceasta permite o înţelegere mai bună a acestor funcţii. Folosim două planuri, un plan s pentru variabilă şi un plan F pentru funcţie, aşa cum se arată în fig. A.2.2. şi astfel se obţin cele patru axe de coordonate.

Trasarea unui grafic complet arătînd ce valori ale funcţiei corespund fiecărui punct din planul s nu este indicată, deoarece ar face reprezentarea ininteligibilă. Vom alege în planul s unele linii reprezentative şi reprezentăm

în planul F valorile funcţiei $F(s)$ corespunzătoare punctelor de pe aceste linii. Pentru fiecare dreaptă reprezentativă din planul s se va obţine o curbă corespunzătoare în planul F. Ca exemplu, vom considera reprezentarea funcţiei $F(s)=s^2$ din fig. A.2.2. Ca linii reprezentative au fost alese acelea pentru care fie σ, fie ω este constant. Liniile corespunzătoare în planul s^2 sînt toate parabole. Cele două seturi de parabole corespunzătoare lui $\sigma=\text{const}$ şi $\omega=\text{const}$, sînt familii de curbe ortogonale. Dacă am fi ales alte linii reprezentative în planul s, am fi obţinut alte tipuri de curbe în planul s^2.

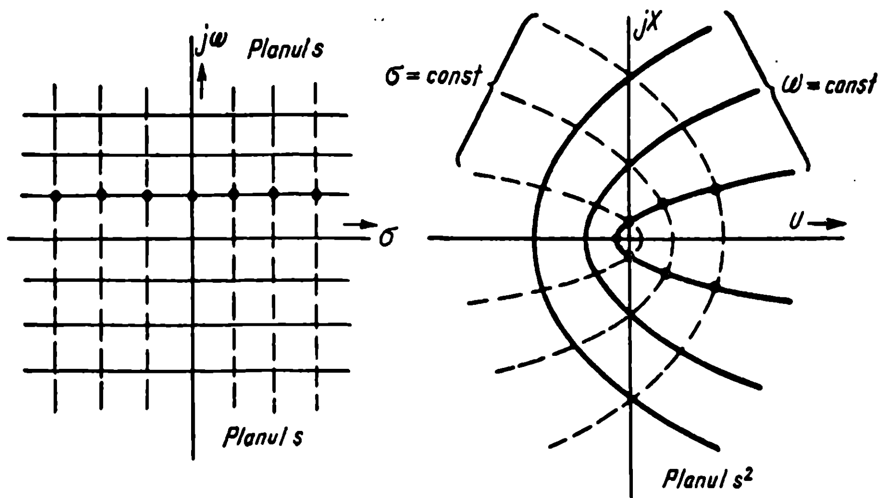


Fig. A.2.2. Reprezentarea conformă pentru $F(s)=s^2$.

Ne vom referi la acest concept grafic ca la o transformare conformă. Se spune că planul s este *transformat* în planul F; planul F este *transformata* planului s. Liniile din planul F sînt *imagini* ale liniilor din planul s, sub transformarea $F(s)$.

Ne referim la $F(s)$ ca la o *transformată conformă*. Funcţia $F(s)$ transformă punctele din planul s în puncte din planul F. Conceptul de transformare conformă pentru o funcţie analitică se dovedeşte a fi foarte util.

Faptul că parabolele din fig. A.2.2 constituie o familie ortogonală nu este un accident. Explicaţia este că liniile originale din planul s formează un unghi drept între ele, şi o funcţie analitică păstrează unghiurile cu excepţia situaţiei în care nu există derivata sau aceasta este zero. Înainte de a demonstra acest lucru, să dăm o definiţie. O *transformare conformă* F este una în care unghiul de intersecţie al celor două curbe imagine în planul F este acelaşi (în amplitudine şi sens) cu unghiul de intersecţie al celor două curbe corespunzătoare din planul s.

Transformata pentru o funcție analitică este conformă în toate punctele cînd funcția este regulată și derivata este diferită de zero.
Pentru a verifica acest rezultat, să luăm două curbe C_1 și C_2 din planul s care se intersectează în s_0. Fie s un punct arbitrar pe C_1. Să introducem coordonatele polare referitoare la s_0, astfel

$$s - s_0 = r\, \varepsilon^{j\theta_1} \tag{12}$$

Atunci cînd s tinde către s_0, unghiul θ_1 tinde către unghiul α_1 care este unghiul tangentei la C_1 în s_0. Definiția derivatei este

$$\lim_{s \to s_0} \frac{F(s) - F(s_0)}{s - s_0} = F'(s_0) \tag{13}$$

Deoarece această derivată există, putem lua limita de-a-lungul lui C_1 și deoarece derivata este diferită de zero, putem scrie

$$F'(s_0) = \rho \varepsilon^{j\beta} \tag{14}$$

Rezultă din (13)

$$\lim_{s \to s_0} \left| \frac{F(s) - F(s_0)}{s - s_0} \right| = \rho \tag{15a}$$

și

$$\lim_{s \to s_0} \{\arg\, [F(s) - F(s_0)] - \arg\, (s - s_0)\} = \beta \tag{15b}$$

Ecuația (15*b*) poate fi scrisă

$$\lim_{s \to s_0} \arg\, [F(s) - F(s_0)] = \beta + \lim_{s \to s_0} \arg\, (s - s_0) = \beta + \alpha_1 \tag{16}$$

Punctul $F(s)$ este pe curba C_1' care este imaginea lui C_1 sub transformarea $F(s)$. Astfel, partea stîngă a ecuației (16) este unghiul tangentei la C_1' în $F(s)_0$. Rezultă, din (16) că curba C_1' are o tangentă definită în $F(s_0)$ care face un unghi $\beta + \alpha_1$ cu axa reală pozitivă. În același mod se poate stabili că unghiul tangentei la C_2' la $F(s_0)$ va fi $\beta + \alpha_2$. Unghiul dintre cele două tangente, luat de la C_1' la C_2' este $(\alpha_2 - \alpha_1)$ care este același în amplitudine și semn cu unghiul dintre curbele C_1 și C_2 în punctul s_0, măsurat de la C_1 la C_2.

Din (15*a*) se constată că *întinderea locală* (adică, raportul dintre elementul de arc al lui C_1' și elementul de arc al lui C_1, luate în jurul lui s_0)

este independentă de direcţie şi este dată de amplitudinea derivatei. Rezultă că transformarea conformă pentru o funcţie analitică (cînd $F'(s_0)\neq\neq 0$) realizează o amplificare liniară $F'(s_0)$ şi o rotaţie arg $F'(s_0)$, astfel încît formele figurilor mici sînt menţinute.

O consecinţă auxiliară este aceea că imaginile curbelor line sînt de asemenea curbe line; adică ele nu pot avea „puncte unghiulare".

Nu am definit încă unele concepte de topologia mulţimii de puncte referitoare la domenii şi curbe, şi aceasta este necesar pentru înţelegerea discuţiilor următoare. Nu putem să facem precizări complete fără a introduce idei foarte complexe, ceea ce nu ne-am propus să facem. Prin urmare vom lua cîteva concepte, ca de exemplu cale, curbă continuă, etc.

Un *arc simplu* este o cale continuă în planul complex care nu are puncte de intersecţie sau multiple. O *curbă simplu închisă* este o cale în planul complex, care, dacă este tăiată într-un punct oarecare devine un arc simplu. Dacă unim punctele terminale ale unui arc simplu se obţine o curbă simplă închisă. Un *domeniu deschis* este o mulţime de puncte în planul complex, fiecare din ele avînd în vecinătate toate punctele care aparţin acestei mulţimi. Ca exemplu poate fi considerat domeniul „interior" unei curbe simplă închisă care nu conţine curba. Dacă adăugăm punctele de pe conturul unei mulţimi deschise la mulţimea deschisă propriuzisă, domeniul obţinut se numeşte *închis*. Un domeniu deschis sau închis este *conex* dacă putem uni două puncte oarecare din domeniu printr-o linie care are toate punctele în acest domeniu.

În paragraful precedent, cuvîntul „interior" a fost pus între ghilimele. Deşi intuiţia noastră ne face să credem că interiorul unei curbe este bine definit, totuşi aceasta necesită o demonstraţie. *Teorema curbei lui Jordan* dă soluţia necesară. Aceasta afirmă că *orice curbă simplă închisă împarte planul complex în două domenii, unul „interior" şi unul „exterior", curba fiind frontieră între aceste două domenii.* Dacă pornim dintr-un punct de pe curbă şi o parcurgem în sens invers acelor de ceasornic, domeniul din stînga curbei se va numi interior, cel din dreapta exterior.

Dacă curba închisă nu trece prin infinit, atunci domeniul „interior" aşa cum este definit, va fi *mărginit*; altfel spus, toate punctele din acest domeniu vor satisface condiţia $|s|\leqslant M$, unde M este un număr pozitiv dat. Pe de altă parte, dacă curba închisă trece prin infinit, atunci nici interiorul nici exteriorul nu sînt mărginite.

Problema care apare este ce semnificaţie are o curbă închisă care trece prin infinit. O astfel de curbă este, de exemplu, calea formată de axa imaginară. Dar aceasta pare a fi un arc simplu mai degrabă decît o curbă închisă. Sfera *Riemann* poate fi folosită pentru clarificarea acestui punct de vedere.

Considerăm o sferă plasată în planul complex cu polul sud în origine, aşa cum este arătat în fig. A.2.3. Considerăm acum că unim printr-o linie dreaptă fiecare punct din plan cu polul nord al sferei. Toate aceste linii vor intersecta sfera, stabilindu-se astfel o corespondenţă biunivocă între

punctele din plan şi cele de pe sferă. Fiecare punct din planul finit va avea corespondentul său pe sferă. Cu cît ne depărtăm de originea planului, în orice direcţie, punctele de intersecţie a liniilor cu sfera vor tinde către polul nord. Polul nord corespunde infinitului din plan. Pe sferă, punctul infinit va fi un punct unic. Axele reală şi imaginară devin cercuri mari (principale) pe sferă, şi un cerc mare apare ca o curbă simplă închisă.

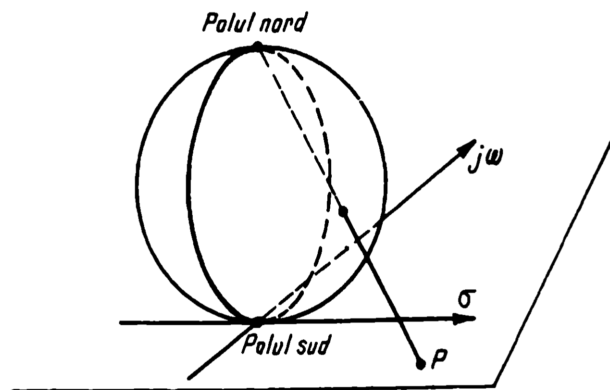


Fig. A.2.3. Sfera Riemann.

Conceptul sferei Riemann ne permite să privim „infinitul" ca un punct singular, ori de cîte ori aceasta este convenabilă. Ne vom referi la infinit ca la ***punctul de la infinit.***

Adeseori dorim să discutăm despre comportarea funcţiei în punctul infinit. În matematică este acceptată convenţia ca într-o expunere să poată fi eliminat cuvîntul „infinit" cu condiţia ca întreaga expunere să poată fi definită fără a folosi acest cuvînt.

Această convenţie este introdusă pentru a elimina multe inconsistenţe. Comportarea unei funcţii în punctul de la infinit este definită după cum urmează:

Comportarea unei funcţii $F(s)$ la $s=\infty$ este aceeaşi cu a funcţiei

$$G(s)=F(1/s)$$

la $s=0$; de exemplu, funcţia $F(s)=1/s$ este regulată la $s=\infty$ deoarece $G(s)=F(1/s)=s$ este regulată la $s=0$. În mod similar, funcţia $F(s)=as^2+bs$ nu este regulată la infinit deoarece $G(s)=a/s^2+b/s$ are o singularitate la $s=0$.

Printr-un artificiu similar putem discuta despre valoarea unei funcţii într-un pol din planul complex. Reciproca funcţiei în acest punct va fi zero.

A.2.3. INTEGRAREA

Integrala definită a unei funcţii de o variabilă complexă este definită într-o manieră similară integralei definite a unei funcţii de o variabilă reală. În cazul variabilelor reale, integrala definită poate fi interpretată ca o suprafaţă. Pentru variabilele complexe o astfel de interpretare geometrică nu este valabilă.

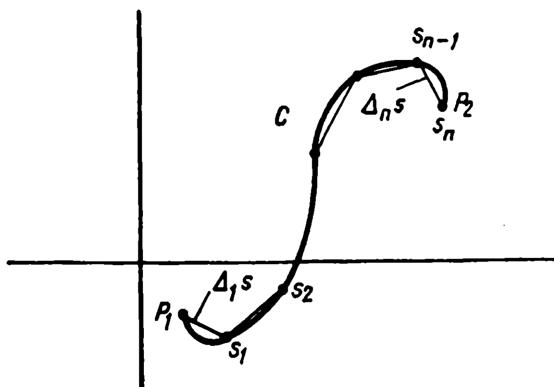


Fig. A.2.4. Integrala definită.

În fig. A.2.4 sînt conectate două puncte P_1 şi P_2 printr-un arc simplu C. Calea este divizată în intervale prin punctele s_k; coardele care unesc aceste puncte sînt notate cu $\Delta_k s$. Presupunem că multiplicăm fiecare din corzi prin valoarea unei funcţii $F(s)$, evaluată în punctul s_k[1] al intervalului şi apoi adunăm toate aceste produse. Să considerăm acum că mărim numărul de intervale cu o reducere simultană a mărimii coardelor. Definim *integrala definită* a lui $F(s)$ ca limita acestei sume, cînd numărul de intervale tinde către infinit, în timp ce lungimea fiecărei corzi tinde către zero. Mai precis

$$\int_{CP_1}^{P_2} F(s)\, ds = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta_k s|\to 0}} \sum_{k=1}^{\infty} F(s_k^*)\Delta_k s \tag{17}$$

cu condiţia ca limita dreaptă să existe.

Menţionăm că P_1 şi P_2 reprezintă limitele inferioară şi superioară; calea C este parcursă pornind din P_1 către P_2. Este de aşteptat să obţinem un răspuns diferit dacă se va urma o altă cale. Rezultă că nu este necesar

[1]) Aici coardele sînt exprimate ca numere complexe. Astfel $\Delta_k s = s_k - s_{k-1}$.

a scrie limitele de integrare dacă arătăm totdeauna într-un grafic corespunzător, calea de integrare împreună cu sensul de-a-lungul căii. Deoarece calea, sau conturul, este inseparabil de definiția unei integrale, ne vom referi la ea ca la un *contur de integrare.*

Pentru a determina condițiile în care integrala definită din (17) există, trebuie să exprimăm această integrală ca o combinație de integrale reale. Cu $F(s)=U+jX$, și după cîteva transformări, (17) devine :

$$\int_C F(s)ds=\int_C U d\sigma-\int_C X d\omega+j\left[\int_C U d\omega+\int_C X d\sigma\right] \qquad (18)$$

Fiecare din integralele din dreapta este o integrală de variabilă reală; dacă aceste integrale există, atunci va exista și un contur de integrare. Din cunoștințele noastre despre integrale reale, știm că o condiție suficientă de existență a integralei unei funcții de variabilă reală este ca funcția de sub semnul integralei să fie continuă. Rezultă că *integrala pe contur a unei funcții $F(s)$ de-a-lungul unei curbe C există dacă $F(s)$ este continuă pe această curbă.*

Teorema de integrare a lui Cauchy

Rămîne de discutat care sînt condițiile în care integrala între două puncte este independentă de calea care unește aceste puncte. Considerăm fig. A.2.5, care arată două puncte P_1 și P_2 unite prin două căi simple C_1 și C_2. Menționăm că sensurile celor două căi sînt amîndouă de la P_1 la P_2. Combinînd calea C_1 luată în sens direct și calea C_2 luată în sens invers, se obține o curbă simplă închisă, pe care o vom nota cu $C=C_1-C_2$. Dacă

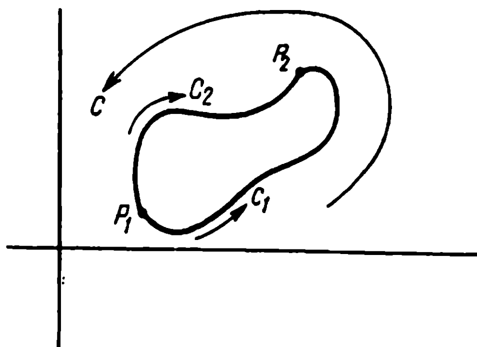


Fig. A.2.5. Condiții pentru ca valoarea unei integrale să fie independentă de calea de integrare.

integrala unei funcţii $F(s)$ de-a-lungul căii C_1 este egală cu integrala de-a-lungul căii C_2, atunci integrala de-a-lungul căii combinate C trebuie să fie egală cu zero, şi reciproc. Problema stabilirii condiţiilor în care o integrală este independentă de cale, se reduce acum la stabilirea condiţiilor în care o integrală pe contur, de-a-lungul unei curbe simple închise, este egală cu zero. Problema este rezolvată de următoarea teoremă cunoscută sub numele de *teorema de integrare a lui Cauchy* :

Fie $F(s)$ o funcţie care este regulată oriunde pe o curbă simplă închisă C şi în interiorul curbei. Atunci

$$\int_C F(s)\, ds = 0 \tag{19}$$

Aceasta este o teoremă foarte importantă, dar nu vom da demonstraţia ei.

Considerăm necesare cîteva cuvinte despre *conexitatea* unui domeniu din planul complex. Presupunem că unim două puncte arbitrare P_1 şi P_2 situate într-un domeniu, prin două arce simple, arbitrare C_1 şi C_2 situate în acelaşi domeniu. Acest domeniu este numit *simplu conex* dacă este posibil să alunecăm unul din arce (deformarea arcului este permisă în acest proces) pînă cînd va coincide cu celălalt, fără a părăsi acest domeniu. Teorema lui Cauchy este valabilă într-un astfel de domeniu. Domeniul haşurat dintre cele două curbe închise din fig. A.2.6, se numeşte *dublu conex*. Un astfel de domeniu poate fi redus la un domeniu simplu conex, prin „realizarea unui canal" între cele două curbe închise. Noul domeniu este mărginit de curba compusă al cărui contur este arătat în fig. A.2.6*b* prin săgeţi.

Presupunem că o funcţie $F(s)$ este regulată în domeniul haşurat arătat în fig. A.2.6*a*, inclusiv conturul. Teorema lui Cauchy poate fi aplicată aici curbei compuse formată din curbele interioară şi exterioară şi din „canal". Canalul este parcurs de două ori, dar în sensuri opuse, astfel că contribuţia lui la integrala pe conturul complet, este zero. Dacă vom nota curbele

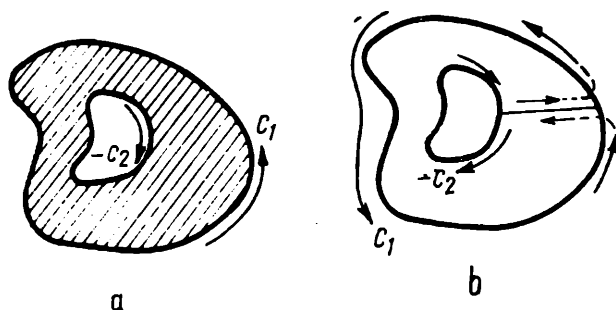


Fig. A.2.6. Un domeniu dublu conex.

interioară şi exterioară prin C_1 şi respectiv C_2, ambele parcurse în sensul acelor ceasornicului, atunci teorema lui Cauchy ne conduce la relaţia:

$$\int_{C_1} F(s)\, ds = \int_{C_2} F(s)\, ds \tag{20}$$

Dacă alegem oricare alte curbe închise între curbele interioară şi exterioară, acelaşi raţionament ne va arăta că integrala pe aceste căi parcurse în sensul invers acelor de ceasornic, va fi egală cu fiecare din integralele din (20).

Acest raţionament ne permite să afirmăm că valoarea unei integrale de contur pe o curbă simplă închisă nu se va modifica dacă conturul este distorsionat, cu condiţia însă ca el să rămînă totdeauna în interiorul domeniului de regularitate.

Să ne referim acum la fig. A2.5. Punctele P_1 şi P_2 sînt într-un domeniu simplu conex R, în care o funcţie $F(s)$ este univocă şi regulată. Fie P_1 un punct fix corespunzător lui s_0, şi P_2 un punct corespunzător lui s. Putem afirma că integrala de la s_0 la s este independentă de calea de integrare, dacă aceasta rămîne în domeniul de regularitate. Putem deci defini funcţia $G(s)$ astfel:

$$G(s) = \int_{s_0}^{s} F(z)\, dz \tag{21}$$

unde z este o variabilă fictivă de integrare. Această funcţie este o funcţie univocă de limita superioară s pentru toate căile din regiunea de regularitate. O vom numi *primitiva* lui $F(s)$. (Pentru fiecare s_0 vom obţine o altă primitivă).

În realitate nu este necesar să presupunem că $F(s)$ este regulată în domeniu. În loc de aceasta, este suficient să presupunem că $F(s)$ este *continuă* în R şi că integrala pe contur închis, pentru toate curbele simple închise posibile din R, este zero. Totuşi, teorema lui Morera, care va fi discutată mai tîrziu, afirmă că funcţia care satisface aceste condiţii este regulată.

În evaluarea integralei definite de variabilă reală, căutăm aaesea primitiva integrandului. Aceeaşi procedură este valabilă şi pentru variabile complexe; astfel, dacă primitiva lui $F(s)$ este $G(s)$, atunci

$$\int_{s_1}^{s_2} F(s)\, ds = G(s_2) - G(s_1) \tag{22}$$

Formula integralei lui Cauchy

Să considerăm o curbă simplă închisă C_1, și o funcție univocă care este regulată în interiorul curbei și pe contur. Este posibil să exprimăm valoarea funcției în orice punct s_0 din interiorul curbei, în funcție de valoarea pe conturul C. Această expresie este

$$F(s_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{F(s)}{s - s_0} ds \tag{23}$$

Aceasta este cunoscută ca *formula integralei lui Cauchy* (care este diferită de teorema lui Cauchy). În integrala pe contur, conturul C poate fi înlocuit printr-un contur circular C în jurul punctului s_0 fără ca valoarea ei să se modifice, în concordanță cu discuțiile referitoare la (20). Adăugînd și scăzînd $F(s_0)$ la integrand, putem scrie

$$\int_{C'} \frac{F(s)}{s - s_0} ds = \int_{C'} \frac{F(s_0)}{s - s_0} ds + \int_{C'} \frac{F(s)-F(s_0)}{s-s_0} ds \tag{24}$$

Se poate arăta că ultima integrală din partea dreaptă a lui (24) este zero. Rămîne să evaluăm prima integrală din partea dreaptă a lui (24).

Vom scrie $s-s_0=r\varepsilon^{j\theta}$; atunci $ds=jr\varepsilon^{j\theta}\, d\theta$, deoarece conturul C' este circular și numai θ variază. Atunci

$$\int_{C'} \frac{ds}{s - s_0} = \int_0^{2\pi} j\, d\theta = 2\pi j \tag{25}$$

Expresia dorită se obține înlocuind acest rezultat în (24).

Formula integralei lui Cauchy lămurește proprietățile funcțiilor analitice. Se constată că valoarea unei funcții analitice care este regulată într-un domeniu, este determinată în oricare punct din acest domeniu de valoarea sa pe contur. Menționăm că punctul s_0 este *un punct oarecare* din domeniul de regularitate. Îl vom nota cu variabila generală s, dar aceasta necesită ca în (23) să-i atribuim variabilei s (care reprezintă numai puncte de pe contur și care este o variabilă fictivă) un alt simbol. Pentru clarificare, (23), va fi scris acum

$$F(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{F(z)}{z-s} dz \tag{26}$$

Aici s reprezintă orice punct din interiorul conturului C în care $F(s)$ este regulată, și z se referă la puncte de pe contur.

Cu ajutorul formulei integralei lui Cauchy putem rezolva o problemă foarte importantă pentru funcţiile analitice. Să încercăm să găsim derivata de ordinul n a unei funcţii analitice $F(s)$. Pentru derivatele de ordinul întîi şi doi putem folosi direct definiţia derivatei din (26). Rezultatul va fi

$$F'(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{F(z)}{(z-s)^2} dz \tag{27a}$$

$$F''(s) = \frac{2}{2\pi j} \int_C \frac{F(z)}{(z-s)^3} dz \tag{27b}$$

Forma acestor expresii, care realizează de fapt o simplă diferenţiere în raport cu s a expresiei de sub simbolul integralei, sugerează următoarea expresie pentru derivata de ordinul n :

$$F^{(n)}(s) = \frac{n}{2\pi j} \int_C \frac{F(z)}{(z-s)^{n+1}} dz \tag{28}$$

Acest rezultat poate fi verificat folosind metoda inducţiei matematice.

O implicaţie extrem de importantă a celor discutate mai sus, este următoarea. *Dacă o funcţie univocă $F(s)$ este regulată într-un punct, rezultă că funcţia va avea derivate de toate ordinele în acel punct.* Această afirmaţie nu poate fi făcută pentru o funcţie de variabilă reală.

Avînd în vedere că derivata unei funcţii analitice este analitică, şi are acelaşi domeniu de regularitate, putem face acum o afirmaţie care poate fi privită ca reciproca teoremei lui Cauchy. *Fie $F(s)$ o funcţie care este continuă într-un domeniu R şi a cărei integrală pe conturul închis, care înconjoară toate căile posibile din acest domeniu, este zero.* Aceste condiţii ne asigură că $F(s)$ are o primitivă $G(s)$ care este regulată în domeniul R. Dar derivata lui $G(s)$ este $F(s)$; în consecinţă $F(s)$ este de asemenea regulată în R. Acest rezultat este cunoscut ca *teorema lui Morera.*

Teorema modulului maxim şi lema Schwartz

Formula lui Cauchy conduce la unele rezultate foarte interesante, totuşi, noi vom demonstra aceste rezultate din punctul de vedere al reprezentării conforme. Fie $F=F(s)$ o funcţie analitică care este regulată în interiorul şi pe conturul C în planul s ; fie acest domeniu, inclusiv curba C, domeniul R. Reprezentarea conformă a curbei C poate lua una din formele prezentate în fig. A 2.7. Menţionăm că transformata conformă a domeniului R nu se poate extinde la infinit, deoarece infinitul din planul F

corespunde unui punct singular din planul s, ori în domeniul R nu există puncte singulare. Pentru simplificare, ambele transformate ale curbei C au fost considerate a fi curbe închise simple; acest lucru însă nu este necesar, şi obişnuit nu este aşa. În transformarea prezentată în fig. A 2.7b originea planului F este în interiorul domeniului. Aceasta înseamnă că $F(s)$ are un zero în domeniul R. În fig. A 2.7c este arătată o transformare a domeniului R care nu are originea în interior.

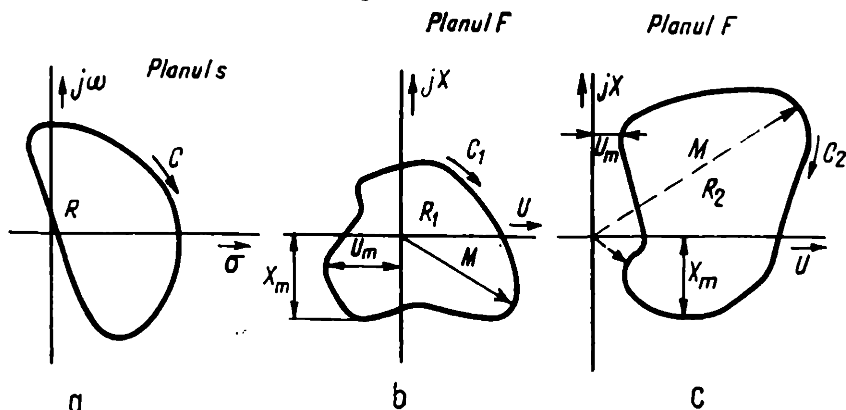


Fig. A.2.7. Demonstrarea principiilor maximului şi minimului.

În fiecare din aceste cazuri, este clar din figuri că punctul în R_1 sau R_2 care cade cel mai departe de originea planului F este situat pe conturul domeniului, care este transformata conturului C. Similar, dacă $F(s)$ nu are zero în domeniul R, atunci punctul din R_2 care este situat cel mai aproape de originea planului F, cade pe contur, aşa cum este ilustrat în partea c a figurii. Este de asemenea clar din figură că valorile minime din domeniul R_2 a părţii reale şi a părţii imaginare a lui F, cad pe contur. Ultima afirmaţie este de asemenea adevărată cînd $F(s)$ are un zero în domeniu, aşa cum este ilustrat în partea (b) a figurii. Dar în acest caz, cea mai mică valoare a modulului, care este zero, cade în interiorul domeniului şi nu pe contur. Aceste rezultate pot fi rezumate astfel:

Fie o curbă închisă C şi un domeniu R corespunzător interiorului curbei C. Fie $F=F(s)=U+jX$ o funcţie regulată în R. Cea mai mare valoare atinsă de modulul $|F(s)|$, partea reală U şi partea imaginară X, în domeniul R, apare pentru un punct sau pentru puncte de pe contur. Aceasta este adevărată pentru modul, dacă $F(s)$ nu are zero în interiorul domeniului. Precizările făcute referitor la modul funcţiei, sînt cunoscute ca *teorema modulului maxim* şi *teorema modulului minim.*

Denumiri asemănătoare pot fi atribuite şi în celelalte cazuri prin înlocuirea „modulului” cu „partea reală” şi „partea imaginară”.

O formulare puţin mai restrictivă ca teorema modului maxim, poate fi făcută dacă $F(s)$ satisface o condiţie suplimentară şi anume $F(0)=0$ şi

dacă domeniul R este un cerc. În plus, presupunem $F(s)$ regulată într-un domeniu circular de rază r şi cu un zero la $s=0$. Fie amplitudinea maximă a cercului M. Atunci $F(s)$ este de asemenea regulată în interiorul cercului şi satisface condiţiile teoremei modulului maxim. Deci $|F(s)/s| \leqslant M/r$. Rezultă că pentru toate punctele din interiorul cercului avem :

$$|F(s)| \leqslant \frac{|s|}{r} M$$

Egalitatea se obţine numai la $s=0$ sau dacă $F(s)=Ms/r$. Acest rezultat este cunoscut sub numele de *„lema lui Schwartz"*.

A. 2.4. SERII INFINITE

Fie $f_1(s), f_2(s), \ldots$ un şir infinit de funcţii. Să considerăm suma primelor n funcţii :

$$S_n(s) = \sum_{j=1}^{n} f_j(s) \tag{29}$$

Aceasta este numită o *sumă parţială* a seriei infinite corespunzătoare. Să considerăm acum şirul de sume parţiale $S_1, S_2, \ldots S_n$. Spunem că acest şir *converge* într-un domeniu al planului complex, dacă există o funcţie $F(s)$ a cărei valoare într-un punct dat diferă foarte puţin (cît de puţin dorim) de valoarea sumei parţiale S_n, cu condiţia să luăm n suficient de mare. Funcţia $F(s)$ este numită *funcţie limită* a şirului. Mai precis, spunem că şirul converge într-un domeniu R, dacă, dînd un număr pozitiv ε, există un număr întreg N_j şi o funcţie $F(s)$, astfel ca pentru orice punct s_j din domeniu

$$|S_n(s_j) - F(s_j)| < \varepsilon \tag{30}$$

pentru toate valorile lui n mai mari ca N_j. Valoarea lui N_j va depinde de numărul ε şi de punctul s_j.

Spunem că şirul este *uniform convergent* într-un domeniu închis, dacă putem folosi acelaşi număr întreg N în rolul lui N_j pentru toate punctele domeniului fără să avem acest întreg dependent de punctul în discuţie (N depinde însă de ε).

Seria infinită este numită *convergentă* (sau *uniform convergentă*) către funcţia $F(s)$, dacă şirul sumelor parţiale converge (sau converge uniform). O serie infinită este numită *absolut convergentă* dacă seria obţinută din valorile absolute ale termenilor săi converge de asemenea. Convergenţa absolută este un tip de convergenţă mai restrictiv. Se poate arăta

că *dacă o serie este absolut convergentă în domeniul R, ea este de asemenea convergentă în domeniu.*

Vom enunţa acum un număr de teoreme referitoare la şiruri de funcţii fără a da şi demonstraţiile.[1]

Teorema 1. *Dacă un şir de funcţii continue $S_n(s)$ este uniform convergentă într-un domeniu R, atunci funcţia limită a şirului este continuă în acest domeniu R.*

Teorema 2. *Dacă un şir de funcţii continue $S_n(s)$ converge uniform către o funcţie limită $F(s)$ într-un domeniu R, atunci integrala funcţiei $F(s)$ pe orice arc simplu C din domeniul R, poate fi obţinută găsind mai întîi integrala pe C a membrului $S_n(s)$ al şirului şi luînd apoi limita pentru $n \to \infty$, adică*

$$\int_C F(s)\, ds = \int_C [\lim_{n\to\infty} S_n(s)]\, ds = \lim_{n\to\infty} \int_C S_n(s)\, ds \tag{31}$$

Teorema 3. *Dacă un şir de funcţii analitice $S_n(s)$ este regulat într-un domeniu R, şi dacă el converge uniform în R către o funcţie limită $F(s)$, atunci $F(s)$ este regulat în domeniul R.*

Teorema 4. *Dacă elementele unui şir de funcţii analitice $S_n(s)$ sînt regulate într-un domeniu R şi dacă şirul converge uniform în R către o funcţie limită $F(s)$, atunci şirul derivatelor $S_n(s)$ converge uniform către derivata lui $F(s)$ pentru toate punctele interioare lui R.*

Aplicarea repetată a teoremei arată că şirul derivatelor de ordinul k, $S_n^{(k)}(s)$, converge uniform către $F^{(k)}(s)$.

Serii Taylor

Aceste teoreme pot fi folosite pentru a stabili multe proprietăţi importante ale seriilor infinite de tipul şirului de funcţii $S_n(s)$ care reprezintă suma parţială a seriei. Să considerăm un caz particular important pentru seriile infinite.

---

[1]) Toate aceste teoreme sînt valabile cu condiţia ca cei doi operatori limită să poată fi interschimbaţi. Aceasta este o caracteristică generală

$$\lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x, y) = \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} F(x, y)$$

Această interschimbare este permisă dacă ambele limite există (separat) şi una din ele este uniformă cu referire la cealaltă variabilă.

Vom defini o *serie de puteri* astfel:

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s - s_0)^n \tag{32}$$

Sumele parțiale ale seriilor de puteri sînt polinome în $(s-s_0)$; deci ele sînt regulate în întregul plan complex finit (aceasta implică și continuitatea lor). Dacă putem acum determina domeniul de convergență uniformă, putem deduce proprietățile funcției limită folosind teoremele 1—4.

Să presupunem că o serie de puteri este convergentă pentru un punct $s=s_1$. Este ușor de arătat că seria este absolut convergentă (și deci ea este de asemenea convergentă) în orice punct din interiorul cercului cu centrul în s_0 și de rază $s_1 - s_0$. *Cel mai mare cerc* cu centrul în s_0 în interiorul căcăruia seria converge, este numit *cercul de convergență*, raza cercului fiind *raza de convergență*. Rezultă că o serie de puteri *diverge* (nu este convergentă) în oricare punct din exteriorul cercului său de convergență, deoarece dacă ea ar converge într-un astfel de punct s_2, trebuie să fie convergentă oriunde în interiorul cercului de rază $s_2 - s_0$, ceea ce ar însemna că cercul inițial nu era cercul său de convergență. Fie R_0 raza de convergență a seriei de puteri și să presupunem că R_1 este strict mai mic decît R_0. Atunci, se poate arăta că seria dată este uniform convergentă în domeniul închis, mărginit de cercul de rază $R_1 < R_0$ cu centrul în s_0.

Presupunem acum că o serie de puteri converge către o funcție $F(s)$ într-un cerc de rază R_0. Aceasta înseamnă că șirul de sume parțiale $S_n(s)$ va avea ca funcție limită pe $F(s)$. Deoarece $S_n(s)$ este o funcție continuă, rezultă din teorema 1 că $F(s)$ este de asemenea continuă oriunde în interiorul cercului. Mai mult, deoarece sumele parțiale sînt regulate în domeniul de convergență uniformă, rezultă din teorema 3 că $F(s)$ este regulată în domeniu. Astfel *o serie de puteri reprezintă o funcție analitică, care este regulată în interiorul cercului său de convergență.*

Din teoremele 2 și 4 rezultă alte două concluzii importante, referitcare la seriile de puteri. În concordanță cu teorema 2, deoarece sumele parțiale ale unei serii de puteri satisfac condițiile teoremei, *o serie de puteri care converge către $F(s)$ poate fi integrată termen cu termen, și seria obținută va converge către integrala lui $F(s)$ pe orice cale de integrare din interiorul cercului de convergență*. Similar, în concordanță cu teorema 4, *o serie de puteri poate fi diferențiată termen cu termen, și seria rezultată va converge către derivata lui $F(s)$, oriunde în interiorul cercului de convergență. Cercurile de convergență ale seriei integrate și seriei diferențiate sînt aceleași cu cel al seriei originale.*

Spunem că o serie de puteri converge către o funcție analitică care este regulată în interiorul cercului său de convergență. Reciproca, care este mai interesantă, este de asemenea adevărată. Orice funcție analitică poate

fi reprezentată ca o serie de puteri referitoare la orice punct singular s_0. Aceasta este cunoscută ca teorema lui Taylor, şi enunţul ei este: Fie $F(s)$ o funcţie regulată oriunde în interiorul cercului de rază R_0 în jurul punctului singular s_0.
În acest caz $F(s)$ poate fi scrisă ca:

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s - s_0)^n \tag{33}$$

unde coeficienţii sînt daţi de

$$a_n = \frac{1}{n} F^{)n)}(s) \tag{34}$$

Cercul de convergenţă al seriei de puteri este cel mai mare cerc în jurul lui s_0, în care $F(s)$ este definit sau este determinabil ca o funcţie regulată.

Ne vom referi la această serie ca la o serie Taylor. Teorema poate fi demonstrată dacă pornim de la formula integralei lui Cauchy dată în (23) şi dezvoltăm $(z-s_0)^{-1}$ într-un umăr finit de termeni de puteri inverse ale lui $(z - s_0)$ (după ce adunăm şi scădem z_0 la numitorul integrandului), împreună cu un rest. Folosirea formulei integrale pentru derivatele unei funcţii analitice date în (29) ne conduce la un polinom în $(s - s_0)$ plus un rest. Demonstraţia este completă dacă notăm că restul tinde către zero cînd gradul polinomului $(s - s_0)$ tinde către infinit.

O consecinţă importantă a teoremei lui Taylor este aceea că cercul de convergenţă al oricărei serii de puteri trece printr-un singur punct al funcţiei analitice care o reprezintă, deoarece în teorema lui Taylor raza de convergenţă este distanţa de la punctul s_0 la cel mai apropiat punct singular.

Pentru determinarea seriei de puteri care reprezintă o funcţie, nu este necesar să folosim formulele date de teorema lui Taylor. Dar, indiferent de metoda folosită pentru găsirea seriei de puteri corespunzătoare, vom ajunge la seria Taylor, ai cărei coeficienţi satisfac formula lui Taylor. Acest lucru este dovedit de următoarea *teoremă de identitare pentru seriile de puteri. Dacă două serii de puteri*

$$\sum_{n=0} a_n (s - s_0)^n \quad \text{şi} \quad \sum_{n=0} b_n (s - s_0)^n .$$

au raze de convergenţă pozitive, şi dacă sumele lor coincid penru un număr infinit de puncte distincte, avînd ca punct limită, pe s_0, atunci $a_n = b_n$ pentru orice n; adică, ele sînt identice.

În particular, condiţiile teoremei sînt satisfăcute dacă două serii coincid într-o vecinătate a lui s_0 sau de-a-lungul unui segment de dreaptă (nu are importanţă cît de mic) care conţine pe s_0. Acest rezultat poate fi demonstrat prin inducţie. Rezultă că reprezentarea unei funcţii analitice printr-o serie de puteri referitoare la un punct regulat dat s_0 este unică.

Serii Laurent

Am arătat că putem realiza o dezvoltare în serie de puteri a unei funcţii analitice în vecinătatea unui punct regulat, cu un domeniu de convergenţă care se extinde pînă la cel mai apropiat punct singular al funcţiei. Problema care se pune este de a stabili dacă este posibil să găsim alte reprezentări ale unei funcţii analitice în serii de puteri care converg în alte domenii. Considerăm dimeniul circular între două cercuri concentrice C_1 şi C_2 cu centrul în s_0, prezentat în fig. A.2.8. O funcţie $F(s)$ este regulată pe C_1, C_2 şi în domeniul dintre ele. Punctul s_0 poate fi un punct regulat sau un punct singular al lui $F(s)$. De asemenea pot exista şi alte puncte singulare ale lui $F(s)$ în interiorul cercului interior. Domeniul circular poate fi făcut simplu conex cu ajutorul unui „canal de separare" aşa cum s-a discutat în capitolul precedent. Dacă aplicăm acum formula integralei lui Cauchy, obţinem :

$$F(s) = \frac{1}{2\pi j}\int_{C_2}\frac{F(z)}{z-s}\,dz - \frac{1}{2\pi j}\int_{C_1}\frac{F(z)}{z-s}\,dz \qquad (35)$$

unde s este un punct în interiorul domeniului circular, şi z reprezintă puncte pe contururile celor două cercuri. Pentru mărimea $(z-s)^{-1}$ putem scrie :

$$\frac{1}{z-s} = \frac{1}{z-s_0}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{s-s_0}{z-s_0}\right)^k + \frac{1}{z-s}\left(\frac{s-s_0}{z-s_0}\right)^{n+1} \qquad (36)$$

$$\frac{1}{z-s} = \frac{-1}{s-s_0}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z-s_0}{s-s_0}\right)^k + \frac{1}{z-s}\left(\frac{z-s_0}{s-s_0}\right)^{n+1} \qquad (37)$$

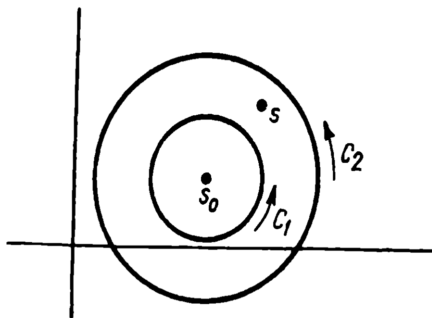


Fig. A.2.8. Domeniul de convergenţă al unei serii Laurent.

Aceasta poate fi scrisă condensat astfel:

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{k=0}^{n} w^k + \frac{w^{n+1}}{1-w} \tag{38}$$

(38) este o identitate pentru toate valorile lui w cu excepția lui $w=1$. Ecuația (36) este obținută prin adăugarea și scăderea lui s_0 în numitorul din stînga și apoi scriind-o în forma (38) cu:

$$w = \frac{s-s_0}{z-s_0} \tag{40}$$

Un caz similar se obține din (37), cu deosebirea că acum w este

$$w = \frac{z-s_0}{s-s_0} \tag{41}$$

Să folosim acum pe (36) în prima integrală din (35) și pe (37) în a doua integrală. Fiecare integrală va da un număr finit de termeni plus un rest. Se poate arăta, ca și la demonstrația teoremei Taylor, că restul tinde către zero cînd n tinde către infinit. Rezultatul final este:

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s-s_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(s-s_0)^{-k} \tag{41}$$

sau

$$F(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(s-s_0)^k \tag{42}$$

unde a_k din ultima expresie este dat de:

$$a_k = \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{F(z)}{(z-s_0)^{k+1}}\,dz \tag{43}$$

Conturul C este orice contur închis în domeniul circular dintre C_1 și C_2.

Seria astfel obținută se numește o *serie Laurent*. Ea se caracterizează prin aceea că are atît puteri pozitive, cît și puteri negative. Domeniul său de convergență este un domeniu circular, spre deosebire de domeniul de convergență al seriei Taylor, care este un cerc[1]. Pentru o funcție dată

[1] Această proprietate a seriei Laurent poate fi interpretată ca seria de puteri pozitive în $(s-s_0)$ care converge oriunde în interiorul lui C_2 din fig. 8, și seria de puteri negative care converge oriunde în interiorul lui C_1, ambele fiind convergente simultan în domeniul circular dintre C_1 și C_2.

$F(s)$ şi un punct de dezvoltare s_0, pot exista mai mult de o serie Laurent cu domenii diferite de convergenţă. Punctul dezvoltării poate fi un punct regulat sau un punct singular. Ca şi în cazul unei serii Taylor, nu este absolut necesar să folosim formula indicată pentru determinarea coeficienţilor într-un caz particular. Dar teorema de identitate pentru seria Laurent, care este asemănătoare teoremei reziduului din capitolul următor, ne spune că indiferent de modul în care am obţinut seria Laurent a unei funcţii, ea trebuie să fie unică pentru un domeniu de convergenţă dat.

Să considerăm acum cazul particular al dezvoltării Laurent a unei funcţii $F(s)$ în jurul punctului s_0, care este un punct singular. Cercul interior din fig. A 2.8. nu mai conţine alte singularităţi (aceasta implică faptul că singularitatea este izolată). Ne aşteptăm deci ca seria Laurent să ne spună ceva despre natura unei singularităţi în s_0. Ne amintim că seria Laurent conţine două părţi, puteri pozitive şi puteri negative. Să definim *partea regulată* $F_r(s)$ a dezvoltării ca serie de puteri pozitive şi constanta, şi *partea principală* $F_p(s)$ ca serie de puteri negative. Dacă nu există partea principală, seria Laurent se va reduce la o serie Taylor şi s_0 va fi un punct singular. Astfel, partea principală a seriei Laurent conţine cheia (soluţia) referitoare la natura singularităţii lui s_0.

Pentru a descrie singularitatea în s_0, dăm următoarea definiţie. Spunem că $F(s)$ are *un pol de ordinul n* în s_0, dacă cea mai mare putere în partea principală este n. (Un pol de ordinul I se numeşte un *pol simplu*). Pe de altă parte, dacă partea principală are un număr infinit de termeni, singularitatea în s_0 se numeşte *singularitate esenţial izolată.* (Cuvîntul „izolat" este adesea omis).

Funcţii definite prin serii

Unul din rezultatele pe care le-am menţionat anterior, este acela că o serie de puteri defineşte o funcţie analitică care este regulată în interiorul cercului său de convergenţă. Vom folosi acum această concluzie pentru a defini unele funcţii particulare. Pînă acum am avut funcţiile raţionale menţionate explicit. În cazul variabilelor reale, cunoaştem importanţa unor funcţii ca exponenţiala, funcţiile trigonometrice, hiperbolice, şi altele. Totuşi, nu putem considera ca bază definiţiile acestor funcţii pentru variabila complexă. Aşa de exemplu, tangenta de o variabilă complexă nu poate fi definită ca raport a două laturi ale unui triunghi.

Folosim proprietatea seriei de puteri citată mai sus, pentru a *defini* o funcţie exponenţială astfel:

$$\varepsilon^s = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!}$$

$$= \varepsilon^\sigma (\cos \omega + j \sin \omega) \tag{44}$$

Ultima formă este obţinută prin înlocuirea $s = \sigma + j\omega$ în serie; dezvoltarea puterilor lui s, gruparea termenilor, şi în final identificarea seriilor de puteri reale reprezentînd ε^σ, cos ω şi sin ω. Nu avem libertatea deplină în alegerea unei serii care să definească pe ε^s, deoarece ea trebuie să se reducă la seria corectă cînd s este real.

Pentru determinarea razei de convergenţă a seriei definite, putem recurge la diferite teste de convergenţă a seriei (care nu au fost încă discutate).O altă variantă, deoarece seria reprezintă o funcţie analitică, ar fi aceea de a folosi ecuaţiile Cauchy-Riemann. În ultimul caz, se poate deduce că nu există puncte singulare în întregul plan finit, deoarece ecuaţiile Cauchy-Riemann sînt satisfăcute oriunde. Deci seria converge oriunde. (Acelaşi rezultat este desigur obţinut şi prin testul făcut pentru convergenţa seriei). Putem acum urma aceeaşi procedură în definirea altor funcţii transcendente în termenii seriei. Totuşi, este mai simplu să definim funcţiile trigonometrice şi hiperbolice în termenii exponenţialei. Prin definiţie, avem:

$$\sin s = \frac{\varepsilon^{js} - \varepsilon^{-js}}{2j}, \quad \cos s = \frac{\varepsilon^{js} + \varepsilon^{-js}}{2}, \quad \mathrm{tg}\, s = \frac{\sin s}{\cos s} \tag{45}$$

$$\mathrm{sh}\, s = \frac{\varepsilon^{s} - \varepsilon^{-s}}{2}, \quad \mathrm{ch}\, s = \frac{\varepsilon^{s} + \varepsilon^{-s}}{2}, \quad \mathrm{th}\, s = \frac{\mathrm{sh}\, s}{\mathrm{ch}\, s} \tag{46}$$

Se constată că sinuşii şi cosinuşii trigonometrici şi hiperbolici, ca şi exponenţiala, sînt funcţii regulate pentru toate valorile finite ale lui s. Punctele singulare ale tg s apar cînd cos $s = 0$, şi anume pentru un număr infinit de valori reale ale lui s în punctele $s = (2k - 1)\,\pi/2$, pentru toate valorile întregi ale lui k. Similar, punctele singulare ale th s apar cînd ch $s = 0$, şi anume, la un număr infinit de valori imaginare ale lui s, în punctele $s = j(2k - 1)\,\pi/2$, pentru toate valorile întregi ale lui k.

Funcţiile trigonometrice şi hiperbolice de o variabilă complexă satisfac practic toate identităţile satisfăcute de funcţiile reale corespunzătoare.

A 2.5. FUNCŢII MULTIFORME

În teoria funcţiilor reale definim un număr de funcţii „inverse". Aceste funcţii pot fi extinse în planul complex ca funcţii analitice. Aşa după cum ştim, multe din aceste funcţii (rădăcina a n-a, inversul sinusului, etc.) sînt multiforme pe axa reală. Putem deci să ne aşteptăm la o comportare similară în planul complex.

Funcţia logaritmică

Să începem cu extinderea conceptului logaritmului. Definim :

$$G(s) = \log F(s) \tag{47a}$$

dacă şi numai dacă

$$F(s) = \varepsilon^{G(s)} \tag{47b}$$

(În această anexă ne vom conforma cu convenţia de a scrie log pentru logaritmul de bază ε.) Deoarece cunoaştem semnificaţia lui (47b), cunoaştem de asemenea şi semnificaţia lui (47*a*). Se observă că dacă $G(s)$ satisface (47*b*), şi $G(s) + 2k\pi j$ satisface (47*b*) deoarece

$$\varepsilon^{G(s)+j2k\pi} = \varepsilon^{G(s)}\ \varepsilon^{j2k\pi} = \varepsilon^{G(s)} \tag{48}$$

(Folosim mai multe concluzii pentru funcţia exponenţială, concluzii care nu sînt justificate de noi, dar care pot fi foarte uşor demonstrate). Astfel (47*a*) nu defineşte o valoare unică funcţional pentru $G(s)$. Totuşi, putem arăta că oricare două valori care satisfac (47*b*) pot diferi prin cel mult $j2k\pi$. Astfel, deşi funcţia $\log F(s)$ este multiformă, valorile sale diferă prin constante aditive simple $j2k\pi$. Vom găsi o formulă pentru una din aceste valori multiple scriind :

$$F(s) = |F(s)|\ \varepsilon^{j \arg F(s)} \tag{49}$$

unde $\arg F(s)$ este valoarea principală a argumentului definit de :

$$-\pi < \arg F(s) \leqslant \pi. \tag{50}$$

Exprimînd $F(s)$ ca $\exp \log F(s)$, (49) devine :

$$F(s) = \varepsilon^{\log|F(s)|}\ \varepsilon^{j \arg F(s)} \tag{51}$$

$$= \varepsilon^{[\log F(s) + j \arg F(s)]}$$

Rezultă din definiţia logaritmului că una din valorile acestei funcţii este

$$\log F(s) = \log|F(s)| + j \arg F(s) \tag{52}$$

Această valoare principală, care este *unică* în virtutea lui (50) este cunoscută ca ***valoare principală*** a funcţiei logaritmice. Convenim să indicăm

acest lucru scriind $\log F(s)$ cu „L"; similar, $\arg F(s)$ va reprezenta valoarea principală dată de (50). Astfel că putem scrie, pentru toate valorile funcției logaritmice,

$$\begin{aligned} \log F(s) &= \operatorname{Log} F(s) + j2k\pi \\ &= \log|F(s)| + j[\arg F(s) + 2k\pi], \end{aligned} \tag{53}$$

unde k este un întreg pozitiv, negativ sau zero.

Există un număr infinit de valori pentru funcția logaritmică, una pentru fiecare valoare a lui k. Din cauza acestei dificultăți, să încercăm o simplicare, în sensul de a folosi numai valoarea principală $\operatorname{Log} F(s)$. Înainte de a considera $\operatorname{Log} F(s)$, să analizăm comportarea funcției $\operatorname{Log} s$ în planul complex. $\operatorname{Log} s$ este dată de :

$$\operatorname{Log} s = \operatorname{Log} r + j\theta, \tag{54}$$

unde

$$s = r\,\varepsilon^{j\theta} \text{ cu } -\pi < \theta \leqslant \pi \tag{55}$$

Menționăm că unghiul θ este nedefinit pentru $s=0$. Deci, această ecuație nu definește $\operatorname{Log} s$ la $s=0$. Nu are importanță cum definim $\operatorname{Log} 0$, pentru că oricum $\operatorname{Log} s$ nu este continuă în $s=0$, deoarece partea imaginară a $\operatorname{Log} s$ ia orice valoare de la $-\pi$ la π în orice vecinătate a lui $s=0$. Deci $s=0$ este un punct singular al funcției $\operatorname{Log} s$. Cu toate că ne-am limitat la valoarea principală, $\operatorname{Log} s$ este discontinuă în oricare punct de pe axa reală negativă, deoarece, partea imaginară a $\operatorname{Log} s$ este aici π, dar există puncte arbitrare pe ea la care partea imaginară este foarte aproape de $-\pi$. $\operatorname{Log} s$ este neregulată în orice punct de pe axa reală negativă, inclusiv $s=0, \infty$. (Comportarea la ∞ este identică comportării la 0, deoarece $\operatorname{Log} 1/s = -\operatorname{Log} s$, așa cum puteți verifica singuri cu ușurință).

Puncte de ramificație, tăieturi și suprafețe Riemann

Dacă considerăm planul complex „tăiat" de-a-lungul axei reale negative, așa cum se arată în fig. A 2.9, pentru a împiedica trecerea dintr-o parte a ei în cealaltă, $\operatorname{Log} s$ este regulată în restul planului complex. De fapt avem :

$$\frac{d}{ds} \operatorname{Log} s = \frac{1}{s} \tag{56}$$

în toate celelalte puncte ale planului „tăiat". Astfel Log s este primitiva lui $1/s$. Putem arăta că

$$\text{Log}\, s = \int_1^s \frac{dz}{z} \tag{57}$$

cu condiţia ca „tăietura" (axa reală negativă) să nu fie intersectată de curba de integrare.

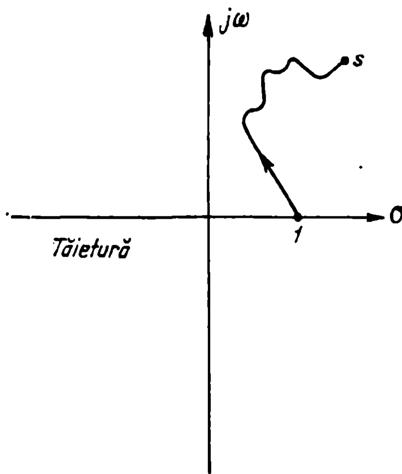


Fig. A.2.9. Tăietura în planul s.

Observaţii similare sînt valabile şi pentru alte valori ale funcţiei logaritmice. Restricţia la valoarea principală nu este necesară. Singurul lucru pe care-l putem face este să impunem restricţia ca parte imaginară a log s să fie cuprinsă în domeniul 2π. O formă riguroasă pentru (57) se obţine dacă adunăm la partea dreaptă un multiplu de $j2\pi$. Nu este strict necesar ca tăietura să fie făcută de-a-lungul axei reale negative. Putem tăia planul de-a-lungul oricărui vector radial definit de:

$$\theta_1 < \arg F(s) < 2\pi + \theta_1 \tag{58}$$

Nici această soluţie nu este strict necesară. Se poate admite orice cale simplă de la $s=0$ la $s=\infty$.

Astfel, prin restricţii adecvate, putem face funcţia log s univocă şi regulată în orice vecinătate. Fac excepţie numai punctele $s=0$, ∞. Nu este posibil să facem log s regulat şi univoc pentru o vecinătate mică a lui $s=0, \infty$. (Deoarece aceste puncte sînt puncte singulare, trebuie să le eliminăm dacă dorim să facem funcţia regulată). Astfel, aceste două puncte singulare sînt diferite în caracter faţă de altele pe care le-am întîlnit pînă acum. Le vom numi puncte de ramificaţie. Mai precis, un punct de ramificaţie al funcţiei este definit astfel:

Punctul s_0 este un *punct de ramificație* al funcției $F(s)$ dacă s_0 este un punct singular izolat și nu există o vecinătate mică a lui s_0 în care $F(s)$ să fie definit sau determinabil ca o funcție regulată unică.

Observăm acum că planul are o tăietură de-a-lungul unei căi simple de la un punct de ramificație al lui log s la celălalt punct de ramificație. Fiecare valoare a log s astfel obținută se numește o *ramificație a funcției*. Astfel Log s este o ramificație a log s.

Riemann introduce un artificiu care ne permite să considerăm funcția log completă și să o tratăm ca o funcție univocă. Acest concept important este cunoscut ca *suprafața Riemann*. Este dificil să definim aceasta în termeni preciși, și nici nu intenționăm să o facem. Vom descrie însă cîteva suprafețe Riemann. Pentru funcția log s, suprafața Riemann are următoarea structură. Considerăm că planul s este format dintr-un număr infinit de planuri identice. Unul din acestea este planul în care arg s este limitat la valoarea sa principală. Există un număr infinit de planuri deasupra acestuia și un număr infinit de planul dedesubt. Toate aceste planuri sînt tăiate de-a-lungul axei reale negative, și au aceiași origine astfel că planurile sînt toate unite prin aceste puncte. Fiecare plan este de asemenea unit de cel imediat superior și de cel imediat inferior prin axa reală negativă. Muchia superioară a axei reale negative a fiecărui plan este aceiași cu muchia inferioară a axei reale negative a planului imediat următor. Întreaga suprafață Riemann apare ca o rampă în spirală fără sfîrșit.

Să considerăm log s pe o astfel de suprafață. Pe fiecare plan

$$\log s = \log|s| + j(\arg s + 2k\pi), \tag{59}$$

unde k este constanta întreagă. Valoarea lui k crește cu 1 cînd mergem pe planul imediat următor, și descrește cu 1 cînd mergem pe planul imediat anterior. Pe această suprafață Riemann, log s este o funcție regulată, univocă cu două puncte singulare $s=0, \infty$.

Putem acum să ne întoarcem la funcția log $F(s)$. Considerăm log $F(s)$ ca o funcție de s. În planul F, tăietura de ramificație merge de la $F(s)=0$ la $F(s)=\infty$. Să considerăm numai cel mai simplu caz în care $F(s)$ este rațional. Alte cazuri sînt ceva mai complicate. Punctele de ramificație în planul s sînt polii și zerourile lui $F(s)$. Fiecare tăietură de ramificație merge de la un zero la un pol. Numărul de tăieturi de ramificație la un zero (sau la un pol) este egal cu ordinul de multiplicitate al acestuia. Tăieturile de ramificație sînt astfel alese încît să nu se intersecteze decît în punctul de ramificație.

Un alt exemplu de concept al suprafeței Riemann se obține considerînd inversa funcției :

$$F(s) = s^2 \tag{60}$$

Inversa acestei funcţii se numeşte ***rădăcina patrată*** şi se scrie :

$$G(s) = s^{1/2} = \sqrt{s} \tag{61}$$

(Formal putem defini puterile lui s astfel :

$$s^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha \log s}, \tag{62}$$

unde α poate fi orice număr complex). Ca şi în cazul real, rădăcina patrată este o funcţie cu două valori. Cele două valori G_1 şi G_2 sînt legate prin relaţia

$$G_1(s) = -G_2(s) = G_2(s)\varepsilon^{j\pi} \tag{63}$$

Putem face această funcţie univocă impunînd restricţia asupra unghiului lui s, ca mai înainte ; astfel se obţine :

$$-\pi < \arg s \leqslant \pi. \tag{64}$$

Definiţia „rădăcinii patrate pozitive” este

$$G_1(s) = \sqrt{|s|}\,\varepsilon^{1/2\, j\arg s} \tag{65}$$

unde $\sqrt{|s|}$ este un număr real pozitiv. Şi în acest caz, $G_1(s)$ nu este continuă pe axa reală negativă, inclusiv $s=0, \infty$. Punctele $s=0$, sînt puncte de ramificaţie ale funcţiei $G(s)$. Conceptul de suprafaţă Riemann poate fi introdus astfel. Sînt necesare două planuri ale suprafeţei Riemann, ambele tăiate de-a-lungul axei reale negative. Pentru a face $G(s)$ continuă şi regulată pe această suprafaţă, legăm două planuri de-a-lungul axei reale negative. Muchia superioară a axei reale negative a fiecărui plan este conectată la muchia inferioară a axei reale negative a următorului plan. (Desigur este inutil să încercăm să obţinem o imagine în spaţiul tridimensional). În această suprafaţă Riemann, $G(s)$ este regulat şi univoc determinat cu excepţia lui $s=0, \infty$.

Se vede că punctele de ramificaţie ale funcţiei $\log s$ sînt puţin diferite de punctele de ramificaţie ale lui $s^{1/2}$. În primul caz avem un număr infinit de ramificaţii, în al doilea caz avem numai un număr finit. Pentru a le distinge între ele, vom numi pe cea dintîi o ***singularitate logaritmică*** (sau un punct de ramificaţie logaritmică) şi pe cealaltă ***singularitate algebrică*** (sau un punct de ramificaţie algebrică).

Desigur această discuție poate fi extinsă și la alte funcții algebrice iraționale, ca de exemplu

$$F(s) = \left(\frac{as^2+bs+c}{ds+e}\right)^{1/3} \tag{66}$$

Clasificarea funcțiilor multiforme

Am văzut că singularitățile unei funcții analitice sînt extrem de importante. De fapt, putem *clasifica* funcțiile analitice în raport cu tipul și localizarea punctelor singulare. În continuare vom prezenta concis această clasificare.

Cel mai simplu caz este acela al unei funcții analitice care nu are singularități, nici în planul finit, nici la infinit. În acest caz, o teoremă cunoscută ca *teorema lui Liouville* ne spune că funcția este o constantă. În cazul următor, considerăm că funcția nu are singularități finite, dar are singularități la $s=\infty$. Un exemplu de astfel de funcție este funcția exponențială. O funcție care nu are singularități în planul finit s este cunoscută ca o *funcție întreagă* . Dacă singularitatea la infinit este un pol, vedem din dezvoltarea Laurent referitoare la infinit, că această funcție este un *polinom* (de asemenea numit *rațional întreg*). Dacă singularitatea la infinit este o singularitate esențială, funcția este o funcție *transcedentală întreagă.* Funcțiile ε^s, sin s, cos s, etc., aparțin acestei categorii.

Cîtul a două funcții întregi este o *funcție meromorfă.* Singurele singularități ale funcției meromorfe, în planul finit, sînt puncte în care funcția întreagă a numitorului devine zero. Astfel o funcție meromorfă poate avea numai poli în partea finită a planului s. Comportarea la infinit împarte această clasă în două subclase. Dacă punctul ∞ este un punct regulat sau un pol, atunci se poate arăta că funcția are numai un număr finit de poli (se folosește teorema cunoscută ca teorema lui Bolzano-Weierstrass). Folosind dezvoltarea în fracții parțiale dată în paragraful A 2.7, putem arăta că această funcție este o *funcție rațională,* adică un cît de două polinoame. Reciproca : orice funcție rațională este o funcție meromorfă cu cel mult un pol la $s=\infty$. Un exemplu de funcție meromorfă nerațională este tg s sau cosec s.

Toate aceste funcții sînt funcții univoce. Funcțiile multiforme pot fi clasificate în raport cu numărul de puncte de ramificație și numărul de ramificații la fiecare punct de ramificație. O funcție cu un număr finit de puncte de ramificație și un număr finit de ramificații este o funcție *algebrică irațională.* Să vedem exemple de astfel de funcții. Funcția logaritmică poate fi folosită să construim exemple pentru un număr infinit de ramificații. Funcția log s are un număr infinit de puncte de ramificație și un număr infinit de ramificații, în timp ce funcția $\sqrt{\sin s}$ are un număr infinit de puncte de ramificație la fiecare punct de ramificație. Acestor trei clase nu li s-au asociat nume speciale.

A. 2.6. TEOREMA REZIDUURILOR

Teorema Cauchy tratează problema integralei pe contur închis a unei funcţii cînd funcţia este regulată în interiorul conturului. Acum avem informaţiile necesare pentru a determina valoarea unei integrale pe contur închis cînd conturul include unul sau mai multe puncte singulare ale funcţiei. Pentru aceasta propunem să reluăm formula pentru coeficienţii unei serii Laurent dată în (43) şi să considerăm coeficientul primului termen al puterilor inverse, $k=1$. Acesta este :

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi j}\int_{C} F(z)\, dz \tag{67}$$

Acesta este un rezultat extrem de important. El afirmă că dacă o funcţie este integrată pe un contur închis în interiorul căruia funcţia are un punct singular, valoarea integralei va fi $2\pi j$ înmulţit cu coeficientul primului termen de putere negativă din seria Laurent. Niciunul din ceilalţi termeni din serie nu are nici o contribuţie asupra integralei. Vom numi acest coeficient *reziduu*. Menţionăm că funcţia este regulată pe contur.

Dacă conturul în discuţie include mai mult de un punct singular (dar un număr finit), putem închide fiecare punct singular într-un contur mai mic, situate toate în interiorul conturului principal. Trasînd canale de separare într-un mod obişnuit, găsim că valoarea integralei în jurul conturului original este egală cu suma integralelor în jurul contururilor mici, toate luate în sensul invers acelor ceasornicului. Să considerăm acum o serie Laurent referitoare la fiecare din punctele singulare. Aşa cum se arată în paragraful precedent, valoarea integralei referitoare la fiecare contur mic este egală cu $2\pi j$ înmulţit cu reziduul corespunzător. Deci integrala pe conturul original este egală cu $2\pi j$ înmulţit cu suma reziduurilor tuturor punctelor singulare din interiorul conturului ; astfel :

$$\int_{C} F(s)\, ds = 2\pi j \sum \text{reziduurilor funcţiei în punctele singulare} \tag{68}$$

Aceasta este cunoscută ca *teorema reziduurilor*. Pentru a găsi valoarea unei integrale pe contur închis este necesar să calculăm reziduurile referitoare la toate punctele singulare într-o manieră independentă de formula pentru coeficienţii seriei Laurent.

Considerăm o funcţie $F(s)$ care are un pol de ordinul n în s_0. Dacă seria Laurent referitoare la s_0 este multiplicată cu $(s-s_0)^n$, rezultatul va fi

$$(s-s_0)^n F(s)=a_{-n}+a_{-n+1}(s-s_0)+\ldots+a_{-1}(s-s_0)^{n-1}+a_0(s-s_0)^n+\ldots \tag{69}$$

Funcţia din stînga este regulată în s_0, şi seria din dreapta este seria Taylor reprezentată în vecinătatea lui s_0. Folosind formula pentru cieficienţii Taylor, obţinem

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left[(s - s_0)^n F(s) \right] \Big|_{s=s_0} \tag{70}$$

Pentru un pol simplu, aceasta se reduce la următoarea formă simplă:

$$a_{-1} = (s - s_0) F(s) \big|_{s=s_0} \tag{71}$$

Pentru poli, cunoaştem acum o cale simplă de determinare a reziduurilor. Pentru determinarea reziduului referitor la un pol simplu se cunosc şi alte variante de calcul mai comode. Dacă funcţia dată este de forma:

$$F(s) = G(s)/H(s) \tag{72}$$

şi s_0 este un pol simplu al funcţiei $F(s)$, de obicei $H(s)$ are un zero simplu în s_0 şi $G(s)$ este regulat şi diferit de zero în s_0. În acest caz putem scrie:

$$\text{reziduul lui} F(s) \text{ în } s_0 = \lim_{s \to s_0} (s-s_0)F(s) = \frac{\lim\limits_{s \to s_0} G(s)}{\lim\limits_{s \to s_0} H(s)/(s-s_0)} \tag{73}$$

deoarece $G(s)$ este regulat în s_0. Astfel limita numărătorului este $G(s_0)$. Pentru limita numitorului, scădem $H(s_0)$ din $H(s)$, ceea ce este permis deoarece $H(s_0)=0$. Se obţine:

$$\text{reziduul lui } F(s) \text{ în } s_0 = \frac{G(s_0)}{\lim\limits_{s \to s_0} [H(s)-H(s_0)]/(s-s_0)} = \frac{G(s_0)}{H'(s_0)} \tag{74}$$

deoarece limita cîtului de la numitor este prin definiţie derivata funcţiei $H(s)$.

Dacă pe de altă parte scriem:

$$F(s) = \frac{1}{F^{-1}(s)} \tag{75}$$

şi urmăm acelaşi raţionament, se obţine:

$$\text{reziduul lui } F(s) \text{ în } s_0 = \frac{1}{\frac{d}{ds} \frac{(1)}{F(s)}} \Bigg|_{s=s_0} \tag{76}$$

Rezultă că reziduul la un pol simplu este inversa derivatei funcției reciproce.

Una din aplicațiile importante ale teoremei reziduurilor este următoarea teoremă a identității pentru seria Laurent;

Dacă două serii Laurent :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (s-s_0)^n \quad \text{şi} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (s-s_0)^n$$

au un domeniu comun de convergență $R_1 < |s-s_0| < R_2$ și reprezintă aceiași funcție în acest domeniu, atunci :

$$a_n = b_n \text{ (toate valorile lui } n, \ -\infty < n < \infty)$$

Rezultă că cele două serii reprezintă aceiași funcție

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (s-s_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (s-s_0)^n \quad (R_1 < |s-s_0| < R_2) \tag{77}$$

Deoarece seriile de puteri pozitive și negative sînt serii de puteri, ele converg uniform pentru $|s-s_0| \leqslant R_2-\varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$ și $|s-s_0| \geqslant R_1+\varepsilon$ respectiv. Deci în domeniul circular $R_1+\varepsilon \leqslant |s-s_0| \leqslant R_2-\varepsilon$, seriile Laurent sînt uniform convergente. Multiplicăm acum ambele părți din (77) prin $(s-s_0)^{k-1}$, unde k este întreg, pozitiv, negativ sau zero, și integrăm de-a-lungul unei căi circulare C care cade în domeniul de convergență uniformă și încercuiește pe s_0. Folosind teorema reziduurilor, obținem;

$$a_{-k} = b_{-k} \quad (\text{pentru } -\infty < k < \infty)$$

Evaluarea integralei definite

Teorema reziduului (care include teorema lui Cauchy) ne oferă o modalitate de evaluare a multor integrale definite, reale care nu pot fi evaluate prin alte metode. Alegem o funcție de s care se reduce la integrandul real dat cînd s este real, și alegem un contur închis care include în el intervalul dorit pentru integrala definită. Dacă putem acum să găsim reziduurile la singularitățile integrandului care pot cădea în interiorul conturului ales, și dacă putem calcula independent contribuția la integrala pe conturul închis a celeilalte părți care completează intervalul dorit, se poate găsi valoarea integralei dorite.

În evaluarea unor astfel de integrale pot apare două situaţii. Se poate întîmpla ca integrandul să aibă un pol simplu pe calea de integrare. Pentru a aplica teorema reziduurilor, funcţia trebuie să fie regulată pe conturul închis. Această situaţie este remediată prin distorsionarea conturului printr-un arc semicircular, aşa cum se arată în fig. A 2.10. Noul contur este desigur diferit de cel original. Vom face totuşi ca raza semicercului să tindă către zero. Rămîne de calculat contribuţia semicercului la integrala pe conturul închis.

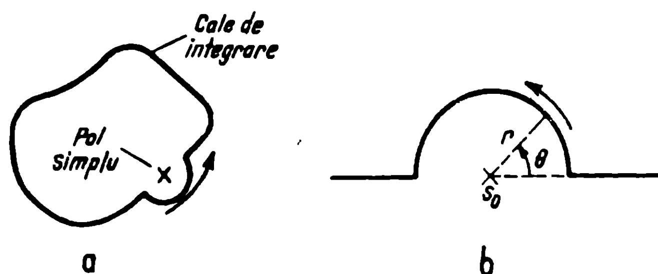


Fig. A.2.10. Distorsionarea conturului de integrare în jurul polului.

Considerăm calea semicirculară arătată în fig. A. 2.10*b* în jurul unui pol simplu în s_0. Dezvoltarea Laurent a lui $f(s)$ referitoare la s_0 are forma :

$$F(s) = \frac{a_{-1}}{s-s_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s-s_0)^n. \tag{78}$$

Menţionăm că direcţia căii este înconjurarea polului în sens contrar acelor ceasornicului cînd deformarea conturului s-a făcut astfel încît polul să cadă în interiorul conturului. Putem de asemenea proceda la excluderea polului din contur. Atunci, valoarea obţinută va fi negativa celei obţinute aici. Seria poate fi integrată termen cu termen; fie $(s-s_0) = r\varepsilon^{j\theta}$ şi fie C notaţia semicercului. Pe semicerc, θ variază de la 0 la π. Integrala din $F(s)$ pe semicerc devine

$$\int_C F(s)\, ds = \int_0^{\pi} \frac{a_{-1}}{r\varepsilon^{j\theta}} jr\varepsilon^{j\theta}\, d\theta + \sum_n a_n \int_0^{\pi} r^n \times \varepsilon^{j\theta n} jr\varepsilon^{j\theta}\, d\theta$$

$$= j\pi a_{-1} + \sum_n \frac{a_n r^{n+1}}{n+1} (\varepsilon^{j(n+1)\pi} - 1) \tag{79}$$

Se observă că primul termen este independent de raza r a semicercului. Cînd raza r tinde către zero, fiecare termen din sumă va tinde către zero. Deci

$$\int_{\text{semicerc}} F(s)\, ds = j\pi a_{-1}; \tag{80}$$

astfel că, integrala pe o jumătate de cerc în jurul unui pol simplu va avea jumătate din valoarea unei integrale pe un cerc complet. Dacă conturul este o fracţiune k a unui arc circular, folosind acelaşi raţionament, contribuţia acestuia va fi $k(2\pi j a_{-1})$.

Lema lui Jordan

O altă situaţie care apare adesea la integralele definite este necesitatea evaluării unei integrale cu limite infinite, adică

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, d\omega \tag{81}$$

O astfel de integrală se numeşte o integrală improprie. Se foloseşte notaţia echivalentă

$$I = \lim_{R_0 \to \infty} \int_{-R_0}^{R_0} f(\omega)\, d\omega \tag{82}$$

Valoarea obţinută mergînd spre valori infinite negative şi pozitive într-un mod simetric, este numită valoarea principală a integralei. Acest tip de integrală poate fi evaluată prin alegerea unui contur constînd din axa imaginară de la $-R_0$ la R_0 şi un semicerc mare în semiplanul drept sau stîng, aşa cum este arătat în fig. A 2.11. Integrandul trebuie să fie o funcţie $F(s)$ care se reduce la integrandul dat pe axa imaginară. Folosirea teoremei reziduurilor ne permite acum evaluarea intergralei dorite, cu condiţia ca integrala pe arcul semicircular să tindă către o limită cînd $R_0 \to \infty$,şi ca această limită să poată fi găsită. Situaţia cea mai dorită este ca acest arc să nu aibă nici o contribuţie asupra intergralei. Se poate arăta că dacă

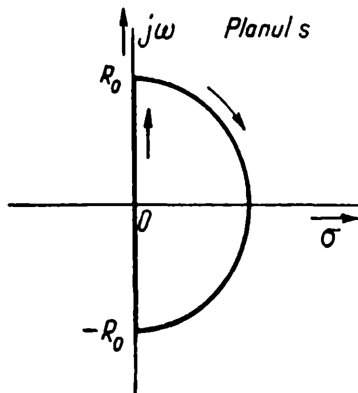


Fig. A.2.11. Contur pentru evaluarea integralelor infinite.

$sF(s)$ tinde uniform către zero[1] pe arc, cînd raza cercului tinde către infinit, atunci nu există nici o contribuție din partea arcului infinit; de exemplu, dacă $F(s)$ este un raport a două polinoame, gradul numitorului trebuie să depășească pe al numitorului prin 2 sau mai mult.

Fie t o variabilă reală și să presupunem că integrandul are forma:

$$F(s) = G(s)\varepsilon^{st} \tag{83}$$

Se poate arăta că pentru $t>0$, arcul infinit din semiplanul stîng nu va contribui asupra integralei, și același lucru este valabil și pentru arcul din dreapta pentru $t<0$, cu condiția ca $G(s)$ să tindă uniform către zero cînd raza semicercului tinde către infinit. Acest rezultat este numit *lema lui Jordan*. Prezența exponențialei face inutilă restricția privind restul integrandului. Astfel dacă $G(s)$ este un raport de două polinoame, este suficient ca gradul numitorului să-l depășească pe al numărătorului cu 1(sau mai mult).

Așa de exemplu să considerăm evaluarea integralei:

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \tag{84}$$

Exprimînd funcția sinus în termenii exponențialei, obținem:

$$I = \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{j\omega t}}{2j\omega} d\omega + \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{-j\omega t}}{2j\omega} d\omega \tag{85}$$

Dacă în a doua integrală înlocuim pe ω cu $-\omega$, integrandul va deveni identic cu cel al primei integrale, în timp ce limitele vor deveni $-\infty$ la zero. Cele două integrale pot fi deci combinate și se obține:

$$I = \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^\infty \frac{\varepsilon^{-j\omega t}}{\omega} d\omega \tag{86}$$

Considerăm acum integrala:

$$\int \frac{\varepsilon^{st}}{s} ds \tag{87}$$

---

[1]) Adică, limita tinde către același număr pentru toate unghiurile lui s din interiorul acestui domeniu. Domeniul este $|\arg s| \leqslant \pi/2$ pentru un semicerc în semiplanul drept și $|\arg s| \leqslant \pi/2$ pentru un semicerc în semiplanul stîng. În limbajul $\varepsilon - \delta$, amplitudinea diferenței dintre $sF(s)$ și limită (în acest caz 0), poate fi făcută mai mică ca ε, atunci cînd $|s| > N(\varepsilon)$, unde $N(\varepsilon)$ este independent de arg s în domeniul considerat.

unde conturul C este conturul închis prezentat în fig. A 2.12. Integrandul are un pol simplu pe conturul original, astfel că vom modifica conturul făcîndu-l să ocolească polul aşa cum este arătat în figură. Conturul complet conţine două porţiuni ale axei $j\omega$ şi două semicercuri, raza unuia va tinde

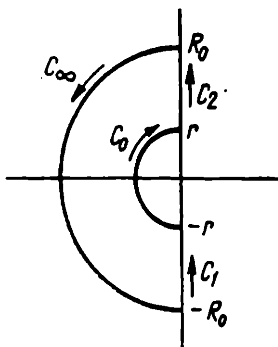


Fig. A.2.12. Cale de integrare pentru evaluarea unei integrale.

către zero în timp ce a celuilalt va tinde către infinit. Deoarece integrandul este regulat oriunde în interiorul conturului, integrala pe conturul închis va fi egală cu zero. Putem scrie

$$\int_C \frac{\varepsilon^{st}}{s}\, ds = 0 = \int_{-R_0}^{-r} \frac{\varepsilon^{j\omega t}}{\omega}\, d\omega + \int_{C_0} \frac{\varepsilon^{st}}{s}\, ds + \int_r^{R_0} \frac{\varepsilon^{j\omega t}}{\omega}\, d\omega + \int_{C_\alpha} \frac{\varepsilon^{st}}{s}\, ds \quad (88)$$

Integrandul satisface lema lui Jordan, astfel că ultima integrală din această ecuaţie se anulează. Valoarea integralei pe C_0 este, în concordanţă cu (80), $-j\pi$ înmulţit cu reziduul integrandului la $s=0$. Pentru calculul reziduului se foloseşte (71) şi se găseşte că este 1. Deci :

$$\int_{C_0} \frac{\varepsilon^{st}}{s}\, ds = -j\pi \quad (89)$$

Putem scrie acum (88) astfel :

$$\lim_{\substack{r\to 0 \\ R_0\to 8}} \left\{ \int_{-R_0}^{r} \frac{\varepsilon^{j\omega t}}{\omega}\, d\omega + \int_r^{R_0} \frac{\varepsilon^{j\omega t}}{\omega}\, d\omega \right\} = j\pi \quad (90)$$

Din ecuaţiile (86) şi (90) obţinem în final

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin \omega t}{\omega}\, d\omega = \frac{1}{2j} j\pi = \frac{\pi}{2} \quad (91)$$

Principiul argumentului

Ca o altă aplicaţie a teoremei reziduurilor, vom demonstra acum o teoremă foarte utilă numită „principiul argumentului", Fie $F(s)$ o funcţie analitică care este regulată într-un domeniu R,excepţie făcînd pentru poli.

Să evaluăm integrala :

$$\int_C \frac{F'(s)}{F(s)}\,ds \tag{92}$$

în jurul unui contur închis C în domeniul R parcurs în sens invers acelor ceasornicului, unde prim indică diferenţiala. Nu există poli sau zerouri ai lui $F(s)$ pe conturul C.

Presupunem că $F(s)$ are un zero de ordinul n într-un punct s_1 din R. Putem scrie :

$$F(s) = (s-s_1)^n F_1(s)$$

$$F'(s) = n(s-s_1)^{n-1} F_1(s) + (s-s_1)^n F'(s) \tag{93}$$

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{n}{s-s_1} + \frac{F_1'(s)}{F_1'(s)}$$

Se constată că această funcţie are un pol simplu la zeroul lui $F(s)$ cu reziduul n. Funcţia $F_1(s)$ poate acum fi tratată în acelaşi mod şi vom repeta această procedură pînă cînd toate zerourile funcţiei originale $F(s)$ vor fi puse în evidenţă. Fiecare zero va conduce la un termen asemănător primului din partea dreaptă a lui (93).

Să presupunem acum că $F(s)$ are un pol de ordinul m într-un punct s_2 din R. Putem scrie

$$F(s) = \frac{F_2(s)}{(s-s_2)^m}$$

$$F'(s) = \frac{(s-s_2)F_2'(s) - mF_2(s)}{(s-s_2)^{m+1}} \tag{94}$$

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = -\frac{m}{s-s_2} + \frac{F_2'(s)}{F_2(s)}$$

Se constată că funcţia dorită are un pol simplu la polul lui $F(s)$ cu un reziduu care este negativul ordinului său. Această procedură poate fi din

nou repetată, şi fiecare pol al lui $F(s)$ va conduce la un termen asemănător primului din partea dreaptă a ultimei ecuaţii. Singularităţile lui $F'(s)/F(s)$ din domeniul R vor coincide cu zerourile şi polii lui $F(s)$ deci din teorema reziduurilor, valoarea integralei pe conturul dorit va fi :

$$\int_C \frac{F'(s)}{F(s)}\, ds = 2\pi j\,[\sum n_j - \sum m_j]. \tag{95}$$

unde n_j sînt ordinele zerourilor lui $F(s)$ din R, şi m_j sînt ordinele polilor.

Observăm că :

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{d}{ds}\log F(s) \tag{96}$$

Putem deci evalua integrala pe contur cu ajutorul primitivei $F'(s)/F(s)$, care este log $F(s)$. Prin parcurgerea conturului C înţelegem că pornim dintr-un punct şi ne întoarcem în acelaşi punct. Menţionăm că funcţia multiformă log $F(s)$ va avea aceeaşi parte reală la revenirea în punctul de plecare. Deci, valoarea integralei va fi de j ori creşterea unghiului lui $F(s)$ cînd s parcurge conturul C în sens invers acelor ceasornicului. Aceasta va fi egală cu partea dreaptă a lui (95). Dacă împărţim acum prin 2π, rezultatul va fi un număr care indică de cîte ori conturul C din planul F înconjoară originea în sens invers acelor ceasornicului (creşterea unghiului împărţită prin 2π este numărul de încercuiri ale originii în sens invers acelor ceasornicului).

Să enunţăm acum principiul argumentului. *Dacă o funcţie $F(s)$ nu are puncte singulare în interiorul unui contur C, cu excepţia polilor, şi nu are zerouri nici poli pe C, atunci numărul de încercuiri ale originii în sens invers acelor ceasornicului de către locul curbei C în planul F, este egal cu numărul de zerouri minus numărul de poli ai lui $F(s)$ din interiorul lui C. Fiecare pol sau zero este luat în calcul ţinînd seama de multiplicitatea sa.*

Înainte de a încheia acest capitol, să considerăm o altă problemă a integralei pe contur. Aceasta este problema integrării unei funcţii în jurul unei singularităţi logaritmice.

Să considerăm, prin urmare, integrala :

$$\int_P \log F(s)\, ds$$

unde calea P este un arc în jurul unui zero sau unui pol al lui $F(s)$, aşa cum se arată în fig. A 2.10 *b*. Să considerăm că $F(s)$ are un zero (sau un pol) de ordinul k în s_0. În acest caz putem scrie :

$$F(s) = (s - s_0)^k F_1(s) \tag{97a}$$

$$\log F(s) = k \log (s - s_0) + \log F_1(s) \tag{97b}$$

Dacă s_0 este un pol, fie k un număr întreg, negativ în aceste expresii astfel că putem face discuţia simultană a unui zero de ordinul k şi a unui pol de ordinul $-k$. Deoarece am presupus că raza cercului tinde către zero, $\log F_1(s)$ nu va contribui în nici un fel asupra integralei, deci ea este regulată în s_0. Rezultă că este suficient să considerăm :

$$\int_P \log (s - s_0)\, ds$$

dacă dorim să luăm limita, şi aşa vom face.

Pe arcul de rază r, putem estima :

$$\left| \int_P \log (s - s_0)\, ds \right| \leqslant r\, \theta \left| \log r \right| + r\, \theta^2 = \theta \left| r \log r \right| + r\, \theta^2 \tag{98}$$

unde θ este unghiul sub care se vede arcul privit din origine. Se ştie că :

$$\lim_{r \to 0} r \log r = 0 \tag{99}$$

Deci

$$\lim_{r \to 0} \int_P \log F(s)\, ds = 0 \tag{100}$$

şi acesta este rezultatul pe care doream să-l obţinem. Am arătat că o singularitate logaritmică care cade pe o cale de integrare nu afectează integrala.

A. 2.7. DEZVOLTAREA ÎN FRACŢII PARŢIALE

Dezvoltarea Laurent a unei funcţii referitor la un punct singular exprimă o funcţie într-un domeniu circular referitor la acest punct singular. Deşi funcţia poate avea şi alte puncte singulare, nu putem avea o evidenţă a acestor puncte singulare. Uneori poate fi util să avem o reprezentare a funcţiei care să pună în evidenţă toate punctele sale singulare.

Presupunem că o funcţie $F(s)$ are singularităţi izolate la un număr finit n de puncte în planul finit. Putem de asemenea avea o singularitate la infinit. Să considerăm dezvoltarea $F(s)$ într-o dezvoltare Laurent referitoare la unul din punctele singulare, să zicem s_1. Rezultatul va fi :

$$F(s) = F_{p1}(s) + F_{r1}(s), \tag{101}$$

unde indicii se referă la partea principală şi partea regulată.

Considerăm acum $F_{r1}(s)$, care este funcţia originală din care s-a scăzut partea principală a seriei Laurent referitoare la una din singularităţile sale. Aceasta este regulată în s_1, dar are toate celelalte singularităţi ale lui $F(s)$. Să o dezvoltăm într-o serie Laurent referitoare la o altă singularitate, s_2.

$$F_{r1}(s) = F(s) - F_{p1}(s) = F_{p2}(s) + F_{r2}(s) \tag{102}$$

Funcţia $F_{p1}(s)$ este regulată la singularitatea s_2, deci ea nu va afecta partea principală $F_{p2}(s)$. Aceasta înseamnă că partea principală $F_{p2}(s)$ va fi aceeaşi dacă dezvoltăm $F_{r1}(s)$ sau funcţia originală $F(s)$.

Repetăm acum acest procedeu cu $F_{r2}(s)$ pentru fiecare singularitate. La fiecare etapă se scade partea principală a dezvoltării Laurent pînă cînd epuizăm toate punctele singulare. Partea regulată a ultimei dezvoltări Laurent nu va avea alte singularităţi în planul finit. Rezultă că ea trebuie să fie o funcţie întreagă. Am avut în vedere obţinerea unei reprezentăr a lui $F(s)$ de forma :

$$F(s) = \sum_{k=1}^{n} F_{pk}(s) + F_r(s) \tag{103}$$

Fiecare din termenii sumei este partea principală a seriei Laurent a lui $F(s)$ dezvoltată referitor la una din singularităţile sale. Ultimul termen este o funcţie întreagă. Dacă $F(s)$ este regulată la infinit, acest termen va fi o constantă. Dacă $F(s)$ are un pol de ordinul n la infinit, acest termen va fi un polinom de gradul n. În final, dacă $F(s)$ are o singularitate esenţială la infinit, acest termen va fi o serie de puteri infinite. Reprezentarea unei funcţii analitice dată în (103) este numită o *dezvoltare în fracţii parţiale.*

Presupunem că o funcţie are un număr infinit de poli şi nu are singularităţi esenţiale în planul finit (aceasta face funcţia meromorfă). În aceste cazuri putem găsi de asemenea o dezvoltare în fracţii parţiale. Suma părţilor principale din (103) va fi o serie infinită şi în general nu poate converge. Cu toate acestea este posibil totdeauna să modificăm astfel termenii încît seria să devină convergentă. Dar în acest caz forma dezvoltării este modificată. Desigur, în unele cazuri o astfel de modificare nu este necesară, iar expunerea condiţiilor în care această modificare este posibilă nu este simplă, şi nu ne propunem să tratăm acest subiect. (Această dezvoltare este cunoscută ca dezvoltarea *Mittag-Leffler*).

A. 2.8. PRELUNGIRE ANALITICĂ

Chiar la începutul acestei anexe am definit o funcţie analitică ca una care este diferenţiabilă oriunde într o vecinătate, oricît de mică, a unui punct. Mai tîrziu, din dezvoltarea Taylor a unei funcţii analitice referitoare

la un punct s_0 în care funcţia este regulată, vedem că cunoaşterea tuturor derivatelor unei funcţii analitice într-un punct ne permite să reprezentăm funcţia oriunde într-un cerc în jurul punctului, un cerc care se extinde pînă la cea mai apropiată singularitate a funcţiei. Spunem că am obţinut o reprezentare în serie de puteri a unei funcţii referitoare la un punct, nu are importanţă prin ce procedură, şi această serie este unică. Putem expune acest rezultat într-o altă formă şi anume : *Dacă două funcţii sînt regulate*

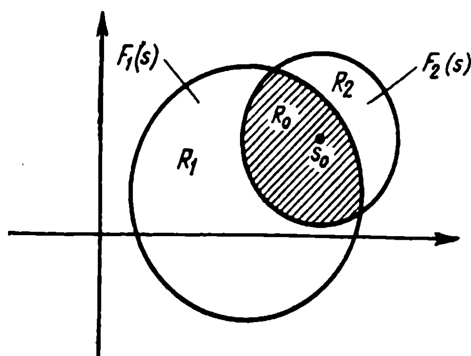


Fig. A.2.13. Domeniu comun de definire a două funcţii.

într-un domeniu R *şi dacă ele coincid într-o vecinătate, nu are importanţă cît de mică, a unui punct* s_0 *din* R, *atunci cele două funcţii sînt egale oriunde în* R. Această teoremă se numeşte *teorema de identitate pentru funcţii analitice.* (De fapt, este necesar ca cele două funcţii să coincidă numai pe un segment al căii, oricît de mic, sau chiar numai pe un număr finit de puncte distincte cu un punct limită în s_0).

Să considerăm acum două funcţii $F_1(s)$ şi $F_2(s)$, care sînt regulate în domeniul de suprapunere R_1 şi R_2, domeniul comun fiind R_0, aşa cum este arătat în fig. A 2.13. (Nu este necesar ca domeniul să fie circular aşa cum se arată aici). Două funcţii $F_1(s)$ şi $F_2(s)$ se determină una pe alta univoc. Aceasta rezultă din teorema de identitate, deoarece numai o funcţie poate fi regulată în R_1 (sau R_2) şi poate avea aceiaşi valoare în R_0.

Presupunem că se cunoaşte funcţia $F_1(s)$ în R_1 şi putem găsi o funcţie $F_2(s)$ în R_2 cu proprietăţile considerate mai sus. Spunem că $F_1(s)$ este *prelungită analitic* dincolo de domeniul original în domeniul R_2. Dar putem la fel de bine considera că $F_2(s)$ este funcţia originală şi $F_1(s)$ este *prelungirea analitică* în domeniul R_1. Din acest motiv, spunem că fiecare din ele este o reprezentare parţială sau un element al unei funcţii $F(s)$ care este regulată în R_1 şi R_2.

Problema poate fi tratată luînd ca punct de plecare un element $F_1(s)$ al funcţiei, care este în forma unei serii de puteri, şi să determinăm prelungirea sa analitică în afara cercului original de convergenţă. Se poate folosi

din nou fig. A 2.13. Presupunem că alegem un punct s_0 în domeniul R_1. Din elementul dat $F_1(s)$ putem evalua toate derivatele în s_0 şi formăm o nouă serie de puteri referitoare la s_0. Această serie converge sigur în R_1, domeniul original de convergenţă al lui $F_1(s)$, şi poate de asemenea converge într-un cerc care se extinde dincolo de cercul original, aşa cum se arată în fig. A 2.13. Seria defineşte un alt element $F_2(s)$ al funcţiei pentru care $F_1(s)$ este de asemenea un element. Putem alege un alt punct în interiorul noului domeniu R_2, şi calculăm o nouă serie care poate converge într-un cerc care se extinde dincolo de limita lui R_2.

Această procedură poate fi acum repetată. Trebuie însă evitată existenţa unui punct singular în cercul obţinut prin extinderea dincolo de cel precedent, punct singular care cade pe circumferinţa primului cerc şi pe raza primului cerc dusă prin centrul celui de al doilea cerc. Această situaţie poate fi evitată prin alegerea unui alt punct pentru centrul celui de al doilea cerc, *afară de cazul în care fiecare punct de pe primul cerc este un punct singular*. Aceasta este o situaţie posibilă, dar nu este comună. Într-un astfel de caz, funcţia originală se numeşte *mărginită natural*, şi dincolo de această limită ea nu poate fi prelungită analitic.

Cu excepţia unei limitări naturale, un element poate fi prelungit analitic în întregul plan prin acest procedeu de suprapunere a cercurilor. Singurele puncte care vor fi eliminate din interiorul oricărui cerc vor fi punctele singulare. Şirul de funcţii definite în aceste cercuri, vor fi toate elemente ale unei funcţii singulare. Este justificată acum definiţia funcţiei analitice.

Procedeul descris aici are o valoare practică redusă, deoarece niciodată nu vom calcula toate elementele unei funcţii în acest mod. Totuşi, ea are o importanţă deosebită în ceea ce priveşte comportarea fundamentală a funcţiei.

În procesul de realizare (cel puţin în imaginaţie) a suprapunerii cercurilor, presupunem că unul din ele se suprapune complet peste cel anterior. Problema care apare este dacă valorile date de ultima funcţie vor fi aceleaşi cu acelea date pentru prima în domeniul comun al celor două cercuri. Dacă aceste valori diferă, atunci funcţia definită de acest set de elemente va fi multiformă.

Să considerăm acum un alt aspect al prelungirii analitice. Presupunem că o funcţie este definită de-a-lungul unui arc simplu care cade în domeniul R. Este posibil să găsim o funcţie care este regulată în R şi coincide cu aceea definită pe arcul simplu. Această funcţie va fi de asemenea numită prelungirea analitică a celei originale. Arcul simplu poate fi de exemplu o parte sau toată axa $j\omega$. Dacă luăm de exemplu o funcţie care are valoarea $1+j\omega$ pentru intervalul $1 \leqslant \omega \leqslant 2$, prelungirea analitică este $1+s$. Nu există nici o altă funcţie care să fie regulată în domeniul care conţine intervalul dat de pe axa $j\omega$ şi care să coincidă cu funcţia dată în acest interval.

ANEXA 3

Teoria transformatelor Laplace

Ca şi în cazul Anexei 2 privitoare la funcţiile de variabilă complexă, această anexă privitoare la transformările Laplace va servi ca referinţă acelor cititori familiarizaţi cu subiectul. Prezentarea va fi făcută în linii mari şi completată cu ilustraţii, discuţii etc.

Conceptul de transformare a unei funcţii poate fi abordat pornind de la ideea folosirii unei schimbări de variabilă în scopul simplificării soluţiei unei probleme. Astfel dacă avem o problemă ce implică variabila x, substituim x cu o altă expresie, în funcţie de noua variabilă (de exemplu $x=\sin\theta$), cu anticiparea că problema va avea o formulare şi o soluţie mai simplă în raport cu noua variabilă. După obţinerea soluţiei în raport cu noua variabilă, folosim inversa schimbării precedente şi găsim astfel soluţia problemei originale.

Adesea este necesară o „schimbare de variabilă" mai complicată, sau transformare. Dacă se dă o funcţie $f(t)$ de variabila t, definim o *transformată integrală a lui* $f(t)$ astfel

$$\text{transformata integrală a lui } f(t) = \int_a^b f(t)\, K(t,s)\, dt. \tag{1}$$

Funcţia $K(t,s)$ care este o funcţie de două variabile, se numeşte *nucleul* transformării. Observăm că transformata integrală nu mai depinde de t; este o funcţie de variabila s de care depinde nucleul.

A.3.1. TRANSFORMATELE LAPLACE: DEFINIŢIE ŞI PROPRIETĂŢI DE CONVERGENŢĂ

Tipul de transformată care se obţine şi tipurile de probleme în care este utilă depind de două lucruri: de nucleu şi de limitele de integrare. Pentru alegerea particulară a nucleului $K(s,t)=\varepsilon^{-st}$ şi a limitelor o şi infinit,

transformata se numeşte *transformată Laplace* şi se notează cu $\mathscr{L}\{f(t)\}$. Astfel

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\varepsilon^{-st}\,dt. \tag{2}$$

Transformata Laplace a lui $f(t)$ este astfel o funcţie de variabila complexă s. Vom nota transformata Laplace a lui $f(t)$ cu $F(s)$. Din cauză că este definită ca o integrală, transformata Laplace este o *funcţională liniară*; adică dacă $f_1(t)$ şi $f_2(t)$ au transformatele Laplace $F_1(s)$ şi $F_2(s)$ iar k_1, k_2 sînt constante, rezultă

$$L\{k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)\} = k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s). \tag{3}$$

Deoarece ecuaţia de definiţie conţine o integrală cu limite infinite, una din primele întrebări la care trebuie dat un răspuns este aceea asupra existenţei transformatelor Laplace. Un exemplu simplu de funcţie care nu are o transformată Laplace este ε^{s^t}. Să enunţăm aşadar cîteva teoreme (din care cîteva le vom demonstra) privitoare la convergenţa integralei Laplace. Deoarece s apare ca un parametru semnificativ în (2), ne putem aştepta ca convergenţa să depindă de valorile particulare ale lui s. În general, integrala converge pentru anumite valori ale lui s şi diverge pentru altele.

În toate teoremele ce urmează vom considera numai funcţii $f(t)$ integrabile fără a mai specifica acest lucru de fiecare dată. Ca o primă teoremă considerăm următoarea afirmaţie:

Dacă o funcţie $f(t)$ este mărginită pentru orice $t \geqslant 0$, atunci integrala Laplace converge absolut pentru $Re(s) > 0$.

Pentru demonstrarea teoremei, observăm că condiţia asupra lui $f(t)$ înseamnă că $|f(t)| < M$ pentru orice $t \geqslant 0$, unde M este un număr pozitiv. Atunci pentru $\sigma > 0$ vom obţine

$$\int_0^T |\varepsilon^{-st} f(t)|\,dt < M\int_0^T \varepsilon^{-\sigma t} dt = \left(\frac{M}{\sigma}\right)(1 - \varepsilon^{-\sigma T}). \tag{4}$$

La limită, cînd T tinde către infinit, membrul drept tinde către M/σ. Deci

$$\int_0^\infty |\varepsilon^{-st} f(t)|\,dt < \frac{M}{\sigma} \qquad (\sigma > 0). \tag{5}$$

Funcţiile cunoscute ca sin, cos, şi alte funcţii periodice cum ar fi unda dreptunghiulară, satisfac condiţiile teoremei. Înainte de a comenta această teoremă sa considerăm şi teorema de mai jos

Dacă integrala Laplace converge pentru un anumit $s_0=\sigma_0+j\omega_0$ atunci converge pentru orice $\sigma>\sigma_0$.

Fie

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^{-s_0 t} f(t)\, dt = k_0, \tag{6}$$

unde k_0 este o constantă, deoarece s_0 este un număr complex fixat. Definim funcţia auxiliară

$$\int_0^{\tau} \varepsilon^{-s_0 t} f(t)\, dt = g(\tau). \tag{7}$$

Dar $g(\tau)$ are limită cînd τ tinde la ∞; adică, k_0. Deci $g(\tau)$ este mărginită pentru orice τ. Atunci vom scrie integrala Laplace ca mai jos şi integrînd prin părţi obţinem

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^{T} \varepsilon^{-st} f(t)\, dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^{T} \varepsilon^{-(s-s_0)t}\varepsilon^{-s_0 t} f(t)\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left\{\varepsilon^{-(s-s_0)t} g(t)\Big|_0^T - \int_0^T [-(s-s_0)\,\varepsilon^{-(s-s_0)t} g(t)]dt\right\}, \tag{8}$$

sau

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^{T} \varepsilon^{-st} f(t)\, dt = \lim_{T\to\infty}\left\{\varepsilon^{-(s-s_0)T} g(T) - g(0) + (s-s_0)\int_0^T \varepsilon^{-(s-s_0)t} g(t) dt\right\}. \tag{9}$$

Dar $g(0)=0$, $g(\infty)=k_0$, şi dacă $\sigma>\sigma_0$, atunci $e^{-(s-s_0)T}g(T)$ tinde către zero cînd T tinde către ∞. De asemenea, ţinînd seama de teorema precedentă, ultima integrală din (9) converge absolut pentru $\sigma>\sigma_0$ cînd T tinde către ∞. Astfel afirmaţia se verifică. De fapt

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} f(t)\, dt = (s-s_0)\int_0^{\infty} \varepsilon^{-(s-s_0)t} g(t)\, dt \qquad (\sigma>\sigma_0). \tag{10}$$

Această afirmaţie poate fi întărită arătînd că integrala Laplace converge *absolut* pentru $\sigma>\sigma_0$, dacă converge pentru σ_0. Totuşi nu vom avea nevoie de acest rezultat în cazul general. Pentru funcţii de ordin exponenţial (pentru a fi definite prescurtat) putem demonstra mai uşor acest lucru.

Astfel *regiunea (mulţimea) de convergenţă* a integralei Laplace este un *semiplan*, deoarece conform teoremei de mai sus dacă integrala converge pentru un anumit punct din planul s, ea converge pentru toate punctele situate la dreapta acestuia. Deci putem defini o *abscisă de convergenţă* σ_c astfel încît integrala Laplace converge pentru orice s cu $\sigma > \sigma_c$ şi diverge pentru orice s cu $\sigma < \sigma_c$. O afirmaţie mai puternică pe care nu am demonstrat-o este aceea că regiunea de convergenţă este de asemenea regiune de convergenţă absolută. Astfel, comportarea integralei Laplace este oarecum analoagă cu comportarea seriilor de puteri. Funcţia $f(t)$ joacă rolul coeficienţilor seriei de puteri şi funcţia ε^{-st} joacă rolul lui $(s-s_0)^n$. Aşa cum o serie de puteri poate avea orice comportare pe cercul de convergenţă, integrala Laplace poate avea de asemenea orice comportare [1] pe abscisa de convergenţă.

Singura diferenţă este legată de existenţa unui punct singular pe cercul de convergenţă, lucru pe care îl vom examina mai tîrziu. La seriile infinite avem multe criterii de convergenţă. Toate acestea au analoage la transformatele Laplace. Ne vom mulţumi să enunţăm numai două din acestea. Analoagă criteriului raportului este următoarea afirmaţie : *Dacă* $|f(t)| \leqslant M\varepsilon^{ct}$ *pentru o constantă dată* M *şi un număr dat* c, *pentru orice* t, *atunci integrala Laplace converge absolut pentru* $\sigma > c$.
Această afirmaţie se verifică imediat căci

$$\int_0^\infty |\varepsilon^{-st}f(t)|\,dt \leqslant M\int_0^\infty \varepsilon^{-\sigma t}\varepsilon^{ct}\,dt = \frac{M}{\sigma - c} \qquad (\sigma > c). \tag{11}$$

Avem astfel un criteriu suficient pentru existenţa integralei Laplace. Funcţiile care satisfac inegalitatea

$$|f(t)| \leqslant M\varepsilon^{ct} \text{ pentru un anumit } M \text{ şi pentru } t > 0 \tag{12}$$

Se numesc funcţii de *ordin* (*identice de creştere*) *exponenţial. Ordinul unei* funcţii este cel mai mic număr σ_0 astfel ca inegalitatea (12) să fie satisfăcută pentru orice

$$c = \sigma_0 + \delta \qquad (\delta > 0) \tag{13}$$

şi pentru nici un $c = \sigma_0 - \delta$. În acest caz am stabilit că integrala Laplace converge absolut pentru $\sigma > \sigma_0$ şi diverge pentru $\sigma < \sigma_0$. Multe funcţii care nu sînt de ordin exponenţial admit transformate Laplace. Totuşi, putem enunţa următoarea condiţie necesară şi suficientă, care arată că integrala unei funcţii transformabile este de ordin exponenţial.

---

[1] Adică pentru s avînd $\sigma = \sigma_c$ integrala poate sau nu să fie convergentă (*N.T.*)

Funcţia $f(t)$ este transformabilă, cu abscisa de convergenţă $\sigma_0 > 0$ dacă şi numai dacă funcţia

$$g(t) = \int_0^t f(x)\, dx \tag{14}$$

satisface

$$|g(t)| \leqslant M \varepsilon^{ct} \tag{15}$$

pentru orice $c > \sigma_0$

Demonstraţia acestei afirmaţii se face folosind integrala Stieltjes şi nu o putem da aici. Vom folosi această teoremă pentru a obţine un criteriu analog cu criteriul rădăcinii al lui Cauchy pentru serii de puteri.

Fie $g(t)$ funcţia definită în (14). *Dacă*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\ln |g(t)|}{t} = c \neq 0, \tag{16}$$

atunci abscisa de convergenţă a integralei Laplace a lui $f(t)$ este c. Integrala converge pentru $\sigma > c$ şi diverge pentru $\sigma < c$. Dacă $c = 0$ criteriul nu poate afirma nimic asupra convergenţei.

În cazul seriilor de puteri, regiunile de convergenţă, convergenţă absolută şi convergenţă uniformă coincid. Am afirmat că în cazul integralei Laplace, regiunile de convergenţă şi convergenţă absolută coincid, amîndouă fiind semiplane. Deci ne putem pune întrebarea dacă şi regiunea de convergenţă uniformă coincide cu regiunea de convergenţă. Regiunea de convergenţă uniformă[1] este stabilită de următoarea teoremă, dată aici fără demonstraţie:

Dacă integrala Laplace converge pentru $s = \sigma_0$, atunci ea converge uniform în sectorul

$$|\arg (s - \sigma_0)| \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right) - \delta. \tag{17}$$

penru orice $\delta > 0$

Această regiune este arătată în fig. A.3.1. Putem considera σ_0 ca fiind abscisa de convergenţă σ_c dacă integrala converge în acest punct. Dacă nu, σ_0 este un punct arbitrar de apropiat de σ_c, la dreapta acestuia.

---

[1] Considerînd integrala ca o integrală cu parametrul s, aici este vorba de convergenţa uniformă în raport cu s. (*N.T.*)

Totuşi, în cazul funcţiilor de ordin exponenţial, regiunea de convergenţă uniformă coincide cu regiunea de convergenţă; adică putem lua $\delta=0$ în teorema de mai sus.

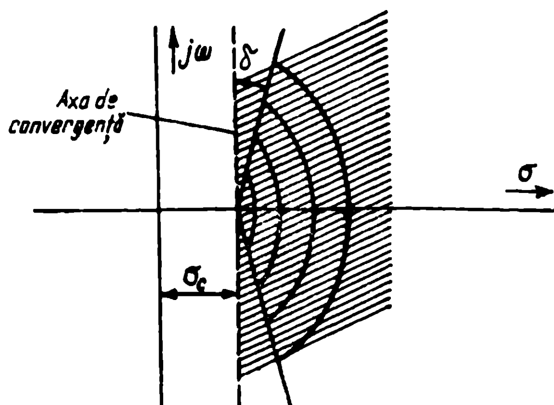


Fig. A.3.1. Regiunea de convergenţă şi de convergenţă uniformă a integralei Laplace.

Pentru funcţii de ordin exponenţial regiunea de convergenţă uniformă este semiplanul

$$\sigma \geqslant \sigma_c + \delta \qquad (\delta > 0),$$

unde σ_c este abscisa de convergenţă.

Demonstrarea acestei afirmaţii este cu totul similară cu demonstraţia dată anterior pentru convergenţa absolută şi deci o vom omite.

Astfel, comportarea integralei Laplace referitor la convergenţă este identică cu comportarea seriilor de puteri.

A. 3.2. PROPRIETĂŢI ANALITICE ALE TRANSFORMATEI LAPLACE

Folosim din nou analogia cu seriile de puteri; o serie de puteri defineşte o funcţie analitică în interiorul cercului de convergenţă. Putem aşadar să ne întrebăm dacă analogia se extinde şi în această privinţă. Răspunsul la această întrebare este afirmativ, aşa cum se arată în următoarea teoremă:

Dacă integrala

$$F(s) = \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} f(t)\, dt \tag{18}$$

converge pentru $\sigma > \sigma_c$, atunci funcția $F(s)$ definită de integrală este regulată în semiplanul $\sigma > \sigma_c$. În fapt, derivata lui $F(s)$ este dată de

$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_0^\infty \varepsilon^{-st}(-t)f(t)\,dt \tag{19a}$$

și în general

$$F^{(n)}(s) = \int_0^\infty \varepsilon^{-st}(-t)^n f(t)\,dt. \tag{19b}$$

Fiind dat orice punct s cu $\sigma > \sigma_c$, putem înconjura acest punct cu un cerc care este conținut în întregime în regiunea de convergență uniformă, deoarece δ în (17) este arbitrar. Apoi, datorită convergenței uniforme, operațiile de trecere la limită, integrare, derivare pot fi schimbate între ele. Deci :

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty \varepsilon^{-st}f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\varepsilon^{-st}f(t)\,dt.$$

Aceasta conduce la (19*a*). Convergența lui (19*a*) se stabilește ușor pentru funcții de ordin exponențial. Pentru cazul general integrăm prin părți.

Astfel, integrala Laplace definește o funcție regulată în semiplanul de convergență. Totuși, deși funcția $F(s)$ este *definită* de integrală numai în semiplanul de convergență, putem folosi procedeul *prelungirii analitice* pentru a extinde funcția peste abscisa de convergență ori de cîte ori ea se poate prelungi. [În practică aceasta este o simplă formalitate, „prelungirea analitică" fiind pur și simplu o extindere a formulei pentru $F(s)$]. La această funcție analitică mai generală ne vom referi ca fiind *transformata Laplace*.

Dacă $F(s)$ este transformata Laplace a lui $f(t)$, vom numi $f(t)$ *funcție original* și $F(s)$ *funcție generatoare*.

În acest concept mai general al transformatei Laplace, funcția generatoare, în general, va avea singularități. Ele trebuie să se afle în semiplanul $\sigma \leqslant \sigma$ sau la ∞. Aici putem să ne referim din nou la analogia cu seriile de puteri. Funcția definită de o serie de puteri are întotdeauna un punct singular pe cercul de convergență. Ne întrebăm dacă $F(s)$ are un punct singular finit la abscisa de convergență σ_c. Aici analogia nu mai este valabilă. În general se poate să nu existe nici un punct singular la $\sigma = \sigma_c$. Următorul exemplu, a fost dat de Doestch :

$$f(t) = -\pi\varepsilon^t \sin(\pi\varepsilon^t). \tag{21}$$

Pentru această funcţie, abscisa de convergenţă este zero. Totuşi, transformata sa, satisface ecuaţia cu diferenţe finite

$$F(s) = 1 - \frac{s(s+1)}{2} F(s+2) \tag{22}$$

astfel încît $F(s)$ este o funcţie întreagă.

Totuşi, în anumite cazuri speciale, transformata are un punct singular în $s=\sigma_c+j\omega$. De exemplu, dacă $f(t)$ este în mod esenţial nenegativă, atunci se poate arăta că punctul real din planul s la abscisa de convergenţă este un punct singular. Această afirmaţie este prea specializată pentru a interesa în ceea ce ne priveşte astfel încît nu o vom demonstra. Rezultatul important care ne interesează este că transformata Laplace este o funcţie analitică care este regulată în semiplanul de convergenţă al integralei de definiţie. Transformata Laplace generală este funcţia obţinută prin prelungirea analitică a funcţiei iniţiale.

Una din proprietăţile analitice importante ale transformatei Laplace se referă la comportarea ei la ∞. În legătură cu aceasta, avem următoarea teoremă :

Dacă funcţia original $f(t)$ este o funcţie de t absolut integrabilă, cu valori reale sau complexe şi integrala Laplace este convergentă în s_0, atunci cînd s tinde către ∞ în interiorul sectorului

$$|\arg(s-s_0)| \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)-\delta \quad \text{cu } \delta>0,$$

funcţia generatoare $F(s)$ tinde către zero.

Pentru a demonstra această afirmaţie procedăm ca mai jos. Fie un $\varepsilon>0$, dat. Deoarece $f(t)$ este o funcţie absolut integrabilă, se poate găsi un T_1 suficient de mic încît pentru $\sigma>0$.

$$\left|\int_0^{T_1} \varepsilon^{-st} f(t)\, dt\right| < \int_0^{T_1} |f(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{23}$$

Deoarece integrala Laplace este uniform convergentă în acest sector, există un T_2 suficient de mare, $T_2>T_1$ şi

$$\left|\int_{T_2}^{\infty} \varepsilon^{-st} f(t)\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{24}$$

pentru orice s din acest sector. Aceste două condiţii, fixează pe T_1 şi T_2 şi deci valoarea integralei este

$$\int_{T_1}^{T_2} |f(t)|\, dt = M \tag{25}$$

în sfîrşit, se poate găsi un σ_1 suficient de mare încît

$$\varepsilon^{-\sigma_1 T_1} < \frac{\varepsilon}{3M}$$

şi să avem

$$\left| \int_{T_1}^{T_2} \varepsilon^{-st} f(t)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (\sigma > \sigma_1). \tag{26}$$

Deoarece s tinde către infinit în interiorul sectorului $|\arg(s-s_0) \leqslant \pi/2 - \delta$, partea sa reală poate eventual depăşi σ_1. Dacă considerăm impreună relaţiile (23), (24), (26) şi impunem lui s restricţia

$$|\arg(s-s_0)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta \qquad (\sigma > \sigma_1)$$

obţinem

$$\left| \int_{0}^{\infty} \varepsilon^{-st} f(t)\, dt \right| = | F(s) < \varepsilon \tag{27}$$

astfel încît

$$\lim_{\substack{s \to \infty \\ |\arg(s-s_0)| \leqslant \pi/2 - \delta}} F(s) = 0. \tag{28}$$

Astfel comportarea lui $F(s)$ la infinit are restricţii ; de exemplu punctul $s = \infty$ nu poate fi pol. Dacă $F(s)$ este regulată la $s = \infty$, ea trebuie să aibă acolo un zero ; $F(\infty)$ nu poate fi o constantă diferită de zero. De exemplu, *dacă* F(S) *este o funcţie raţională, gradul polinomului de la numitor trebuie să fie strict mai mare decît gradul polinomului de la numărător*. Totuşi, $F(s)$ poate avea un punct singular esenţial sau un punct de ramificaţie la $s = \infty$. (Aceste condiţii se aplică numai pentru funcţiile original cu valori reale sau complexe şi nu se aplică şi *pentru funcţiile generalizate* cum ar fi funcţiile impuls de diferite ordine. Transformata Laplace pentru funcţiile generalizate este tratată în Anexa 1.)

Vorbind despre comportarea generală a transformatei Laplace, ne putem pune încă o întrebare generală, anume asupra *unicităţii* sale. Problema este în special importantă atunci cînd dorim să aflăm funcţia original din transformata sa Laplace. În scopul obţinerii unui răspuns la această problemă fără a apela la concepte privitoare la funcţii nule,

„măsură zero" şi „aproape peste tot", vom conveni să ***normalizăm*** funcţia $f(t)$ definind

$$f(0) = \tfrac{1}{2} f(0+) \tag{29a}$$

$$f(t) = \tfrac{1}{2} [f(t+) + f(t-)], \tag{29b}$$

unde semnele + şi − indică, ca de obicei, limitele la dreapta şi la stînga în punctul după care urmează semnul. Vom presupune în mod implicit că aceste limite există.

Nu pot exista două funcţii original normalizate $f_1(t)$ şi $f_2(t)$ care au aceeaşi transformată Laplace $F(s)$.

Demonstraţia acestei afirmaţii este prea complicată pentru a o considera aici. Dacă nu considerăm funcţii normalizate, putem să tragem numai concluzia că $f_1(t)$ şi $f_2(t)$ diferă cel mult printr-o funcţie nulă.

A. 3.3. OPERAŢII ASUPRA FUNCŢIILOR ORIGINAL ŞI GENERATOARE

În aplicaţiile din teoria reţelelor interesează rezultatul efectuării diferitelor operaţii algebrice şi analitice în domeniul t şi s. În acest paragraf vom da sumar aceste rezultate.

Cea mai simplă din aceste operaţii este operaţia algebrică de combinaţie liniară, cu care deja ne-am ocupat. Funcţia generatoare corespunzătoare unei combinaţii liniare de funcţii original este aceeaşi combinaţie liniară a funcţiilor generatoare corespunzătoare; adică

$$\mathscr{L}\left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(t) \right\} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathscr{L}\{f_i(t)\}. \tag{30}$$

Această liniaritate este foarte folositoare atît în transformata Laplace directă cît şi inversă.

Produsele de convoluţie real şi complex

Cealaltă operaţie algebrică, înmulţirea într-unul din cele două domenii, duce la rezultate complicate. Rezultatele obţinute sînt analoage cu acelea de la seriile infinite; de exemplu dacă avem două serii de puteri cu regiune

de convergență comună

$$F_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \tag{31a}$$

$$F_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n \tag{31b}$$

atunci produsul celor două, este tot o serie de puteri

$$F_1(s)\, F_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n, \tag{32a}$$

unde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}. \tag{32b}$$

Seria produs converge în regiunea comună de convergență a celor două serii individuale. Sumele din (32*b*) sînt cunoscute ca *sume de convoluție*. Vom obține un rezultat analog în cazul transformatelor Laplace.

Dacă

$$F_1(s) = \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} f_1(t)\, dt$$

și (33)

$$F_2(s) = \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} f_2(t)\, dt$$

au abscisele de convergență finite σ_1 *și* σ_2, *atunci produsul* $F_1(s)F_2(s)$ *este de asemenea o transformată Laplace,*

$$F_1(s)\, F_2(s) = \int_0^{\infty} \varepsilon^{-st} g(t)\, dt, \tag{34a}$$

unde

$$g(t) = \int_0^{t} f_1(x)\, f_2(t-x)\, dx = \int_0^{t} f_1(t-x)\, f_2(x)\, dx, \tag{34b}$$

avînd abscisa de convergență egală cu cea mai mare valoare a lui σ_1 *și* σ_2.

Dacă $F_1(s)$ şi $F_2(s)$ sînt transformatele Laplace ale lui $f_1(t)$ şi $f_2(t)$ cu abscisele de convergenţă σ_1 şi σ_2, transformata Laplace a produsului $f_1(t)\, f_2(t)$ este dată de

$$L\{f_1(t)\, f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(z)\, F_2(s-z)\, dz, \qquad (35)$$

unde $\sigma_1 < c < \sigma - \sigma_2$ şi $\sigma = \mathrm{Re}(s)$ este mai mare decît abscisa de convoluţie $\sigma_1 + \sigma_2$.

Primul din aceste două rezultate este de considerabil interes în teoria reţelelor şi este verificat în cap. 5. Al doilea rezultat nu ne interesează în mod special; vom renunţa deci la demonstraţie. Integralele din (34*b*) şi (35) sînt cunoscute ca *integralele de convoluţie*, prima reprezentînd un produs de convoluţie real iar a doua un produs de convoluţie complex.

Derivarea şi integrarea

Vom considera în continuare, operaţiile de derivare şi integrare în ambele domenii. Acestea corespund după cum vom vedea multiplicării sau împărţirii prin s sau t. Derivarea în domeniul s a fost considerată anterior ; să repetăm rezultatul aici

Dacă

$$L\{f(t)\} = F(s) \qquad (36a)$$

atunci

$$L\{t^n f(t) = (-1)^n F^{(n)}(s), \qquad (36b)$$

abscisa de convergenţă fiind aceeaşi.

După cum este de aşteptat, operaţiile inverse împărţirea prin t şi integrarea în raport cu s corespund. Aici semnul negativ lipseşte.

Dacă

$$L\{f(t)\} = F(s) \qquad (37a)$$

atunci

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(z)\, dz, \qquad (37b)$$

unde abscisele de convergenţă sînt aceleaşi iar conturul de integrare este restrîns la sectorul de convergenţă uniformă.

Această afirmaţie se poate verifica integrînd prin părţi în domeniul s observînd că $F(s)$ tinde către zero cînd s tinde către infinit. Operaţii

mai importante decît cele precedente, în aplicațiile din teoria rețelelor, sînt derivarea și integrarea în domeniul timp. Aceste operații vor fi dualele celor de mai sus.

Fie $f(t)$ derivabilă (și deci continuă) pentru $t>0$ iar derivata $f'(t)$ este transformabilă Laplace. Atunci $f(t)$ este de asemenea transformabilă și are aceeași abscisă de convergență.
Există, relația

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0+), \tag{38 a}$$

în care

$$F(s) = L\{f(t)\}. \tag{38 b}$$

și

$$f(0+) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t) \tag{38 c}$$

Deoarece $f'(t)$ este transformabilă rezultă că $f(t)$ este de ordin exponențial și deci este transformabilă. Restul afirmației rezultă integrînd

$$\int_0^T \varepsilon^{-st} f'(t)\,dt$$

prin părți și considerînd limita cînd T tinde către infinit.

Fie $f(t)$ o funcție integrabilă și transformabilă Laplace.
Fie

$$g(t) = \int_0^t f(x)\,dx. \tag{39}$$

Atunci $g(t)$ este de asemenea transformabilă, cu aceeași abscisă de convergență și

$$G(s) = \frac{1}{s}F(s), \tag{40}$$

unde $G(s)$ și $F(s)$ sînt respectiv transformatele Laplace ale lui $f(t)$ și $g(t)$.

Prima parte a afirmației se demonstrează ca mai sus. Ecuația (40) rezultă din (38b) observînd că $g(0+)=0$ conform lui (39).

Aceste rezultate se extind imediat pentru derivate de ordin superior și integrări repetate, prin aplicarea repetată a teoremelor de mai sus.

Teoremele valorilor inițiale și finale

În estimarea comportării răspunsului tranzitoriu al unui sistem liniar sînt de un considerabil interes alte două operații limită. Prima din ele va da legătura între valoarea lui $f(t)$ la $t=0$ și o valoare particulară a lui $F(s)$.

Definiţia transformatei Laplace dă numai legătura între valorile lui $f(t)$ pe întreaga axă reală pozitivă t şi comportarea lui $F(s)$ într-un semiplan complex. Relaţia dorită este următoarea:

Dacă $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, *avînd o abscisă de convergenţă* $\sigma_c < \sigma_0$ *şi dacă* $f'(t)$ *este transormabilă atunci*

$$f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{41}$$

în care limita din membrul drept trebuie luată în sectorul

$$|\arg(s - \sigma_0)| \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right) - \delta.$$

Aceasta se numeşte *teorema valorii iniţiale.*

Pentru a demonstra această afirmaţie vom considera formula de derivare

$$L\{f'(t) = sF(s) - f(0+) \tag{42}$$

şi vom lua limita pentru s tinzînd la ∞ în sectorul specificat. Deoarece $\mathscr{L}\{f'(t)\}$ este o transformată Laplace ea tinde la zero cînd s tinde către infinit în acest sector. Rezultatul obţinut va fi (41).

Ne putem aştepta, în mod analog, să obţinem valoarea finală luînd limita lui (42) cînd s tinde către zero. Dar aici vom avea dificultăţi deoarece

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = f(0+) + \lim_{s\to 0}\int_0^\infty f'(t)\,\varepsilon^{-st}\,dt, \tag{43}$$

în care limita trebuie să fie calculată pentru $|\arg s| \leqslant (\pi/2) - \delta$

În primul rînd nu este evident că limita din membrul drept există. Dacă există, nu putem vedea care este valoarea ei. Totuşi, dacă schimbăm între ele limita şi integrala, obţinem

$$\int_0^\infty \lim_{s\to 0} f'(t)\,\varepsilon^{-st}\,dt = \int_0^\infty f'(t)\,dt = f(\infty) - f(0+). \tag{44}$$

Dacă presupunem convergenţă uniformă a integralei Laplace a lui $f'(t)$ într-o regiune ce include $s=0$, atunci această schimbare se poate face. Totuşi, în acest caz, abscisele de convergenţă atît a lui $f(t)$ cît şi a lui $f'(t)$ trebuie să fie negative. Dar acest lucru este posibil numai dacă $f(t)$ tinde către zero cînd t tinde către infinit; adică

$$f(\infty) = 0 \tag{45}$$

Dar în acest caz, întreaga teoremă este lipsită de conținut. Deci în scopul stabilirii acestei teoreme schimbarea ordinei operațiilor de trecere la limită și integrare trebuie justificată cu ajutorul unei condiții mai fine decît convergența uniformă. Această necesitate face ca demonstrația să nu se încadreze în scopul prezentei lucrări. Teorema dorită se enunță astfel:

Dacă $f(t)$ și $f'(t)$ sînt transformabile Laplace și $sF(s)$ este regulată pe axa $j\omega$ și în semiplanul drept, atunci

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to 0+} s\,F(s), \tag{46}$$

unde limita din dreapta se va calcula de-a lungul axei reale pozitive.

Aceasta este *teorema valorii finale.*

Teorema translației (deplasării)

Ultimele două operații pe care le vom considera sînt înmulțirea lui $f(t)$ sau $F(s)$ cu o funcție exponențială. Considerăm mai întîi înmulțirea lui $F(s)$ cu ε^{-as} unde a este un număr nenegativ. Avem

$$\varepsilon^{-as} F(s) = \varepsilon^{-as}\int_0^\infty \varepsilon^{-st} f(t)\,dt \tag{47}$$

$$= \int_0^\infty \varepsilon^{-s(t+a)} f(t)\,dt.$$

Dacă facem substituția $x=t+a$ iar apoi schimbăm variabila auxiliară x în t, obținem

$$\varepsilon^{-as} F(s) = \int_a^\infty \varepsilon^{-st} f(t-a)\,dt. \tag{48}$$

Dacă presupunem că $f(t)$ este nulă pentru $t<0$, atunci $f(t-a)$ este nulă pentru $t<a$ iar limita inferioară a integralei se poate înlocui cu zero. Pentru a arăta că $f(t-a)$ este zero cînd $t<a$, o vom scrie sub forma $f(t-a)$ $u(t-a)$. Funcția $u(x)$ este funcția treaptă unitate definită ca zero pentru x negativ și unu pentru x pozitiv. Acest lucru conduce la următoarea afirmație:

Dacă $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ iar a este un număr real nenegativ, atunci

$$L[f(t-a)\,u(t-a)] = \varepsilon^{-as}F(s), \tag{49}$$

cu aceeași abscisă de convergență.

Afirmaţia de mai sus se numeşte *teorema deplasării reale* sau *teorema translaţiei*, deoarece $f(t-a)$ se obţine din $f(t)$ prin deplasarea acesteia la dreapta cu a unităţi.

Operaţia de multiplicare a lui $f(t)$ cu ε^{at} conduce la o afirmaţie analogă. Aceasta se numeşte *teorema deplasării în complex.*

Dacă $\mathscr{L} f(t)\} = F(s)$ *cu abscisa de convergenţă* σ_c, atunci

$$L[\varepsilon^{at} f(t)] = F(s + a), \tag{50}$$

avînd abscisa de convergenţă $\sigma_c + \mathrm{Re}(a)$.
Această teoremă rezultă direct din definiţia transformatei Laplace.

A.3.4. INTEGRALA COMPLEXĂ DE INVERSIUNE

Vom considera acum problema găsirii funcţiei original $f(t)$, cunoscînd funcţia generatoare $F(s)$. Deoarece teorema de unicitate spune că două funcţii esenţial diferite $f(t)$ nu pot conduce la aceeaşi funcţie $F(s)$, putem presupune că există o transformare inversă care va da $f(t)$. Intuitiv este de aşteptat ca transformarea inversă să fie de asemenea o integrală, de data aceasta o integrală complexă în domeniul s. Ea trebuie să conţină o anumită funcţie nucleu de s şi t deoarece rezultatul trebuie să fie o funţie de t. Într-adevăr aşa se întîmplă, după cum ne va arăta următoarea teoremă:

Fie $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$, *cu abscisa de convergenţă* σ_c. *Atunci*

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\varepsilon^{st}\,ds = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{2}f(0+) & t=0 \\ \frac{1}{2}[f(t+)+f(t-)] & t>0 \end{cases} \tag{51}$$

unde $c>\sigma_c$. Aceasta este cunoscută ca *integrala de inversiune.*

Demonstraţia acestei importante teoreme implică cunoaşterea teoremei integralei Fourier şi a mai multor rezultate din teoria integralei Lebesgue. Vom presupune în mod implicit aplicată normalizarea şi scriem

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\varepsilon^{st}\,ds = f(t)u(t) \tag{52}$$

sau simplu

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\varepsilon^{st}\,ds = f(t), \tag{53}$$

subînţelegînd că $f(t) = 0$ pentru $t<0$.

Atunci cînd se dă numai funcţia $F(s)$, în general nu cunoaştem σ_c. Totuşi, ştim că $F(s)$ este regulată pentru $\sigma > \sigma_c$. Deci, în acest caz vom alege pentru conturul de integrare o dreaptă verticală situată la dreapta tuturor punctelor singulare ale lui $F(s)$. Un astfel de contur este cunoscut sub numele de *contur Bromwich*, după numele celebrului matematician T.J.I. A. Bromwich, care a adus contribuţii importante la teoria transformării

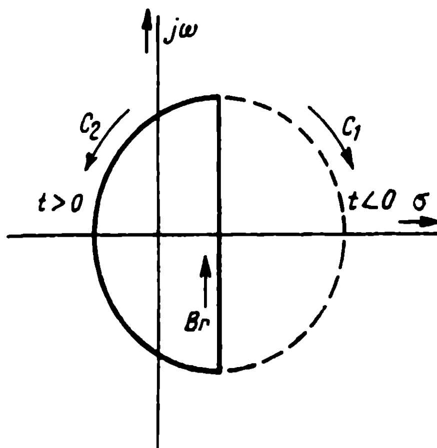


Fig. A.3.2. Evaluarea integralei de inversiune.

Laplace. Adesea se utilizează lîngă semnalul de integrală, în locul limitelor, prescurtarea „Br.", pentru a indica acest contur.

Am văzut în Paragraful 6 din Anexa 2 că de multe ori se poate folosi teorema reziduurilor pentru evaluarea integralelor de acest tip. Pentru a putea aplica teorema reziduurilor va trebui să conchidem conturul. Considerăm cele două contururi închise din fig. A. 3.2. Dacă integrandul $F(s)\varepsilon^{st}$ satisface lema lui Jordan pe unul din arcele semicirculare, putem evalua integrala cu ajutorul teoremei reziduurilor. Dacă lema lui Jordan este îndeplinită pe arcul din dreapta: adică

$$\lim_{s\to\infty} sF(s)\varepsilon^{st} = 0, \qquad |\arg(s - \sigma_0)| \leqslant \pi/2 - \delta.$$

(afirmaţie adevărată de exemplu, pentru $t<0$), integrala pe C_1 din fig.A.3.2 este zero. Deoarece, în plus, integrala pe conturul închis este zero căci în interior nu se găsesc singularităţi, rezultă că integrala de inversiune este zero.

Dacă se satisface lema lui Jordan pe arcul semicircular din stînga, lucru care se întîmplă în foarte multe cazuri, atunci integrala pe conturul închis C_2 este de $2\pi j$ ori suma reziduurilor lui $F(s)\varepsilon^{st}$ în punctele singulare cuprinse în contur. Incluzînd în (52), factorul $2\pi j$, rezultă:

Dacă $F(s)\to 0$ *cînd* $s\to\infty$, *în mod uniform, în sectorul* $|\arg(s-\sigma_0)| \geqslant \geqslant \pi/2 - \delta$ *atunci pentru* $t>0$,

$f(t) = \sum$ reziduurilor lui $F(s)\varepsilon^{st}$ în singularitățile finite ale lui $F(s)$.

Acesta este un rezultat extrem de folositor. Pentru funcțiile simple, de exemplu funcții raționale, putem evalua $f(t)$ foarte ușor aplicînd această teoremă. Pentru ca funcția rațională să fie o transformată Laplace, gradul polinomului de la numitor trebuie să depășească gradul polinomului de la numărător conform condiției (28). Astfel, formula de inversiune cu ajutorul reziduurilor se poate întotdeauna aplica funcțiilor raționale proprii.

În scurta prezentare a transformatei Laplace a trebuit să omitem mai multe teoreme și demonstrații de importanță considerabilă. Totuși, cel puțin s-au enunțat toate rezultatele care sînt folosite în capitolele acestei cărți. Pentru cei ce doresc o tratare mai amănunțită, în bibliografie sînt citate mai multe lucrări consacrate subiectului. Încheim discuția cu un scurt tabel (A. 3.1) al perechilor de transformate care sînt necesare în aplicații.

Tabelul A. 3.1.

Tabelul perechilor de transformate Laplace

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
df/dt	$sF(s) - f(0+)$
d^2f/dt^2	$s^2F(s) - sf(0+) - f^{(1)}(0+)$
d^nf/dt^n	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+)$
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
$\int_0^t \int_0^\tau f(\lambda)\,d\lambda\,d\tau$	$\frac{1}{s^2}F(s)$
$t^nf(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$
$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$
$\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau$	$F_1(s)F_2(s)$
$f(t)\varepsilon^{-\alpha t}$	$F(s+\alpha)$
$f(t/\alpha)$	$\alpha F(\alpha s)$
$f(t-\alpha)u(t-\alpha)$	$\varepsilon^{-\alpha s}F(s)$
$\delta^{(n)}(t)$	s^n
$\delta^{(1)}(t)$	s
$\delta(t)$	1

Tabelul A.3.1 (continuare)

$f(t)$	$F(s) = \{f(t)\}$
$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$\varepsilon^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{s+\alpha}$
$t\varepsilon^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{(s+\alpha)^2}$
$t^n\varepsilon^{-\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\varepsilon^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$\varepsilon^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t \cos t$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\varepsilon^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\dfrac{2\omega(s+\alpha)}{[(s+\alpha)^2+\omega^2]^2}$
$t\varepsilon^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\dfrac{(s+\alpha)^2-\omega^2}{[(s+\alpha)^2+\omega^2]^2}$